

О ПЕРЕХОДЕ СЛОЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ВО ВЗВЕШЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Ю. П. ГУПАЛО, Г. П. ЧЕРЕПАНОВ

(Москва)

Переход слоя твердых частиц во взвешенное состояние при фильтрации жидкости или газа происходит, как известно, при некоторых критических значениях параметров режима фильтрации. Определение этих критических значений и характера перехода представляет интерес в связи с развитием техники псевдооживления в ряде отраслей промышленности, а также в связи с некоторыми другими вопросами, из которых укажем, например, на задачу о взвешивании песчаной пробки в нефтяной скважине.

Ранее была рассмотрена плоская задача псевдооживления [1] как задача о предельном равновесии среды, не выдерживающей сколь угодно малых растягивающих напряжений. Такая модель хорошо описывает поведение многих типов сыпучих сред, встречающихся на практике. Вместе с тем ряд случаев лежит за рамками этой модели из-за наличия сил сцепления между частицами. Сцепление может быть обусловлено силами адгезии, проявляющимися при псевдооживлении тонких порошков [2, 3], а также магнитными и электростатическими силами [3, 4]. Другим примером может служить явление слипания частиц при псевдооживлении газами и впрыскивании небольших количеств капельной жидкости [5] или при взвешивании песчаной пробки в нефтяной скважине, когда частицы песка окружены тонкими пленками нефти.

В предлагаемой работе в развитие результатов, полученных ранее [1], задача о переходе слоя во взвешенное состояние рассматривается с учетом сил сцепления между частицами. Исследуются плоская и осесимметричная задачи.

1. Плоская задача. В качестве модели сыпучей среды, частицы которой испытывают действие сил сцепления, возьмем модель среды, не выдерживающей растягивающих напряжений, сколь угодно мало превышающих некоторое критическое значение σ_s , которое предполагается постоянным для всей среды и известным, например, из опыта. Величина σ_s характеризует силы сцепления между частицами сыпучей среды; в частности, при $\sigma_s = 0$ приходим к среде, не выдерживающей растягивающих напряжений [1]. Потребуем, чтобы наибольшее главное напряжение в каждой точке среды, находящейся в состоянии предельного равновесия, было равно σ_s .

Если в соответствующей задаче теории упругости возникает некоторая область Φ , в которой одно главное нормальное напряжение превышает критическое значение σ_s , а другое меньше σ_s , то, очевидно, рассматриваемая среда может находиться где-то в окрестности области Φ . В области, где все напряжения меньше критического, поведение сыпучей среды ничем не отличается от поведения обычного упругого тела, если только не превышено условие сухого кулонова трения $\tau_{nt} \leq K + \sigma_n \operatorname{tg} \delta$ (τ_{nt} , σ_n — касательное и нормальное напряжение на любой элементарной площадке, K и δ — коэффициент сцепления и угол внутреннего трения), а область, где все напряжения превышают σ_s , недостижима.

Таким образом, использованию предлагаемой модели, строго говоря, должен предшествовать чисто упругий анализ напряжений. Впрочем, иногда он не необходим, так как требуемые свойства полей напряжений могут быть выяснены из элементарных механических представлений, аналогичных, например, тем, которые приводятся ниже.

Условие $\sigma_{\max} = \sigma_s$ вместе с уравнениями равновесия сыпучего тела приводит к следующей квазилинейной системе уравнений относительно компонентов напряжения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = b \quad (1.1)$$

$$(\sigma_s - \sigma_x)(\sigma_s - \sigma_y) = \tau_{xy}^2$$

Здесь $a = a(x, y)$ и $b = b(x, y)$ — составляющие вектора объемной силы Q по направлениям x и y , взятые с обратным знаком. Объемная сила равна

$$Q = \rho^* F^* - \text{grad } p \quad (a = -Q_x, b = -Q_y) \quad (1.2)$$

Здесь ρ^* — плотность двухфазной системы «сыпучее тело плюс жидкость»; F^* — внешняя массовая сила, действующая на насыщенное жидкостью сыпучее тело; p — давление в жидкости, определяемое из решения соответствующей фильтрационной задачи.

Заметим, что при $\sigma_s = 0$ задача сводится к рассмотренной ранее [1].

В частном случае $a = b = 0$ система (1.1) была исследована В. В. Соколовским [6]. Свойства рассматриваемой системы (1.1) при $a \neq 0, b \neq 0$ существенно отличаются от свойств ее при $a = b = 0$. Например, при $a \neq 0, b \neq 0$ семейство характеристик вполне определяется системой (значениями a и b), а при $a = b = 0$ семейство характеристик определяется граничными условиями. Способ исследования, применяемый в данной работе, аналогичен методу, использованному в статье [7].

Представим напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в виде

$$\sigma_x = \sigma_s - \alpha^2(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_s - \beta^2(x, y), \quad \tau_{xy} = -\alpha(x, y)\beta(x, y) \quad (1.3)$$

Тогда последнее уравнение системы (1.1) будет выполняться тождественно и дальнейший анализ системы вполне аналогичен проведенному в [1] для случая $\sigma_s = 0$. Приведем поэтому лишь конечные результаты.

Система (1.1) принадлежит параболическому типу и имеет одно семейство характеристик $ady = \beta dx$, физический смысл которых состоит в том, что характеристика является линией, на которой нормальное напряжение равно своему максимальному значению, т. е. σ_s , а касательное напряжение равно нулю.

В уравнениях равновесия удобно перейти к ортогональным криволинейным координатам $\xi\eta$, где ξ — длина дуги характеристики $\eta = \text{const}$. Пусть $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ — составляющие напряжения в системе координат $\xi\eta$. Тогда на характеристиках будет $\sigma_\eta = \sigma_s, \tau_{\xi\eta} = 0$ и из одного уравнения равновесия получаются следующие уравнения для определения семейства характеристик в виде $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad (1.4)$$

Если семейство характеристик задать в виде $y = y(x, \eta)$, то получается простое уравнение

$$dy/dx = b/a \quad \text{вдоль } \eta = \text{const} \quad (1.5)$$

В результате интегрирования другого уравнения равновесия получается выражение для единственного неизвестного напряжения σ_ξ (1.6)

$$\sigma_\xi = \frac{1}{\sqrt{R(\xi, \eta)}} \left[A(\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{(a^2 + b^2)R(\xi, \eta)} d\xi \right], \quad R(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$$

Здесь $A(\eta)$ — произвольная функция, определяемая из граничных условий; семейство характеристик задается в виде $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. При задании семейства характеристик в виде $y = y(x, \eta)$ имеем

$$\sigma_{\xi} = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2} \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^{-1} \left[A(\eta) + \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{a^2 + b^2} \frac{dy}{d\eta}} dx \right] \quad (1.7)$$

или

$$\sigma_{\xi} = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2} \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^{-1} \left[A(\eta) + \int_{y_0}^y \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} \frac{dy}{d\eta} dy \right] \quad (1.8)$$

Условию начала перехода слоя во взвешенное состояние соответствует выполнение равенства $\sigma_{\xi} = \sigma_s$ в некоторой внутренней точке сыпучей среды. Для определения скоростей среды в предельном состоянии естественно применить ассоциированный закон теории пластичности. Вопрос о скоростях, а также вопросы постановки корректной краевой задачи и граничных условий на твердых стенках рассматриваются совершенно так же, как в работе [1]. Рассмотрим несколько примеров.

1.1° Пусть сыпучая среда заключена между плоскими вертикальными стенками. Направим ось x прямоугольной декартовой системы координат по нормали к стенке, ось y — противоположно направлению силы тяжести. Пусть сыпучая среда занимает область $0 \leq y \leq H$. Жидкость подается снизу через поверхность $y = 0$, непроницаемую для твердых частиц, равномерно по всему сечению. В данном случае $a = 0$, $b = \partial p / \partial y + \rho^* g$ и характеристики представляют собой прямые $x = \text{const}$, поэтому $\sigma_x = \sigma_s$, $\tau_{xy} = 0$. Из второго уравнения (1.1), используя условие $\sigma_y = 0$ на свободной поверхности $y = H$, для однородной сыпучей среды, т. е. для случая когда плотность ρ^* , $\partial p / \partial y = \text{const}$, имеем

$$\sigma_y = - \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho^* g \right) (H - y)$$

Видно, что значение $\sigma_y = \sigma_s \neq 0$ впервые достигается при $y = 0$, т. е. на нижней границе слоя, в отличие от случая $\sigma_s = 0$, когда максимальное напряжение достигалось одновременно по всему объему слоя [1]. Таким образом, условие перехода слоя во взвешенное состояние

$$- \partial p / \partial y = \rho^* g + \sigma_s / H \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, в частности, что величина σ_s представляет собой разность между полным перепадом давления в слое сыпучей среды и весом слоя, приходящимся на единицу площади поперечного сечения, в момент начала перехода слоя во взвешенное состояние. Между прочим, отсюда вытекает простой способ экспериментального определения величины σ_s .

1.2°. Рассмотрим теперь случай псевдооживления вращающегося слоя (ось вращения нормальна к плоскости течения). Сыпучая среда расположена кольцевым слоем $r_0 \leq r \leq R$ на внутренней поверхности кругового цилиндра радиусом R , вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Жидкость подается равномерно через пористую поверхность цилиндра, непроницаемую для твердых частиц, и движется радиально к оси вращения. В полярной системе координат $r\phi$ характеристиками являются прямые $\phi = \text{const}$ и из (1.6) получается выражение [1]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \int_{r_0}^r \left[\frac{\mu}{k} \frac{q}{2\pi} - (1 - \varepsilon) (\rho' - \rho) \omega^2 r^2 \right] dr \quad (1.10)$$

Здесь μ — коэффициент динамической вязкости жидкости, ρ и ρ' — плотность жидкости и твердых частиц, q — расход жидкости, ε — пористость слоя, k — коэффициент фильтрации. Для определенности рассматривается линейный закон фильтрации. Другие случаи могут быть рассмотрены аналогичным образом.

Из (1.10) следует, что с увеличением расхода условие $\sigma_r = \sigma_s$ впервые достигается при некотором значении $r = r_*(\sigma_s)$, причем $r_*(\sigma_s) = r_1$ при $r_0 \leq r_1 < R$,

$r_*(\sigma_s) = R$ при $r_1 \geq R$, где r_1 — действительный корень уравнения

$$r_0 \sigma_s - \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)\omega^2(2r + r_0)(r - r_0)^2 = 0$$

Минимальный расход q_* , соответствующий началу перехода слоя во взвешенное состояние, определяется как

$$q_* = \frac{2\pi k}{\mu} \left[\frac{r_*}{r_* - r_0} \sigma_s + \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)\omega^2(r_*^2 + r_* r_0 + r_0^2) \right] \quad (1.11)$$

Заметим, что в обоих рассмотренных примерах наличие сил сцепления приводит не только к повышению минимального критического расхода q_* , но и к изменению расположения критического участка в слое сыпучей среды, где впервые происходит разрушение сыпучего тела.

1.3°. Рассмотрим неоднородную задачу. Пусть сыпучая среда заключена между расходящимися кверху плоскими стенками, составляющими угол $\frac{1}{2}\kappa$ с вертикалью, ограничена снизу проницаемой для жидкости и непроницаемой для частиц цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = r_0^2$, верхняя, свободная поверхность также цилиндрическая $x^2 + y^2 = R^2$. Жидкость равномерно подается снизу.

Семейство характеристик и поле напряжений для этой задачи были исследованы ранее [4]. В частности, на линии симметрии $x = 0$, где впервые следует ожидать достижения критического состояния

$$\sigma_z = \left[\frac{\mu q}{k\kappa} \frac{1}{y} - (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g \right] (R - y) \quad (1.12)$$

Из (1.12) вытекает, что значение $\sigma_z = \sigma_s$ впервые достигается при $y = r_0$, т. е., как и в случае $\sigma_s = 0$ [4], на нижней поверхности слоя. Соответствующий минимальный расход равен

$$q_* = \frac{k\kappa r_0}{\mu} \left[(1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g + \frac{\sigma_s}{R - r_0} \right] \quad (1.13)$$

1.4°. Рассматривая аналогичным образом случай псевдооживления слоя в аппарате с суживающимся кверху сечением, когда верхняя, свободная поверхность и нижняя, проницаемая лишь для жидкости, определяются уравнениями $x^2 + y^2 = r_0^2$ и $x^2 + y^2 = R^2$ соответственно, для напряжения вдоль характеристики $x = 0$ имеем [4]

$$\sigma_z = \left[\frac{\mu q}{k\kappa} \frac{1}{y} - (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g \right] (y - r_0) \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что условие $\sigma_z = \sigma_s$ впервые достигается при $y = y_*(\sigma_s)$, где

$$y_*(\sigma_s) = \min \left\{ r_0 + \left[\frac{r_0 \sigma_s}{(1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g} \right]^{1/2}, R \right\} \quad (1.15)$$

Соответствующий минимальный расход равен

$$q_* = \frac{k\kappa}{\mu} y_* \left[(1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g + \frac{\sigma_s}{y_* - r_0} \right] \quad (1.16)$$

В отличие от случая $\sigma_s = 0$ переход во взвешенное состояние происходит не путем постепенного «разъедания» свободной поверхности, а начинается внутри слоя или на его нижней границе.

2. Осесимметричная задача. Как в случае плоской задачи [4], рассмотрим переход во взвешенное состояние сыпучей среды, занимающей некоторую область D , в которой имеется резервуар D_+ жидкости или газа (фиг. 1). Граница C_+ представляет собой жесткую перегородку с отверстиями, непроницаемую для твердых частиц. При увеличении давления в резервуаре D_+ происходит фильтрация жидкости сквозь сыпучее тело в область D_- , заполненную жидкостью при меньшем давлении. Считаем, что задача осесимметрична (ось симметрии — ось z цилиндрической системы координат r, z, φ). Поэтому все величины, участвующие в формулировке задачи (граничные условия, форма границы, объемные силы), не должны зависеть от угла φ . При

некоторых критических значениях перепада давления происходит разрушение сыпучего тела и слой начинает переходить во взвешенное состояние.

В качестве модели сыпучей среды опять возьмем среду, не выдерживающую растягивающих напряжений, больших σ_s , где σ_s — некоторая характеристика материала, ответственная за силы сцепления между отдельными частицами. В трехмерном случае напряжения в каждой точке области тела, находящейся в предельном равновесии, должны принадлежать сингулярной поверхности, которая в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ состоит из кусков плоскостей $\sigma_i = \sigma_s$ ($i = 1, 2, 3$), отсекаемых поверхностью сухого (кулонова) трения плюс соответствующая область последней поверхности. Сухое трение, очевидно, будет иметь место лишь при $\sigma_i \leq \sigma_s$ ($i = 1, 2, 3$). В задачах псевдооживления разрушение исходной структуры среды обычно происходит под воздействием растягивающих напряжений; поэтому наибольший интерес представляет изучение предельного состояния среды, реализующегося на гранях $\sigma_i = \sigma_s$ ($i = 1, 2, 3$) сингулярной поверхности.

Определяющие уравнения задачи составляются при помощи ассоциированного закона течения. Пусть, например, реализуется состояние, отвечающее предельному условию $\sigma_1 = \sigma_s$. Тогда к двум уравнениям равновесия и к этому условию следует добавить два уравнения ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_2^* = \varepsilon_3^* = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

(ε_i^* — соответствующие главные скорости деформации) и уравнение сжимаемости

$$E = f(\sigma)$$

где

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

а $f(\sigma)$ — некоторая функция, которая должна быть определена из дополнительных экспериментов (в простейшем случае несжимаемой среды $f(\sigma) = 0$). Таким образом, для определения шести неизвестных функций (четыре компоненты напряжения и две компоненты скорости перемещения частиц) получается замкнутая система уравнений.

Уравнения равновесия сплошной среды в случае осесимметричной задачи имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + a \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\tau_{rz}}{r} + b$$

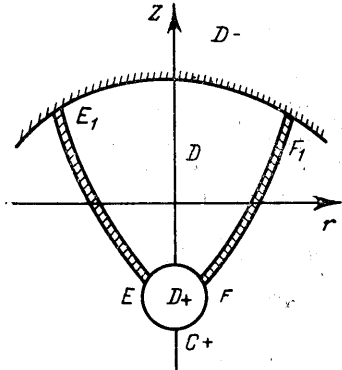
Здесь $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\varphi$ — компоненты напряжения, a и b — взятые с обратным знаком составляющие вектора объемной силы Q , определяемой уравнением (1.2), по направлениям r и z соответственно (составляющая по направлению φ равна нулю по условию), касательные напряжения $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$, очевидно, равны нулю.

Для сплошной среды на оси симметрии $r = 0$, очевидно, будет иметь место равенство $\sigma_r = \sigma_\varphi$; это послужило для некоторых авторов основанием принять упрощающее предположение $\sigma_z - \sigma_\varphi \ll r \partial \sigma_r / \partial r$. В этом предположении исходная задача становится статически определимой; получающаяся система уравнений в напряжениях принадлежит параболическому типу, однако единственное семейство характеристик оказывается существенно зависящим от искомым функций (как обычно для квазилинейных уравнений). Поэтому в противоположность плоскому случаю здесь уже не удастся отыскать семейство характеристик в явном виде и тем более проинтегрировать уравнения вдоль каждой характеристики. Таким образом, указанное предположение не упрощает исходную задачу; последнюю все равно приходится решать в целом, используя уравнения для скоростей.

Исследуем подробно наиболее простой и в то же время достаточно важный случай, когда напряженное состояние реализуется на ребре сингулярной поверхности

$$\sigma_\varphi = \sigma_s, \quad \sigma_{\max} = \sigma_s \quad (2.2)$$

Заметим, что если принять условие (2.2) в общем случае, т. е. принять, что в предельном состоянии всегда два наибольших главных напряжения становятся одновременно равными σ_s , то это не противоречит физическому смыслу (и, в частности, оказывается возможным удовлетворить ассоциированному закону и уравнению сжимаемости).



Фиг. 1

Максимальное главное напряжение равно

$$\sigma_{\max} = 1/2(\sigma_r + \sigma_z) + 1/2\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}}$$

поэтому условие предельного равновесия (2.2) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_\varphi = \sigma_s, \quad (\sigma_s - \sigma_r)(\sigma_s - \sigma_z) = \tau_{rz}^2 \quad (2.3)$$

Уравнения (2.1), (2.3) представляют собой квазилинейную систему уравнений относительно напряжений σ_r , σ_z , τ_{rz} . Левые части (2.1) совпадают с соответствующими левыми частями системы (1.1) в плоском случае (с заменой $r \rightarrow x$, $z \rightarrow y$). Поэтому можно сразу заключить, что система (2.1), (2.3) принадлежит параболическому типу и единственное семейство характеристик удовлетворяет уравнению

$$(\sigma_s - \sigma_r)dz + \tau_{rz}dr = 0 \quad (2.4)$$

Геометрически характеристики представляют собой поверхности вращения $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ (условие $\eta = \text{const}$ выделяет одну поверхность семейства), причем ось вращения совпадает с осью симметрии задачи.

Чтобы установить физический смысл характеристик, вычислим угол θ , который составляет площадка максимального главного напряжения, равного σ_s , с осью l . Имеем

$$-\sigma_r \sin \theta + \tau_{rz} \cos \theta = -\sigma_s \sin \theta$$

Отсюда, используя (2.3), получаем

$$\text{tg } \theta = dz / dr \quad (2.5)$$

Следовательно, характеристики представляют собой поверхности, на которых нормальное напряжение равно σ_s , а касательные напряжения равны нулю. Этот факт, как легко видеть, не зависит от предположения относительно составляющей σ_φ .

Как и в плоском случае, задачу удобно решать, вводя естественную систему криволинейных ортогональных координат, совпадающих с линиями главных нормальных напряжений.

В произвольной системе ортогональных криволинейных координат $\xi\eta\varphi$ исходная система уравнений равновесия (2.1) имеет вид [8]

$$Q_i + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{H_i}{H_k} H_1 H_2 H_3 \tau_{ik} \right) - \tau_{kk} \frac{\partial}{\partial x^i} \ln H_k \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Здесь H_i — коэффициенты Ляме; x^i — криволинейные координаты; Q_i — составляющие вектора объемной силы по направлениям x^i , τ_{ik} — составляющие тензора напряжений. В принятых обозначениях

$$\{x^i\} = \{\xi, \eta, \varphi\}, \quad \{\tau_{ik}\} = \begin{vmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} & \tau_{\xi\varphi} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_\eta & \tau_{\eta\varphi} \\ \tau_{\xi\varphi} & \tau_{\eta\varphi} & \sigma_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\{Q_i\} = \{Q_\xi, Q_\eta, Q_\varphi\},$$

Вследствие осевой симметрии задачи $\tau_{\xi\varphi} = \tau_{\eta\varphi} = 0$, $Q_\varphi = 0$ и все величины не зависят от координаты φ . Тогда третье уравнение системы (2.6) обращается в тождество, а первые два существенно упрощаются, причем коэффициенты Ляме имеют вид

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2, \quad H_2^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2, \quad H_3^2 = r^2$$

Пусть теперь поверхности $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$, $\eta = \text{const}$ — характеристики системы. За координату ξ примем длину дуги кривой $\eta, \varphi = \text{const}$, тогда $H_1 = 1$. Вследствие свойств характеристик будет $\sigma_\eta = \sigma_s$, $\tau_{\xi\eta} = 0$; кроме того, $\sigma_\varphi = \sigma_s$. Поэтому уравнения (2.6) запишутся в следующем виде, эквивалентном исходной системе (2.1), (2.3):

$$rH_2Q_\xi + \frac{\partial rH_2\sigma_\xi}{\partial \xi} - \sigma_s \frac{\partial rH_2}{\partial \xi} = 0, \quad Q_\eta = 0 \quad (2.7)$$

Анализ системы (2.7) проводится аналогично плоскому случаю. Замечая, что

$$Q_{\xi} = -a \frac{\partial r}{\partial \xi} - b \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad Q_{\eta} = a \frac{\partial z}{\partial \xi} - b \frac{\partial r}{\partial \xi}$$

получаем из второго уравнения (2.7)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad (2.8)$$

вдоль характеристики $\eta = \text{const}$, или

$$dz/dr = b/a \quad \text{при } \eta = \text{const} \quad (2.9)$$

Первое уравнение системы (2.7) легко интегрируется, и для единственного неизвестного напряжения σ_{ξ} получим

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{rH_2(\xi, \eta)} \left[A(\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{a^2 + b^2} r H_2(\xi, \eta) d\xi \right] \quad (2.10)$$

Здесь функция $A(\eta)$ определяется из граничных условий.

Формула (2.10) служит для определения σ_{ξ} при задании характеристик в виде $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$. Однако более удобным для определения характеристик будет уравнение (2.9), интегрирование которого дает семейство характеристик в виде $z = z(r, \eta)$. Преобразуем формулу (2.10) применительно к этому случаю. Записав результат дифференцирования тождества $z = z(r(\xi, \eta), \eta)$ по η вместе с условием ортогональности координат ξ, η , имеем, аналогично работе [1], систему уравнений относительно $\partial r / \partial \eta$, $\partial z / \partial \eta$. Решив эту систему, получим

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = -\frac{dz}{dr} \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{-1} \frac{dz}{d\eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{-1} \frac{dz}{d\eta} \quad (2.11)$$

Здесь через dz/dr , $dz/d\eta$, как и раньше, обозначены частные производные функции $z = z(r, \eta)$.

При помощи (2.11), (2.9) из (2.10) получим

$$\sigma_{\xi} = \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \left(\frac{dz}{d\eta} \right)^{-1} \left[A(\eta) + \int_{r_0}^r \sqrt{a^2 + b^2} \frac{dz}{d\eta} r dr \right] \quad (2.12)$$

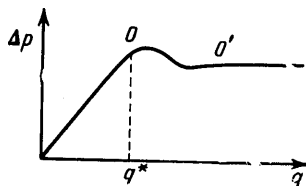
или

$$\sigma_{\xi} = \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \left(\frac{dz}{d\eta} \right)^{-1} \left[A(\eta) + \int_{z_0}^z \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} \frac{dz}{d\eta} r dz \right] \quad (2.13)$$

Начало перехода слоя во взвешенное состояние определяется моментом, когда $\sigma_{\xi} = \sigma_*$ в некоторой внутренней точке сыпучей среды. Вопросы постановки корректной краевой задачи и граничных условий на твердых стенках рассматриваются так же, как в плоской задаче.

Заметим, что формулы (2.12) и (2.13) в основном аналогичны соответствующим формулам (1.7) и (1.8) для плоской задачи. Можно показать, что условия начала перехода во взвешенное состояние для слоя частиц в вертикальной цилиндрической и конической трубах совпадают с соответствующими условиями (1.9), (1.13) и (1.16) для плоской задачи, причем характер перехода также сохраняется.

3. Замечание о развитом взвешенном слое. Как известно [3], при фильтрации жидкости сквозь слой сыпучего материала полный перепад давления Δp сначала растет с ростом расхода жидкости q (фиг. 2) и слой остается неподвижным. Затем, при некотором критическом значении $q = q_*$ (точка O на фиг. 2) слой начинает переходить во взвешенное состояние. Этот момент, а также зависимость $\Delta p = \Delta p(q)$, начиная с этого момента и до завершения процесса перехода (точка O' на фиг. 2), определяются формой аппарата, характером распределения жидкости на входе в слой, наличием сил



Фиг. 2

сцепления между частицами сыпучей среды. Наконец, правее точки O' (развитый взвешенный слой) перепад давления принимает некоторое постоянное значение, практически не зависящее от расхода.

Для развитого взвешенного слоя можно построить феноменологическую теорию, аналогичную изложенной в п. 1, 2 для начала псевдооживления. Заметим, что в рамках самой теории положение точки O' не может быть найдено.

В отличие от состояния слоя в области перехода, которое может характеризоваться наличием каналов в слое частиц, распадением сыпучего тела на блоки и т. д., в области развитого псевдооживления слой разделен на отдельные подвижные частицы сыпучей среды. Таким образом, развитый взвешенный слой можно рассматривать как двойную сплошную среду: фильтрующуюся жидкость и пластическую псевдожидкость, состоящую из «размазанных» по объему частиц сыпучей среды. Основное свойство этой псевдожидкости заключается в недопустимости растягивающих напряжений. Отсюда следует, что определяющие уравнения для плоской задачи представляют собой систему (1.1) при $\sigma_s \equiv 0$ с добавлением уравнений, вытекающих из ассоциированного закона теории пластичности

$$\frac{1}{\sigma_y} \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{1}{2\tau_{xy}} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Здесь u' , v' — составляющие вектора средней скорости твердых частиц по осям x и y . Аналогично для осесимметричной задачи определяющими уравнениями будут (2.1), (2.3) при $\sigma_s \equiv 0$ с добавлением уравнений типа (3.1) (получающихся заменой $x \rightarrow r$, $y \rightarrow z$). Существенно отметить, что в данном случае для составляющих a , b вектора объемной силы законы фильтрации неприменимы; для определения a и b следует использовать соображения, аналогичные, например, приведенным в работе [9], или данные экспериментов.

Поступило 5 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Черепанов Г. П. Плоская задача псевдооживления. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, стр. 603.
2. Vaerns M. Effect of interparticle adhesive forces on fluidization of fine particles. Industr. and Engng Chem. Fundament., 1966, vol. 5, No. 4, p. 508.
3. Лева М., Псевдооживление, М., Гостоптехиздат, 1961.
4. Филипов М. В. Взвешенный слой ферромагнитных частиц и действие на него магнитного поля. Гр. Ин-та физ. АН ЛатвССР, 1961, N 12, стр. 215.
5. Parker H., Stevens W. Effect of liquid on interparticle forces in gas-fluidized beds. A.I.Ch.E. Journal, 1959, vol. 5, No. 3, p. 314.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1950.
7. Черепанов Г. П. О выпучивании мембран с отверстием при растяжении. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 275.
8. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 3. М., Изд-во АН СССР, 1961.
9. Гупало Ю. П. О некоторых закономерностях псевдооживленного слоя и стесненного падения. Инж. физ. ж., 1962, № 1.