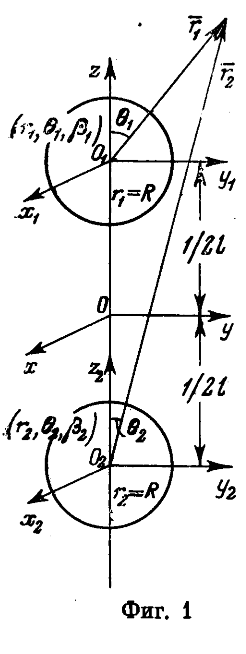
ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Н. ГУЗЬ, Л. С. ПАЛЬКО

(*Киев*)

Для выяснения взаимовлияния сферических оболочек на частоты их свободных колебаний в жидкости рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях двух одинаковых сферических оболочек в предположении, что центры кривизны оболочек не совпадают. Решение найдено для случая сжимаемой и несжимаемой жидкости методом рядов со сведением к бесконечным системам линейных уравнений. Проведено математическое обоснование применяемого метода.

1. Постановка задачи. Пусть декартова координатная система $Oxyz$ и локальные координатные системы $O_jx_jy_jz_j$ связаны со сферами так, как это показано на фиг. 1 (каждой сфере приписан свой индекс j, $j = 1, 2$). Кроме того, каждой сфере приписаны локальные сферические координаты r_j, θ_j, β_j ($j = 1, 2$), в которых поверхность j-й сферы задается уравнением $r_j = R$. Расстояние между центрами двух сфер обозначается через l. Ось Oz системы $Oxyz$ является осью симметрии сфер. Очевидно, что при указанном введении координатных систем задача об осесимметричных колебаниях сферических оболочек в сжимаемой жидкости сводится к решению следующей системы уравнений:



Фиг. 1

а) уравнений упругих колебаний тонких непологих сферических оболочек [1]

$$\left[(\nabla^2+1)^2+\frac{12(1-\nu^2)}{k^2h^2}\left(1+\frac{\rho_0}{k^2E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right]\times$$

$$\times(\nabla^2+2)^2\psi_j-\frac{12\rho_0(1-\nu^2)(1+\nu)}{k^4h^2E}\times$$

$$\times(\nabla^2+2)\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2}-\frac{12\rho(1-\nu^2)}{k^5h^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$

$$\left(k=\frac{1}{R},\quad j=1,2\right) \tag{1.1}$$

б) уравнения для возмущения потенциала скорости жидкости

$$\frac{1}{r_j^2\sin\theta_j}\left[\frac{\partial}{\partial r_j}\left(r_j^2\sin\theta_j\frac{\partial}{\partial r_j}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)\right]\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{1.2}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{\sin\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\qquad w_j=\frac{k}{Eh}(\nabla^2+1-\nu)(\nabla^2+2)\psi_j$$

Здесь c — скорость звука в невозмущенной жидкости, w_j — прогиб, t — время, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, h — толщина оболочек, ρ_0 — плотность материала оболочек, ρ — плотность жидкости.

Решение уравнения (1.2) должно удовлетворять на поверхности каждой сферы граничным условиям [2]

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r_j}\right|_{r_j=R}=\frac{k}{Eh}(\nabla^2+1-\nu)(\nabla^2+2)\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\qquad (j=1,2)\qquad (1.3)$$

2. Решение задачи. Будем искать решение уравнения (1.2) в виде суммы разложений

$$\Phi(r,\theta,t)=\varphi(r,\theta)\sin\omega t=\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(r_j,\theta_j)\sin\omega t \qquad (2.1)$$

$$\varphi_j(r_j,\theta_j)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}h_n^{(1)}(\lambda r_j)P_n(\cos\theta_j)\qquad \left(\lambda=\frac{\omega}{c}\right)\qquad (2.2)$$

с коэффициентами $a_n^{(j)}$, требующими своего определения в дальнейшем из граничных условий (1.3); здесь P_n — полиномы Лежандра, $h_n^{(1)}(\lambda r)$ определяется соотношением

$$h_n^{(1)}(\lambda r)=\left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2}H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda r)\qquad (2.3)$$

Для отыскания $a_n^{(j)}$ представим функции ψ_j в виде разложений, аналогичных (2.2), по собственным функциям уравнения Лежандра

$$\psi_j(\theta_j,t)=\psi_j(\theta_j)\cos\omega t=\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(j)}P_n(\cos\theta_j)\qquad (j=1,2)\qquad (2.4)$$

и рассмотрим колебания, симметричные относительно плоскости $z=0$.

Тогда, вследствие свойств полинома Лежандра, получим, что

$$a_n^{(2)}=(-1)^n a_n^{(1)},\qquad b_n^{(2)}=(-1)^n b_n^{(1)}\qquad (a_n^{(1)}=a_n,\ b_n^{(1)}=b_n)$$

Разложения (2.1) и (2.4) принимают теперь вид

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a\left[h_n^{(1)}(\lambda r_1)P_n(\cos\theta_1)+(-1)^n h_n^{(1)}(\lambda r_2)P_n(\cos\theta_2)\right]\qquad (2.5)$$

$$\psi_1(\theta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nP_n(\cos\theta_1),\qquad \psi_2(\theta_2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_nP_n(\cos\theta_2)\qquad (2.6)$$

Чтобы записать волновые функции, входящие в (2.5) и записанные в координатах первой сферы, в координатах второй сферы применим теорему сложения для сферических волновых функций [3]

$$h_n^{(1)}(\lambda r_1)P_n(\cos\theta_1)=\sum_{q=0}^{\infty}Q_{0q0n}(r_{12},\theta_{12})j_q(\lambda r_2)P_q(\cos\theta_2)\qquad (2.7)$$

На основании (2.7) потенциал $\Phi(r, \theta, t)$ запишется в виде

$$\Phi = \sum_{q=0}^{\infty}\left[(-1)^q a_q h_q^{(1)}(\lambda r_2) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_{0q0n}(l, \pi) j_q(\lambda r_2)\right] P_q(\cos\theta_2)\sin\omega t \tag{2.8}$$

Если теперь удовлетворить граничным условиям (1.3) на поверхности второй сферы, то на основании (2.8), (2.4), (2.6), а также свойства ортогональности полиномов Лежандра для определения коэффициентов a_n получим бесконечную систему линейных уравнений

$$x_q + \sum_{n=0}^{\infty} A_{qn} x_n = \beta_q b_q = B_q \qquad (a_n = \alpha_n x_n, \quad q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

$$A_{qn} = (-1)^q \frac{\alpha_n}{h_q^{(1)\prime}(\lambda R)} Q_{0q0n}(l, \pi), \qquad \alpha_n = \frac{d}{dr_2} j_n(\lambda r_2)\,|_{r_2=R} = j_n'(\lambda R)$$

$$\beta_q = -\frac{k\omega\,[q(q+1) + \nu - 1)][q(q+1) - 2]}{Eh\alpha_q h_q^{(1)\prime}(\lambda R)}$$

которая является квазирегулярной, а значит, единственным образом разрешима методом усечения [4]. Доказательство этого утверждения можно провести следующим образом. Воспользовавшись оценкой в [5], получим

$$|A_{qn}| < C_1 \frac{(n+q)!}{n!q!}\left(\frac{R}{l}\right)^{q+n} \qquad (C_1 = \mathrm{const}) \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_{qn}| < C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!}\left(\frac{R}{l}\right)^{q+n} = C_1 \frac{l}{l-R}\left(\frac{R}{l-R}\right)^q \tag{2.11}$$

Ввиду того, что $l > 2R$, этот ряд сходится при любом фиксированном q и поэтому обязательно найдется номер строки q_0, начиная с которого

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_{qn}| < 1 \tag{2.12}$$

Матрица, составленная из правых частей (2.10), относительно q, n образует, очевидно, вполне непрерывную форму в гильбертовом пространстве l_2, так как для нее выполняется условие

$$\sum_{n,\,q}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(\frac{R}{l}\right)^{q+n}\right]^2 < \infty \tag{2.13}$$

если $l > 2R$, т. е. сферы не касаются.

Из физических соображений следует, что перерезывающая сила непрерывна по θ. Следовательно, w имеет непрерывную третью производную, а функция ψ имеет непрерывную седьмую производную.

Поэтому b_q имеет порядок $b_q \sim 1 / q^8$. Пользуясь теперь асимптотическими относительно q формулами для функций $j_q(x)$, $h_q^{(1)}(x)$, можно показать, что

$$B_q < \mathrm{const}\cdot q^{-5} \tag{2.14}$$

Правые части (2.14) являются элементами пространства l_2, так как бесконечный ряд сходится с общим членом $|q^{-5}|^2$. Таким образом, система (2.9) с вполне непрерывной формой (2.13) согласно альтернативе Гильберта имеет единственное решение, сходящееся в пространстве l_2.

3. Перейдем к решению системы (2.9) методом редукции, оставив в ней N членов

$$x_q+\sum_{n=0}^{N} A_{qn}\,x_n=\beta_q b_q \qquad (q=0,1,2,\ldots,N) \tag{3.1}$$

Согласно теореме Крамера

$$x_j=\frac{\Delta_i}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{N} b_i\beta_i\Delta_{ij} \qquad (j=0,1,2,\ldots,N) \tag{3.2}$$

$$\Delta=\det\|\delta_{qn}+A_{qn}\|_{q,\,n=0}^{N} \tag{3.3}$$

Здесь Δ_j — определитель матрицы (3.3), в которой j — столбец заменен на ряд ограниченных элементов $\beta_1 b_1$, $\beta_2 b_2$, ..., $\beta_N b_N$, Δ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\delta_{ij}+A_{ij}$ матрицы (3.3).

Выражение для потенциала скоростей (2.8) с учетом (3.2) примет теперь вид

$$\Phi(r,\theta,t)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{N}\frac{\sin\omega t b_i\beta_i}{\Delta}\Big[(-1)^q\,\varepsilon_q{}^N\,\alpha_q\,h_q^{(1)}(\lambda R)\,\Delta_{iq}+$$
$$+\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\,Q_{0q0n}(l,\pi)\,j_q(\lambda R)\,\Delta_{in}\Big]P_q(\cos\theta_2) \qquad \left(\varepsilon_q{}^N=\begin{matrix}1, q\leqslant N\\ 0, q>N\end{matrix}\right) \tag{3.4}$$

Подставляя (2.4), (2.6) и (3.4) в уравнение (1.1), получаем бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов b_q

$$C_q b_q-\sum_{i=0}^{N} C_{qi}\,b_i=0 \qquad (q=0,1,2,\ldots) \tag{3.5}$$

Здесь

$$C_q=\left[(q^2+q-1)^2+\frac{12(1-\nu^2)}{k^2h^2}\left(1-\frac{\rho_0\omega^2}{k^2E}\right)\right](q^2+q-2)^2-$$
$$-\frac{12\rho_0\omega^2(1-\nu^2)(1+\nu)}{k^4h^2E}(q^2+q-2)$$

$$C_{qi}=\frac{12\rho\omega(1-\nu^2)}{k^5h^2\Delta}\beta_i\Big[\varepsilon_q{}^N\,\alpha_q\,h_q^{(1)}(\lambda R)\,\Delta_{iq}+$$
$$+(-1)^q\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\,Q_{0q0n}(l,\pi)\,j_q(\lambda R)\,\Delta_{in}\Big]$$

Из условия ненулевого решения этой системы получим

$$\det\|\varkappa_{qj}\|_{q,\,j}^{\infty}=0 \qquad (q,j=0,1,2,\ldots) \qquad (\varkappa_{qj}=\delta_{qj}C_q-\varepsilon_j{}^N C_{qj}) \tag{3.6}$$

Можно показать, что

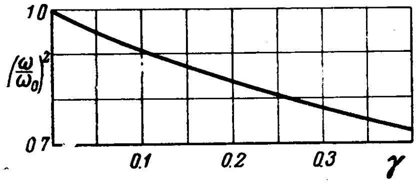
$$\det\|\varkappa_{qj}\|_{q,\,j}^{\infty}=\det\|\varkappa_{qj}\|_{q,\,j}^{N}\prod_{q=N+1}^{\infty}C_q \tag{3.7}$$

Так как $C_q = 0$ представляет собой частотное уравнение свободных колебаний сферической оболочки в вакууме, то из этого заключаем, что

$$\det \|\varkappa_{qj}\|_{q,\,j}^{N} = 0 \qquad (3.8)$$

Это трансцендентное уравнение дает возможность определить частоты совместных колебаний сферических оболочек и сжимаемой жидкости. При $N = 0$ получаем уравнение для определения первой частоты колебаний

$$4\left(D + \frac{Eh}{k^2}\right) + \frac{2\rho_0 h\omega^2(\nu - 1)}{k^4} - \frac{\rho\omega Eh}{k^5}\frac{\alpha_0\beta_0}{1 + A_{00}}\left(h_0^{(1)}(\lambda R) + j_0(\lambda R)Q_{0000}(l, \pi)\right) = 0 \qquad (3.9)$$



Фиг. 2

Рассмотрим случай колебаний сферических оболочек в несжимаемой жидкости. В этом случае уравнение (3.8) упрощается и при $N = 0$ принимает вид

$$\omega^2 = \frac{2(D + EhR^2)}{R^4(1 - \nu)[\rho_0 h + \rho R(1 + \gamma)]} \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},\ \gamma = \frac{R}{l}\right) \qquad (3.10)$$

Для уточнения значения частоты колебаний (3.10) возьмем уравнение (3.8) при $N = 1$. Тогда

$$\omega^2 = \frac{2(D + EhR^2)}{R^4(1 - \nu)\{\rho_0 h + \rho R[(1 + \gamma) - \gamma^4(1 + 2\gamma^3)^{-1}]\}} \qquad (3.11)$$

На фиг. 2 для параметров оболочки и жидкости $E = 2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $\nu = 0.3$, $\rho_0 = 8\cdot 10^{-6}$ *кг·сек*^{2}/*см*^{4}, $h / R = 0.01$, $R = 10$ *см*, $\rho = 1.02\cdot 10^{-6}$ *кг·сек*^{2}/*см*^{4} приведена зависимость ω^2 / ω_0^2 от γ, где ω_0 — частота колебаний одной оболочки в неограниченной жидкости. При вычислении формулы (3.10), (3.11) дают практически совпадающие результаты, поэтому на фиг. 2 кривая соответствует формулам (3.10) и (3.11). Из фиг. 2 видно, что частота колебаний сферических оболочек значительно понижается по сравнению с частотой, вычисленной для одной оболочки без учета влияния соседней, поэтому даже для достаточно удаленных оболочек необходимо учитывать их взаимовлияние.

В статье рассматриваются колебания, симметричные относительно плоскости $z = 0$. Полученное решение является также решением задачи о колебаниях одной сферической оболочки, расположенной на расстоянии $^1/_2 l$ от жесткой стенки.

Поступило 24 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. М., АН СССР, 1962, т. 1.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
3. Friedman B., Ruccek J. Addition theorems for spherical waves. Quart. Appl. Math,. 1954, vol. 12. No. 13.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
5. Иванов Е. А. Рассеяние плоской электромагнитной волны на нескольких сферах. Дифференц. уравнения, 1966, вып. 6, т. 2.