

ДВИЖЕНИЕ ПЛАСТОВОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНЫЙ РАЗЛОМ МОЩНОГО ПЛАСТА ПРИ НАЛИЧИИ ПОДОШВЕННОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ

В. П. ПИЛАТОВСКИЙ

(Москва)

Получено точное решение задачи об установившейся фильтрации весомой несжимаемой жидкости в тонком бесконечноглубоком наклонном пласте, имеющем по восстанию пласта трещину заданной глубины. Область фильтрации более легкой жидкости (нефть) вверх имеет непроницаемую границу в виде горизонтальной линии сброса. Внизу область фильтрации имеет свободную границу, ниже которой лежит область неподвижной жидкости (подошвенная вода). Граница раздела жидкостей, профиль трещины и расход пластовой жидкости определяются из решения задачи по заданным параметрам (проницаемость пласта и заполнителя трещины, вязкость фильтрующейся жидкости, объемный вес верхней и нижней жидкостей, глубина трещины, перепад давления между точкой на трещине и точкой на границе раздела жидкостей). В случае, если тонкий пласт представляет собой вертикальный фильтрующий слой, рассмотренное течение истолковывается как движение пластовой жидкости через вертикальный разлом мощного пласта (полупространство) при наличии подошвенной границы раздела жидкостей. Задача решена в конечном виде при помощи известных аналитических функций с привлечением интегралов типа Коши. Предварительно найдено фундаментальное решение частной задачи о течении с точечной особенностью. Фундаментальное решение имеет также самостоятельное значение, обобщая решение некоторых известных задач [1-4].

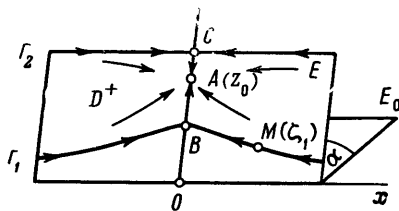
1. Постановка и фундаментальное решение частной задачи. Рассмотрим фильтрационный поток в тонком наклонном пласте, образующем угол α с горизонтальной плоскостью E_0 (фиг. 1). На плоскости E , представляющей собой тонкий наклонный пласт, выбираем систему прямоугольных координат x, y так, чтобы ось x была горизонтальной, а ось y — направленной вверх по восстанию пласта.

Область течения D^+ сверху ограничена горизонтальной прямой Γ_2 , представляющей собой непроницаемую границу, т. е. линию сброса пласта; внизу область D^+ ограничена линией Γ_1 — границей раздела более легкой (нефть) и менее легкой жидкости (вода). Жидкость, лежащая ниже линии Γ_1 , находится в покое.

Фильтрационный поток в области D^+ вызывается стоком (источником) в точке $A(z_0)$. Пусть $\mu^+ = \text{const}$ — вязкость, $\gamma^+ = \text{const}$ — объемный вес фильтрующейся жидкости, $k^+ = \text{const}$ — проницаемость (в области D^+) $\gamma^- = \text{const}$ — объемный вес нефилтующейся жидкости (вода ниже линии Γ_1), $k^- = \text{const}$ — проницаемость (в области D^-).

Положение линии Γ_2 определяем параметрически функцией $\zeta_2(s)$ в виде уравнения

$$\zeta_2 = \xi_2(s) + ih \quad (-\infty < s < \infty), \quad h = \text{const}(s) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь s означает действительный аргумент действительной функции $\xi_2(s)$. Положение свободной границы (линии Γ_1) определяем параметрически функцией $\xi_1(s)$ в виде записи

$$\xi_1 = \xi_1(s) + i\eta_1(s) \quad (1.2)$$

Действительные функции $\xi_1(s)$ и $\eta_1(s)$ от действительного аргумента $s \in (-\infty, \infty)$ находятся из решения задачи.

Фильтрационный поток в области $D^+(z)$ (фиг. 2) описываем при помощи комплексного потенциала

$$w(z) = \varphi + i\psi \quad (1.3)$$

Здесь $z = x + iy$ — комплексная координата точки $M(z)$ пласта E , величина $\varphi = \text{Re } w(z)$ — потенциал скорости

$$\varphi = -\frac{k}{\mu} (p + \gamma y \sin \alpha) \quad (1.4)$$

величина $\psi = \text{Im } w(z)$ — функция тока. Комплексную скорость $u - iv$ получаем в виде выражения

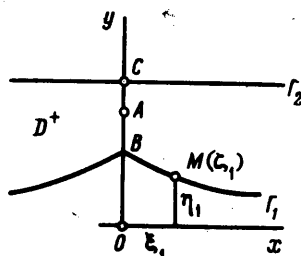
$$u - iv = dw/dz \quad (1.5)$$

Комплексный потенциал $w(z)$ учитывает особенности течения в области D^+ : во-первых, логарифмическую особенность в точке $A(z_0)$, где находится сток (источник), имитирующий работу скважины, и, во-вторых, — особенность потока на линиях Γ_1 и Γ_2 . Линия Γ_1 представляет собой искомую линию тока ($\psi^+ = \text{const}$), вдоль которой потенциал удовлетворяет условию [6]

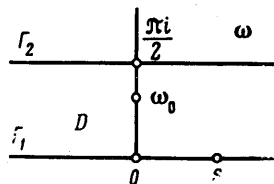
$$\varphi^+ - \kappa\varphi^- = U\eta(s) \quad (1.6)$$

$$\kappa = (k/\mu)^+ / (k/\mu)^-, \quad U = (k/\mu)^+(\gamma^- - \gamma^+) \sin \alpha \quad (1.7)$$

Для решения задачи вводим вспомогательное комплексное переменное ω , изменяющееся в области D плоскости изображения потока (фиг 3),



Фиг. 2



Фиг. 3

причем полагаем $s = \text{Re } \omega$. По теореме Римана существует некоторая аналитическая функция $z = z(\omega)$, отображающая конформно полосу D ($0 \leq \text{Im } \omega \leq 1/2 \pi$) на односвязную область D^+ комплексной плоскости $E(z)$, причем границей области D^+ является линия $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Отображающую функцию $z = z(\omega)$ определяем из уравнения

$$\partial z / \partial \omega = f(\omega) \quad (z \in D^+, \omega \in D) \quad (1.8)$$

Здесь $f(\omega)$ — некоторая аналитическая по аргументу ω функция, не имеющая нулей внутри области D . Полагаем, что граница Γ есть линия Ляпунова, поэтому по теореме О. Келлога [7] предельная функция $f(\omega_*)$ не обращается в нуль в точках $\omega_* \in \Gamma$ и удовлетворяет условию Гельдера.

Отображение, определяемое уравнением (1.8) при $\omega = s$ ($\text{Im } \omega = 0$) преобразует действительность плоскости ω в линию Γ_1 , ограничивающую внизу область D^+ на плоскости $E(z)$ (фиг. 2). То же отображение при $\omega = s + 1/2\pi i$ преобразует прямую Γ_2 плоскости ω в прямую Γ_2 плоскости $E(z)$.

Комплексный потенциал $w(z)$ (1.3) в области D^+ определяем параметрически из системы уравнений

$$\partial z / \partial \omega = f(\omega), \quad \partial w / \partial \omega = F(\omega). \quad (\omega \in D) \quad (1.9)$$

Функция $F(\omega)$, аналитическая в области D , имеет простые полюсы в тех точках $\omega \in D$, которые соответствуют стокам (источникам) в области D^+ ; например, точке $\omega_0 \in D$ отвечает точка $z_0 \in D^+$, представляющая собой скважину $A(z_0)$ в области течения. Функция $F(\omega)$ предполагается заданной. Для решения вопроса о виде функций $f(\omega)$ и $F(\omega)$ предварительно разберем задачу о выражении аналитической функции, заданной значением своей действительной части на границе $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ области D .

Для построения соответствующей аналитической функции $f_*(\omega)$, определенной в каждой точке $\omega \in D$ по известной действительной части, заданной на границах Γ_1 и Γ_2 полосы D , применяем интеграл, аналогичный интегралу Шварца

$$f_*(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} f_1(\sigma) \text{cth}(\sigma - \omega) d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} f_2(\sigma) \text{th}(\sigma - \omega) d\sigma + i \text{const} \\ (-\infty < \sigma < \infty, \omega \in D) \quad (1.10)$$

Здесь действительные функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ взяты из соотношений

$$\text{Re } f_*(\sigma) = 1/2 f_1(\sigma), \quad \text{Re } f_*(\sigma + 1/2\pi i) = 1/2 f_2(\sigma) \quad (1.11)$$

Для существования главного значения интегралов в точках $\omega = s$ и $\omega = s + 1/2\pi i$ достаточно потребовать, чтобы функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ удовлетворяли условию Гельдера и, кроме того, достаточно быстро стремились к нулю при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Из формулы (1.10) следуют соотношения:

$$\text{Im } f_*(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{(\sigma)} \text{Re } f_*(\sigma) \text{cth}(\sigma - s) d\sigma + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(\sigma)} \text{Re } f_*(\sigma + 1/2\pi i) \text{th}(\sigma - s) d\sigma + \text{const} \quad (1.12)$$

$$\text{Im } f_*(s + 1/2\pi i) = -\frac{1}{\pi} \int_{(\sigma)} \text{Re } f_*(\sigma) \text{th}(\sigma - s) d\sigma + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(\sigma)} \text{Re } f_*(\sigma + 1/2\pi i) \text{cth}(\sigma - s) d\sigma + \text{const} \quad (1.13)$$

$$f_*(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{(\sigma)} \text{Re } f_*(\sigma) \text{cth}(\sigma - \omega) d\sigma - \\ - \frac{1}{\pi i} \int_{(\sigma)} \text{Re } f_*(\sigma + 1/2\pi i) \text{th}(\sigma - \omega) d\sigma + i \text{const} \quad (1.14)$$

Заметим, что соотношение (1.14) в книге [7] на стр. 213 названо формулой Палагини, которая выписана там с ошибочным знаком в первом члене.

Вернемся к задаче. В случае, когда сток (источник) $A(z_0)$ (фиг. 1) находится на границе Γ_2 в точке C , приходим к задаче Д. А. Эфроса, И. Ф. Куранова в трактовке автора [5]. Комплексный потенциал в этом случае находится из системы уравнений [5]

$$\partial z / \partial \omega = a + b(\omega - i) \operatorname{th}^{1/2} \pi \omega, \quad \partial w / \partial \omega = -Ub \operatorname{th}^{1/2} \pi \omega \quad (0 \leq \operatorname{Im} \omega \leq 1) \quad (1.15)$$

Выражение $\partial z / \partial \omega$ (1.15) дополняем слагаемым $f_*(\omega)$ (1.10) при $f_2(\sigma) \equiv 0$. Выражение $\partial w / \partial \omega$ (1.15) записываем также в более общей форме. Тогда в принятых здесь обозначениях функции $f(\omega)$ и $F(\omega)$ в (1.9) для дальнейшего исследования берем в виде

$$f(\omega) = a + b(\omega - i/2 \pi i) \operatorname{th} \omega + \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} f_1(\sigma) \operatorname{cth}(\sigma - \omega) d\sigma \quad (1.16)$$

$$F(\omega) = A[\operatorname{cth}(\omega - \omega_0) + \operatorname{cth}(\omega - \bar{\omega}_0)] \quad (0 \leq \operatorname{Im} \omega_0 \leq 1/2\pi, \quad \omega \in D) \quad (1.17)$$

Действительную функцию $f_1(\sigma)$ (1.16) ищем из граничных условий задачи. При $\omega = s + i/2\pi$ из уравнений (1.9) и (1.16) находим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{ds} + i \frac{d\eta_2}{ds} &= a + bs \operatorname{cth} s + \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} f_1(\sigma) \operatorname{th}(\sigma - s) d\sigma \\ \frac{d\varphi_2}{ds} + i \frac{d\psi_2}{ds} &= A[\operatorname{th}(s - \omega_0) + \operatorname{th}(s - \bar{\omega}_0)] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отсюда следует: $d\eta_2/ds = 0$ и $d\psi_2/ds = 0$ ($-\infty < s < \infty$). Эти равенства говорят о том, что линия Γ_2 ($\eta_2 = h$) будет линией тока. Таким образом, граничное условие на линии Γ_2 удовлетворяется для рассматриваемого фильтрационного потока.

Вдоль линии Γ_1 имеем $\omega = s$ ($-\infty < s < \infty$), поэтому из уравнений (1.9) и (1.16) с учетом свойств функций $f_*(\omega)$ находим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} + i \frac{d\eta_1}{ds} &= a + b \left(s \operatorname{th} s - \frac{\pi i}{2} \operatorname{th} s \right) + \frac{i}{2} f_1(s) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} f_1(\sigma) \operatorname{cth}(\sigma - s) d\sigma \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{d\varphi_1}{ds} + i \frac{d\psi_1}{ds} = A[\operatorname{cth}(s - \omega_0) + \operatorname{cth}(s - \bar{\omega}_0)] \quad (\varphi_1 = \varphi^+, \quad \psi_1 = \psi^+)$$

Определяем действительную и мнимую части в равенстве (1.19), тогда получаем

$$\frac{d\xi_1}{ds} = a + bs \operatorname{th} s + \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} f_1(\sigma) \operatorname{cth}(\sigma - s) d\sigma \quad (1.20)$$

$$\frac{d\eta_1}{ds} = -\frac{\pi b}{2} \operatorname{th} s + \frac{1}{2} f_1(s)$$

$$d\varphi_1/ds = A[\operatorname{cth}(s - \omega_0) + \operatorname{cth}(s - \bar{\omega}_0)], \quad d\psi_1/ds = 0$$

Последнее уравнение в системе (1.20) говорит о том, что линия Γ_1 является линией тока, которая в параметрической форме определяется двумя первыми уравнениями системы (1.20). Из равенства (1.6) при $\varphi^+ = \varphi_1$,

$\eta(s) = \eta_1$ и $\varphi^- = \text{const}$ вытекает второе условие для $w(z)$ вдоль линии Γ_1

$$d\varphi_1 / ds = U d\eta_1 / ds \quad (1.21)$$

Подстановка второго и третьего выражений из (1.20) в равенство (1.21) дает уравнение функции $f_1(s)$

$$A[\text{cth}(s - \omega_0) + \text{cth}(s - \bar{\omega}_0)] + {}^{1/2}\pi b U \text{th } s = {}^{1/2}U f_1(s) \quad (1.22)$$

Функция $f_1(s)$ при $s \rightarrow \pm \infty$ должна обращаться в нуль, чтобы интеграл в равенстве (1.16) сходиллся, поэтому из выражения (1.22) находим зависимость

$$4A + \pi b U = 0 \quad (1.23)$$

Соотношения (1.22) и (1.23) приводят к выражению функции

$$f_1(s) = -{}^{1/2}\pi b [\text{cth}(s - \omega_0) + \text{cth}(s - \bar{\omega}_0) - 2 \text{th } s] \quad (1.24)$$

При помощи соотношения (1.24) уравнения (1.9), (1.15) приводим к виду

$$\partial z / \partial \omega = a + b(\omega - {}^{1/2}\pi i) \text{th } \omega - {}^{1/2}b S \quad (\omega \in D, \omega_0 \in D)$$

$$S = \int_{(\sigma)} [\text{cth}(\sigma - \omega_0) + \text{cth}(\sigma - \bar{\omega}_0) - 2 \text{th } \sigma] \text{cth}(\sigma - \omega) d\sigma \quad (1.25)$$

Интеграл S нетрудно вычислить; приводим результат

$$S = 4(\omega - {}^{1/2}\pi i) \text{th } \omega - 2(\omega - \omega_0) \text{cth}(\omega - \omega_0) - \\ - 2(\omega - \bar{\omega}_0 - \pi i) \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_0) \quad (1.26)$$

Уравнение (1.25) после подстановки выражения (1.26), вместе с (1.9), (1.7) дает искомую систему уравнений фундаментального решения частной задачи о фильтрационном потоке в области D^+ (фиг. 1)

$$\partial z / \partial \omega = a + {}^{1/2}b(\omega - \omega_0) \text{cth}(\omega - \omega_0) + {}^{1/2}b(\omega - \bar{\omega}_0 - \pi i) \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_0) \\ \partial w / \partial \omega = A[\text{cth}(\omega - \omega_0) + \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_0)] \quad (A = -{}^{1/4}\pi b U) \quad (1.27)$$

Из первого уравнения системы (1.27) при $\omega = s$ ($-\infty < s < \infty$) и $z = \zeta_1(s)$ (1.2) получаем дифференциальные уравнения границы раздела жидкостей Γ_1

$$d\zeta_1 / ds = a + {}^{1/2}b(s - \omega_0) \text{cth}(s - \omega_0) + {}^{1/2}b(s - \bar{\omega}_0) \text{cth}(s - \bar{\omega}_0) + \\ + {}^{1/2}\pi b \text{Im } \text{cth}(s - \omega_0) \\ d\eta_1 / ds = -{}^{1/4}\pi b [\text{cth}(s - \omega_0) + \text{cth}(s - \bar{\omega}_0)] \quad (1.28)$$

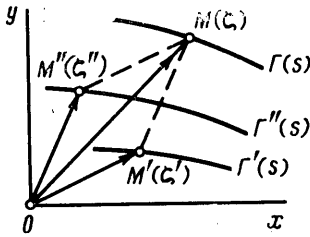
Дальнейшее решение этой задачи сводится к установлению соотношений, которыми определяются вспомогательные параметры A , a , b и ω_0 . Прежде всего, имеем зависимость между A и b в виде равенства (1.23). Далее при построении конформного отображения согласно уравнению (1.8) необходимо учесть два геометрических условия

$$z(\omega) \Big|_0^{1/2\pi i} = ih, \quad z(\omega) \Big|_0^{\omega_0} = ih_0 = z_0 \quad (1.29)$$

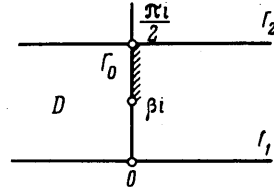
Четвертое условие получаем из выражения перепада давления $\Delta p = p_B - p_A$ между точкой $B \in \Gamma_1$ и круговым контуром $|z - z_0| = r_0$, проведенным в окрестности стока $A(z_0)$. Вывод соответствующих зависимостей здесь не приводится. Процедура этого вывода в аналогичных задачах подробно рассматривается в книге автора [6].

2. Векторная аддитивность частных решений. Решение задачи, которая рассмотрена в предыдущем пункте, получено без использования нелинейного условия Б. Б. Девисона [1] для скорости фильтрации на границе Γ_1 раздела жидкостей. Это решение основано лишь на линейных соотношениях, которым должны удовлетворять искомые функции. Решение частной задачи в принятой здесь трактовке обладает свойством векторной аддитивности, при которой возможна суперпозиция частных решений.

Сущность этого свойства состоит в следующем. Если в области $D (0 \leq \text{Im } \omega \leq 1/2\pi)$ плоскости комплексного переменного ω определены два решения $R_1(A_1, a_1, b_1, \omega_1)$ и $R_2(A_2, a_2, b_2, \omega_2)$ в зависимости от общего параметра $\omega: z = z_1(\omega), w = w_1(\omega)$ и $z = z_2(\omega), w = w_2(\omega)$, то в той же области существует результирующее решение $R: z = z_1(\omega) + z_2(\omega), w = w_1(\omega) + w_2(\omega)$. Пусть решениям R_1 и R_2 на плоскости z отвечают соответственно области D_1^+ и D_2^+ , уравнения границ которых $\zeta' = z_1(s)$ и $\zeta'' = z_2(s)$; тогда результирующему решению R отвечает область D^+ , граница которой определена уравнением $\zeta = \zeta' + \zeta''$ (фиг. 4). В области D^+ решение R имеет источниковые особенности в точках ω_1 и ω_2 .



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассматриваем более общую задачу, в которой в области фильтрации $D^+(z)$ имеется не один, а несколько стоков (источников), находящихся в точках z_1, z_2, \dots, z_n . Этим стокам отвечают некоторые точки $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ в области $D(\omega)$. Фильтрационный поток вместо уравнений (1.27) теперь описывается системой

$$\frac{dz}{d\omega} = a + \frac{1}{9} \sum_{(j)} b_j [(\omega - \omega_j) \text{cth}(\omega - \omega_j) + (\omega - \bar{\omega}_j - \pi i) \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_j)]$$

$$\frac{dw}{d\omega} = -\frac{\pi U}{4} \sum_{(j)} b_j [\text{cth}(\omega - \omega_j) + \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_j)] \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

Пусть на изображающей плоскости ω в области $D (0 \leq \text{Im } \omega \leq 1/2\pi)$ точки $M(\omega_0) \in \Gamma_0$ (фиг. 5) представляют собой элементарные стоки макротрещины AC в области D^+ плоскости z (фиг. 6). Определение макротрещины тонкого пласта дано в [6]. Фильтрационный поток к макротрещине пласта в области D^+ (фиг. 6) описываем системой уравнений, аналогичной системе (2.1)

$$\frac{dz}{d\omega} = a + \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} b(\sigma) [(\omega - \omega_0) \text{cth}(\omega - \omega_0) + (\omega - \bar{\omega}_0 - \pi i) \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_0)] d\sigma$$

$$\frac{dw}{d\omega} = -\frac{\pi U}{4} \int_{(\sigma)} b(\sigma) [\text{cth}(\omega - \omega_0) + \text{cth}(\omega - \bar{\omega}_0)] d\sigma$$

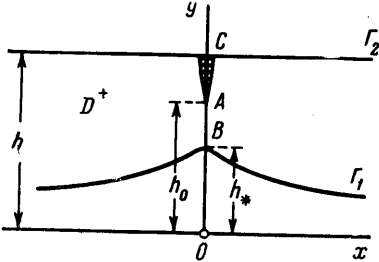
$$(\omega_0(\sigma) \in \Gamma_0, \omega \in D) \quad (2.2)$$

Здесь σ — некоторый действительный параметр, ω_0 — комплексная координата точки $M(\omega_0) \in \Gamma_0$, величина U определена по формуле (1.7).

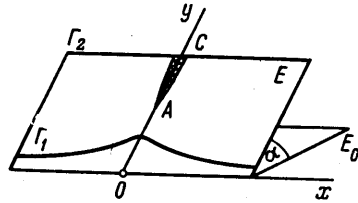
Уравнения (2.1) и (2.2) представляют фундаментальное решение, соответствующее общей задаче об установившемся фильтрационном потоке жидкости к конечной системе стоков в области $D^+(z)$ или к некоторой дренирующей макротрещине Γ_0 в области $D^+(z)$, границами которой является, во-первых, прямолинейная горизонтальная линия Γ_2 — непроницаемая граница тонкого пласта, наклоненного под углом α , и, во-вторых, свободная граница Γ_1 раздела жидкостей, из которых нижняя — неподвижная, а верхняя более легкая жидкость фильтруется к трещине Γ_0 .

Рассмотрим одно приложение системы уравнений (2.2).

3. Поток пластовой жидкости через вертикальный разлом мощного пласта при наличии подошвенной границы раздела жидкостей. Пусть тонкий слой E наклонен под углом α к горизонтальной плоскости E_0 (фиг. 6, 7). Верхняя непроницаемая гра-



Фиг. 6



Фиг. 7

ница пласта представлена в виде горизонтальной прямой Γ_2 . Ниже линии сброса Γ_2 в области $D = D^- + D^+$ пласт насыщен двумя жидкостями, образующими свободную границу Γ_1 . В области D^- находится неподвижная весомая жидкость, объемный вес которой равен γ_1 , вязкость μ_1 , проницаемость среды k_1 . В области D^+ фильтруется более легкая жидкость с объемным весом $\gamma_2 < \gamma_1$, с вязкостью μ_2 и проницаемостью среды k_2 . При $\alpha = 1/2\pi$ слой E изображает вертикальный разрез мощного пласта.

Отбор жидкости из пласта происходит через вертикальную трещину AC , представляющую собой вертикальный разлом мощного пласта. О трещине известно, что ее раскрытие достаточно мало меняется вдоль оси, причем плотность расхода пластовой жидкости вдоль оси трещины известна в виде некоторой функции от координаты рассматриваемого поперечного сечения трещины. Между фиксированной точкой профиля трещины AC и фиксированной точкой линии Γ_1 , например между точками A и B , поддерживается определенный перепад давления $\Delta p = p_B - p_A$. Ставится вопрос о форме Γ_1 границы раздела жидкостей и о форме профиля макротрещины AC (фиг. 7). В решении задачи используем основные положения гидромеханики однородной жидкости в макротрещиноватом тонком пласте [9].

Задача сводится к построению комплексного потенциала $w(z)$ в области D^+ , где фильтруется более легкая жидкость (нефть), скользящая по неподвижной жидкости (вода). На линии сброса Γ_2 («кровля» мощного пласта) и на границе раздела жидкостей Γ_1 поток с комплексным потенциалом $w(z)$ должен удовлетворять тем же условиям, которые были рассмотрены при выводе формул (2.2).

Вдоль оси Γ_0 трещины AC в соответствии с общей теорией притока однородной жидкости к макротрещине имеем [9]

$$\delta \frac{d}{ds} \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2} = (\psi^+ - \psi^-) \frac{d\eta_0}{ds} \quad \left(\delta = \frac{k_0}{k} d \right) \quad (3.1)$$

Здесь δ означает эффективное раскрытие трещины; $k_0 = \text{const}$ — проницаемость заполнителя трещины; $k = \text{const}$ — проницаемость окрестной пористой среды; $d = d(s)$ — фактическое раскрытие макротрещины, определяемое в сечении $M(s) \in \Gamma_0$; η_0 — ордината сечения $M(s)$ трещины AC в области D^+ ; φ^\pm — предельные значения потенциала фильтрации ϕ слева и справа от точки $M(s) \in \Gamma_0$ при обходе оси Γ_0 трещины AC от начала A к концу C ; ψ^\pm — предельные значения функции тока ψ справа и слева от точки $M(s) \in \Gamma_0$.

Решение задачи ищем в виде уравнений (2.2). Очевидно, такая форма решения удовлетворяет требованиям, которым должен удовлетворять поток на линиях Γ_1 и Γ_2 ; это вытекает из теоремы, рассмотренной в предыдущем пункте.

Действительную функцию $b(\sigma)$ в системе (2.2) находим из условия (3.1). Для этого необходимо иметь выражения предельных значений равенств (2.2), когда $\omega \rightarrow$

→ $\omega^\pm(s) \in \Gamma_0$. Уравнение Γ_0 оси разлома AC представляем в очевидной записи

$$z|_{\omega=i_s} = \zeta_0 = i\eta_0(s) \quad (\beta \leq s \leq 1/2\pi) \quad (3.2)$$

при этом имеем

$$[dz/d\omega]_{\omega=i_s} = d\eta_0(s)/ds \quad (3.3)$$

Предельное значение в первом равенстве (2.2) находится легко, в результате имеем уравнение прямолинейного отрезка AC (ось трещины) (фиг. 6).

$$\frac{d\eta_0}{ds} = a + \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} b(\sigma)[(\sigma-s)\operatorname{ctg}(\sigma-s) + (\sigma+s-\pi)\operatorname{ctg}(\sigma+s)] d\sigma \quad (3.4)$$

$$(\eta_0(\beta) = h_0)$$

Интеграл, стоящий в правой части второго равенства (2.2), содержит сингулярную особенность, поэтому для вычисления его предельных значений используем формулы Ю. В. Сохоцкого [7]

$$-i \frac{d\varphi^\pm}{ds} + \frac{d\psi^\pm}{ds} = \pm \frac{\pi^2 U}{4} b(s) - i \frac{\pi U}{4} \int_{(\sigma)} b(\sigma)[\operatorname{ctg}(\sigma-s) - \operatorname{ctg}(\sigma+s)] d\sigma \quad (3.5)$$

Отсюда следуют выражения:

$$\frac{d}{ds} \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2} = \frac{\pi U}{4} \int_{(\sigma)} b(\sigma)[\operatorname{ctg}(\sigma-s) - \operatorname{ctg}(\sigma+s)] d\sigma \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{ds} (\psi^+ - \psi^-) = 1/2 \pi^2 U b(s) \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) интегрируем при условии $[\psi^+ - \psi^-]_{s=\beta} = 0$; этим требованием фиксируется нулевой расход пластовой жидкости в начале (острие в точке A) макротрещины AC . В результате находим расход пластовой жидкости в сечении $M(s)$

$$q_M = \psi^+ - \psi^- = 1/2 \pi^2 U \int_{\beta}^s b(\sigma) d\sigma \quad (\beta \leq s \leq 1/2\pi) \quad (3.8)$$

Подстановка выражений (3.4), (3.6) и (3.7) в равенство (3.1) приводит к соотношению

$$\delta(s) \int_{\beta}^{1/2\pi} b(\sigma)[\operatorname{ctg}(\sigma-s) - \operatorname{ctg}(\sigma+s)] d\sigma =$$

$$= 2\pi \int_{\beta}^s b(\sigma) d\sigma \left\{ a + \frac{1}{2} \int_{\beta}^{1/2\pi} b(\sigma)[(\sigma-s)\operatorname{ctg}(\sigma-s) + (\sigma+s-\pi)\operatorname{ctg}(\sigma+s)] d\sigma \right\}$$

$$\left(\delta(s) = \frac{k_0}{k} d \right) \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) устанавливает зависимость между эффективным раскрытием $\delta(s)$ макротрещины AC , функцией $b(\sigma)$, представляющей плотность расхода пластовой жидкости в сечении $M(\sigma) \in \Gamma_0$ и параметром a . Если в самой трещине вдоль ее оси пластовая жидкость течет ламинарно, то величина $\delta(s)$ может быть представлена в виде [8]

$$\delta(s) = 1/12 d^3 / k, \quad d = d(s) \quad (\beta \leq s < 1/2\pi) \quad (3.11)$$

Здесь необходимо помнить соответствие размерностей. Если размерность δ и d взята в m , а размерность проницаемости k в дарси , то в формуле (3.11) учитывается переводной множитель $1 \text{ дарси} = 1.02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ [8].

В дальнейшем предполагаем, что фактическое раскрытие трещины d не превышает некоторую величину d_0 , так что имеем $d \leq d_0$, в то же время проницаемость k_0 заполнителя трещины, вообще говоря, может увеличиваться произвольно. Из этих соображений вытекает, что эффективное раскрытие $\delta = (k_0/k)d$ ($d \leq d_0$) в некоторых сечениях трещины AC может принимать неограниченные значения при достижении конечного значения величины фактического раскрытия трещины ($d = d_0$).

Рассмотрим простейший случай задачи, когда $b = \text{const}$ (s). Уравнения (3.8), (3.9) дают зависимости

$$q_m = \frac{1}{2}\pi^2 U b (s - \beta) \quad (\beta \leq s \leq \frac{1}{2}\pi) \quad \text{при } U = (k_2 / \mu_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \sin \alpha$$

$$\frac{d^3}{12k} \ln \frac{\sin(s + \beta)}{\sin(s - \beta)} = G(s) = \quad (0 \leq d \leq d_0, \quad \beta \leq s \leq \frac{1}{2}\pi - \theta) \quad (3.12)$$

$$= 2\pi(s - \beta) \left\{ a + \frac{b}{2} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} [(\sigma - s) \text{ctg}(\sigma - s) + (\sigma + s - \pi) \text{ctg}(\sigma + s)] d\sigma \right\} \quad (3.13)$$

$$\frac{k_0}{k} d_0 \ln \frac{\sin(s + \beta)}{\sin(s - \beta)} = G(s) \quad (\frac{1}{2}\pi - \theta < s < \frac{1}{2}\pi) \quad (3.14)$$

Число θ соответствует максимальному раскрытию d_0 трещины AC в окрестности ее устья (окрестность точки C). Соотношение (3.13) при $s = \frac{1}{2}\pi - \theta$ и $d = d_0$ имеет вид

$$\frac{d_0^3}{12k} \ln \frac{1 + \text{tg} \theta \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \theta \text{tg} \beta} = \quad (3.15)$$

$$= 2\pi(\frac{1}{2}\pi - \beta - \theta) \left\{ a + \frac{b}{2} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} [(\frac{1}{2}\pi - \sigma - \theta) \text{tg}(\sigma + \theta) + (\frac{1}{2}\pi - \sigma + \theta) \text{tg}(\sigma - \theta)] d\sigma \right\}$$

Число θ по предположению мало, вместе с ним мало и произведение $\text{tg} \theta \text{tg} \beta$, поэтому соотношение (3.15) заменяем приближенным выражением

$$\frac{d_0^3}{12k} \theta \text{tg} \beta = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \left\{ a + b \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma \right) \text{tg} \sigma d\sigma \right\} \quad (3.16)$$

Найдем полную систему уравнений для параметров a , b , β , через которые выражается решение рассматриваемой простейшей задачи. Одно уравнение уже найдено в виде (3.15) или в виде приближенного выражения (3.16). Число θ выбирается произвольно малым, оно определяет границу M_0 ($s = \frac{1}{2}\pi - \theta$) перехода ламинарного потока в трещине AC в неламинарный поток. В точке $M_0 \in \Gamma_0$ фактическое раскрытие трещины достигает наибольшего значения d_0 , которое предполагается заданным.

Аналогично соотношениям (1.29), путем интегрирования уравнения (3.4) в интервалах $(0, \beta)$ и $(0, \frac{1}{2}\pi)$ по аргументу s находим еще два уравнения, связанных между собой величиной глубины трещины

$$h_0 = \beta a + \frac{b}{2} \int_0^{\beta} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} [(\sigma - s) \text{ctg}(\sigma - s) + (\sigma + s - \pi) \text{ctg}(\sigma + s)] d\sigma ds \quad (3.17)$$

$$h = \frac{1}{2}\pi a + \frac{b}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} [(\sigma - s) \text{ctg}(\sigma - s) + (\sigma + s - \pi) \text{ctg}(\sigma + s)] d\sigma ds \quad (3.18)$$

Величины h_0 и h представляют собой длины отрезков OA и OC (фиг. 7). Глубина трещины AC предполагается известной и, очевидно, равной $H = h - h_0$. Из системы (3.17) и (3.18) получаем выражение глубины H

$$H = (\frac{1}{2}\pi - \beta) a + \frac{b}{2} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} [(\sigma - s) \text{ctg}(\sigma - s) + (\sigma + s - \pi) \text{ctg}(\sigma + s)] d\sigma ds \quad (3.19)$$

В системе трех уравнений (3.17)–(3.19) два уравнения независимы. Третье недостающее уравнение для определения параметров a , b и β получаем в результате интегрирования выражения $dw/d\omega$ (2.2) по переменной ω на отрезке BA при $B(\omega = 0)$, $A(\omega = i\beta)$ и любом a

$$\frac{k_2}{\mu_2} (p_B - p_A - \nu_2 H_0 \sin \alpha) = \frac{\pi U b}{4} \int_{\beta}^{\frac{1}{2}\pi} \ln \frac{1 - \cos 2\sigma}{\cos 2\beta - \cos 2\sigma} d\sigma (H_0 = h_0 - h_*) \quad (3.20)$$

Параметры a , b и β определяем из системы уравнений (3.18), (3.19) и (3.20). Расход пластовой жидкости в трещине AC на ее устье в сечении C определяем по формуле (3.12) при $s = 1/2\pi$

$$q_c = 1/2\pi^2 U b (1/2\pi - \beta) \quad (3.21)$$

Зададимся малым числом θ , тогда по формуле (3.16) находим d_0 . Далее по уравнению (3.13) вычисляем профиль трещины AC вдоль оси Γ_0 от точки A (острие трещины до точки $M_0(s = 1/2\pi - \theta)$, в которой ламинарный поток переходит в неламинарный).

Фактическое раскрытие $d = d(s)$ трещины AC в сечении $M(s) \in \Gamma_0$ находится на уровне, определяемом ординатой $\eta_0 = \eta_0(s)$ из уравнения (3.4).

Линия Γ_1 — граница раздела жидкостей — определяется из первого уравнения (2.2) при $z = \zeta_1(s) = \xi_1(s) + i\eta_1(s)$ и $\omega = s$ ($-\infty < s < \infty$)

$$\frac{d\zeta_1}{ds} = a + \frac{b}{2} \int_{\beta}^{1/2\pi} [(s - i\sigma)\text{cth}(s - i\sigma) + (s + i\sigma - i\pi)\text{cth}(s + i\sigma)] d\sigma \quad (3.22)$$

В координатной форме параметрическую систему дифференциальных уравнений линии Γ_1 получаем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= a + b \operatorname{Re} \int_{\beta}^{1/2\pi} (s + i\sigma)\text{cth}(s + i\sigma) d\sigma + \frac{\pi b}{2} \operatorname{Im} \int_{\beta}^{1/2\pi} \text{cth}(s + i\sigma) d\sigma \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= -\frac{\pi b}{2} \operatorname{Re} \int_{\beta}^{1/2\pi} \text{cth}(s + i\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (3.23)$$

Систему уравнений (3.23) интегрируем при начальных условиях

$$\xi_1(0) = 0, \quad \eta_1(0) = h_* \quad (3.24)$$

Выполняем очевидные действия в равенствах (3.23), в результате получаем

$$\frac{d\xi_1}{ds} = a + b \int_{\beta}^{1/2\pi} \frac{s \operatorname{sh} 2\sigma + \sigma \sin 2\sigma}{\operatorname{ch} 2\sigma - \cos 2\sigma} d\sigma - \frac{\pi b}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} 2s + 1}{\operatorname{ch} 2\sigma - \cos 2\sigma} \quad (3.25)$$

$$\eta_1 - h_* = -\frac{\pi b}{4} \int_{\beta}^{1/2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} 2\sigma - \cos 2\sigma}{1 - \cos 2\sigma} d\sigma \quad (3.26)$$

Рассмотренная здесь задача допускает очевидную интерпретацию в случае, когда $\alpha < 0$ и $\gamma_1 > \gamma_2$. В этом случае линия сброса пласта лежит ниже границы раздела жидкостей Γ_1 . Вертикальный разлом пласта в виде макротрещины AC теперь идет вверх по восстанию пласта от нижнего горизонтального сброса Γ_2 в сторону верхней границы раздела Γ_1 жидкостей.

Результат данного пункта можно рассматривать как решение простейшей задачи вулканических образований земной коры, которые могут моделироваться гидродинамическим путем: вертикальный разлом пласта можно трактовать как вертикальный разрез кратера вулкана, а линию Γ_1 как границу подстилающей «магмы».

Поступило 9 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Девисон Б. Б. Движение грунтовых вод. В сб.: «Некоторые новые вопросы механики сплошной среды», М., Изд-во АН СССР, 1938.
2. Козлов В. С. Расчет дренажных сооружений. М., Стройиздат, 1940.
3. Хомовская Е. Д. Гидромеханическое решение задачи о притоке грунтовых вод к водосборной трубе при наличии весьма мощного водопроницаемого слоя. Тр. Гос. гидрологического ин-та, 1937, вып. 5.
4. Эфрос Д. А., Куранов И. Ф. Плоская задача о поднятии подошвенной воды. Тр. ВНИИнефть, 1954, вып. 6.
5. Борисов Ю. П., Пилатовский В. П., Табаков В. П. Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. М., «Недра», 1964.
6. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.