О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ

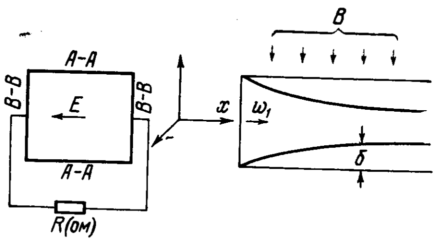
Л. И. БУЗНИКОВА, Б. Г. ИОТКОВСКИЙ, В. В. КИРИЛЛОВ

(*Москва*)

Рассматривается задача о ламинарном течении в МГД-канале. Для расчета пограничного слоя на стенках канала используется приближенный метод, предложенный М. Е. Швецом [1].

Получены общие выражения для определения толщины пограничного слоя и напряжения трения на стенках МГД-канала при произвольном распределении по длине канала скорости во внешнем потоке и индукции магнитного поля.

В работе [2] метод М. Е. Швеца применяется для решения задачи об обтекании тонкого профиля проводящей жидкостью при отсутствии магнитогидродинамических сил во внешнем потоке в случае постоянной проводимости; при этом автор использовал исходное уравнение движения из работы [3], в которой решалась аналогичная задача для переменной проводимости жидкости в пограничном слое. В отличие от работы [3], автор работы [2] принимал проводимость постоянной, хотя при этом уравнение движения на внешней границе пограничного слоя не удовлетворяется. Тем не менее в работе [2] было показано, что к решению задачи о МГД-течении в пограничном слое (в указанной выше постановке) можно применить приближенный метод М. Е. Швеца и получить решение в квадратурах. Однако вопрос о точности и области применимости метода М. Е. Швеца к решению задач магнитной гидродинамики не рассматривался.



Фиг. 1

Для частных случаев проведены численные расчеты и проведено сравнение результатов с точными решениями, т. е. делается попытка некоторого суждения о границах применимости данного метода для решения магнитогидродинамических задач.

1. Рассматривается ламинарное течение несжимаемой проводящей жидкости с постоянными физическими свойствами в плоском канале при наличии скрещенных магнитного и электрического полей.

Схема течения в канале представлена на фиг. 1. Стенка AA — изоляционная; BB — электродная. Предполагается, что магнитное число Рейнольдса $R_m \ll 1$; параметр Холла $\omega\tau \ll 1$, напряженность приложенного электрического поля E постоянна по высоте канала, а плотность тока j в канале постоянна по его ширине.

Из постоянства физических свойств следует, что динамическую задачу можно рассматривать независимо от тепловой, а допущение о малости магнитного числа Рейнольдса позволяет пренебречь индуцированным магнитным полем по сравнению с приложенным.

Предположение о постоянстве величины E является существенным, так как в противном случае течение может иметь особенности, которые не могут быть учтены в рамках приближенного метода [4]. Однако для МГД-генераторов или ускорителей условие $E = \text{const}$ реализуется достаточно точно.

Течение в канале разбивается на две области: пограничный слой и внешний поток (ядро потока). Течение в ядре потока рассчитывается по одномерной теории. Значения параметров потока в ядре являются граничными условиями для пограничного слоя на его внешней границе. Взаимное влияние пограничных слоев на электродных и изоляционных стенках не учитывается.

Задача получается существенно различной для пограничных слоев на стенках канала, ориентированных параллельно силовым линиям магнитного поля («электродные» стенки) и перпендикулярно им («изоляционные» стенки). В первом случае ток течет перпендикулярно стенке и плотность тока, а следовательно, и пондеромоторные силы постоянны по толщине пограничного слоя. Во втором случае напряженность электрического поля по толщине пограничного слоя сохраняется постоянной, а плотность тока, и, следовательно, пондеромоторные силы будут изменяться по толщине пограничного слоя.

2. Уравнения динамического пограничного слоя на изоляционных стенках при сделанных допущениях имеют вид

$$\partial w_x / \partial x + \partial w_z / \partial z = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + jB \tag{2.2}$$

Плотность тока определяется законом Ома

$$j = \sigma (E - w_x B) \tag{2.3}$$

Преобразуем уравнение движения (2.2), выразив скорость w_z из уравнения неразрывности (2.1). После приведения его к безразмерному виду, получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = R_L \delta^{\circ 2} \left(f \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta \frac{\partial f}{\partial \xi} d\eta \right) - R_L \delta^\circ \delta^{\circ\prime} \frac{\partial f}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta f d\eta -$$

$$- \frac{w_1' \delta^{\circ 2}}{w_1} R_L \left(1 + f^2 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta f d\eta \right) - \delta^{\circ 2} H_L{}^2 (1 - f)$$

$$\left(f = \frac{w_x}{w_1},\ \eta = \frac{z}{\delta},\ \xi = \frac{x}{L},\ \delta^\circ = \frac{\delta}{L},\ R_L = \frac{w_1 L}{\nu},\ H_L = \frac{LB\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mu}} \right) \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем введены следующие обозначения: w_x, w_z — компоненты скорости вдоль осей x, z, w_1 — скорость во внешнем потоке, p — давление, B — магнитная индукция, ρ — плотность, μ, ν — динамическая и кинематическая вязкость, σ — электропроводность, L — характерный линейный размер (длина), δ — толщина пограничного слоя, R_L — число Рейнольдса, H_L — число Гартмана. Штрихом обозначены производные по ξ.

Дважды интегрируя выражение (2.4) по η, получаем

$$f = \int\limits_0^\eta \int\limits_0^\eta \left\{ R_L \delta^{\circ 2} \left(f \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta \frac{\partial f}{\partial \xi} d\eta \right) - R_L \delta^\circ \delta^{\circ\prime} \frac{\partial f}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta f d\eta - \right.$$

$$\left. - \frac{w_1' \delta^{\circ 2}}{w_1} R_L \left(1 + f^2 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta f d\eta \right) - \delta^{\circ 2} H_L{}^2 (1 - f) \right\} d\eta\, d\eta + C_1 \eta + C_2 \tag{2.5}$$

Если задаться в нулевом приближении функцией $f_0 = f_0(\eta)$ и подставить ее в правую часть уравнения (2.5), то, взяв квадратуры с использованием граничных условий, можно получить первое приближение для профиля скорости f

$$f = R_L \delta^\circ \frac{d\delta^\circ}{d\xi} F_1(\eta) + R_L \delta^\circ \frac{dw_1}{w_1 d\xi} [F_1(\eta) + F_2(\eta)] + H_L{}^2 \delta^\circ F_3(\eta) \tag{2.6}$$

Здесь

$$-F_1(\eta) = \int\limits_0^\eta \Phi_1(\eta) d\eta - \eta \Phi_1(1), \qquad \Phi_1(\eta) = \int\limits_0^\eta \left[1 - \frac{\partial f_0}{\partial \eta} \int\limits_0^\eta f_0 d\eta \right] d\eta$$

$$-F_2(\eta) = \int\limits_0^\eta \Phi_2(\eta) d\eta - \eta \Phi_2(1), \qquad \Phi_2(\eta) = \int\limits_0^\eta (1 - f_0{}^2) d\eta \tag{2.7}$$

$$-F_3(\eta) = \int\limits_0^\eta \Phi_3(\eta) d\eta - \eta \Phi_3(1), \qquad \Phi_3(\eta) = \int\limits_0^\eta (1 - f_0) d\eta$$

Используя граничное условие $f(1) = 1$, получаем из (2.6) уравнение для определения δ°

$$\frac{d\delta^{\circ 2}}{d\xi} + \delta^{\circ 2} \left[\frac{1}{w_1} \frac{dw_1}{d\xi} c + mLb \right] = \frac{a}{R_L} \tag{2.8}$$

Здесь

$$a = \frac{2}{F_1(1)}, \quad b = \frac{2F_3(1)}{F_1(1)}, \quad c = 2\left[1 + \frac{F_2(1)}{F_1(1)}\right], \quad mL = \frac{H_L^2}{R_L}$$

параметр магнитогидродинамического взаимодействия. Решая уравнение (2.8), находим изменение толщины пограничного слоя по длине канала

$$\delta^\circ = \exp\left(-bL\int_0^\xi \frac{m}{2}d\xi\right)\left[\frac{a}{w_1^{(c-1)}R_L}\int_0^\xi w_1^{(c-1)}\exp\left(bL\int_0^\xi m d\xi\right)d\xi + \left(\frac{w_1(0)}{w_1}\right)^c \delta_0^{\circ 2}\right]^{1/2} \tag{2.9}$$

Здесь δ_0 — толщина пограничного слоя на входе в МГД-канал.

Профиль скорости в общем случае определяется соотношением, которое получается из (2.6) и (2.8)

$$f = f_1(\eta) + R_L\delta^{\circ 2}\left[\frac{1}{w_1}\frac{dw_1}{d\xi}f_2(\eta) + mLf_3(\eta)\right] \tag{2.10}$$

где

$$f_1(\eta) = \frac{F_1(\eta)}{F_1(1)}, \quad f_2(\eta) = F_2(\eta) - \frac{F_2(1)}{F_1(1)}F_1(\eta), \quad f_3(\eta) = F_3(\eta) - \frac{F_3(1)}{F_1(1)}F_1(\eta)$$

Коэффициент трения определяется из выражения

$$C_f = \frac{2\mu}{\rho w_1^2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}\right)_{z=0} = 2\frac{\dot f(0)}{\delta^\circ R_L} \tag{2.11}$$

Здесь точкой обозначена производная по η.

Из (2.11) и (2.10) получаем

$$C_f = \frac{2a_1}{\delta^\circ R_L} + 2\delta^\circ\left(\frac{1}{w_1}\frac{dw_1}{d\xi}a_2 + mLa_3\right) \tag{2.12}$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 зависят от вида функции f_0 и определяются из соотношений

$$a_1 = \dot f_1(0), \qquad a_2 = \dot f_2(0), \qquad a_3 = \dot f_3(0) \tag{2.13}$$

Полагая $C_f = 0$, из (2.9) и (2.12) определяем положение точки отрыва

$$a_1 + \delta^{\circ 2}R_L\left(\frac{1}{w_1}\frac{dw_1}{d\xi}a_2 + mLa_3\right) = 0 \tag{2.14}$$

Из (2.12) следует, что с ростом параметра магнитогидродинамического взаимодействия mL коэффициент трения растет.

В случае $w_1(x) = \text{const}$ и $B(x) = \text{const}$ выражение (2.9) значительно упрощается

$$\delta^\circ = \exp\left(-\frac{bmL\xi}{2}\right)\left[\frac{a}{bH_L^2}[\exp(bLm\xi) - 1] + \delta_0^{\circ 2}\right]^{1/2} \tag{2.15}$$

Нулевое приближение для скорости в обычной гидродинамике выбирается достаточно произвольно, так как решение слабо зависит от вида функции f_0 (на чем, собственно, и основан метод М. Е. Швеца), единственное ограничение — функция f_0 должна удовлетворять граничным условиям $f_0(0) = 0$ и $f_0(1) = 1$.

В частности, если принять $f_0 = \eta$, то при $w_1 = \text{const}$ и $B = \text{const}$ получим

$$\delta^\circ = \exp(-{}^4/_3 mL\xi)\{6H_L^{-2}[\exp({}^8/_3 mL\xi) - 1] + \delta_0^{\circ 2}\}^{1/2} \tag{2.16}$$

Использование в качестве нулевого приближения для f_0 более сложных функций не создает особых трудностей в решении задачи.

В частности, авторы рассмотрели решения для следующих функций:

$$f_{01} = \eta, \qquad f_{02} = {}^3/_2\eta - {}^1/_2\eta^3, \qquad f_{03} = \sin {}^1/_2\pi\eta$$
$$f_{04} = 2\eta - \eta^2, \qquad f_{05} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \tag{2.17}$$

Значения коэффициентов a, b, c, a_1, a_2, a_3 для профилей (2.17) приведены в табл. 1.

Полученные решения являются по существу первым приближением. Применение более высоких приближений, как показывает анализ течений в обычной гидродинамике [5], вряд ли целесообразно. Большая громоздкость и сложность вычислений не дает существенного повышения точности.

Таблица 1

	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}		f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}
a	16	23.3	24.2	25.7	32.6	a_1	1.33	1.62	1.67	1.71	1.92
b	2.67	2.33	2.28	2.14	2.17	a_2	0.333	0.261	0.250	0.248	0.214
c	6.0	5.64	5.60	5.43	5.47	a_3	0.278	0.213	0.210	0.101	0.172

3. Уравнения для динамического пограничного слоя на проводящей поверхности BB МГД-канала при сделанных допущениях имеют вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}=0$$

$$\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+j_\infty B \tag{3.1}$$

Заменяя производную $dp\,/\,dx$ ее выражением для внешнего потока, уравнение движения приведем к виду

$$\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\rho w_1\frac{dw_1}{dx} \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что при заданном изменении скорости во внешнем потоке по длине канала пондеромоторные силы не влияют на распределение скорости в пограничном слое на электродах. Поэтому для решения уравнения (3.1) могут быть использованы результаты обычной гидродинамики [1], эти же результаты получаются и из выражений (2.9) и (2.12), если положить в них $m=0$.

4. Чтобы иметь некоторое представление о возможной применимости приближенных методов решения уравнений пограничного слоя (при отсутствии экспериментальных данных), проведем сравнение результатов приближенного расчета с точным решением для тех частных случаев, которые поддаются точному анализу.

В качестве таковых воспользуемся решением для автомодельных течений. Автомодельность магнитогидродинамических течений имеет место, в частности, при определенных распределениях скорости в ядре потока и индукции магнитного поля по длине канала [6]

$$w_1=w_0x^n,\qquad B=B_0x^{1/2(n-1)}$$

Для автомодельного течения вблизи изоляционной поверхности систему уравнений движения и неразрывности можно привести [6] к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\varphi((\eta^*)$

$$\dddot{\varphi}+\varphi\ddot{\varphi}+\beta(1-\dot{\varphi}^2)+N(1-\dot{\varphi})=0$$

$$\dot{\varphi}(\eta^*)=\frac{w_x}{w_1},\quad \beta=\frac{2n}{n+1},\quad N=\frac{2\sigma_0B_0^2}{\rho w_0(1+n)},\quad \eta^*=\left(\frac{(1+n)}{2}\frac{w_0}{\nu}\right)^{1/2}x^{1/2(n-1)}z \tag{4.1}$$

Автомодельная задача при различных значениях β и N была решена приближенным методом и численно на ЭЦВМ «Стрела» при граничных условиях

$$\varphi=\dot{\varphi}=0,\qquad \eta^*=0,\qquad \dot{\varphi}=1,\qquad \eta^*=\infty \tag{4.2}$$

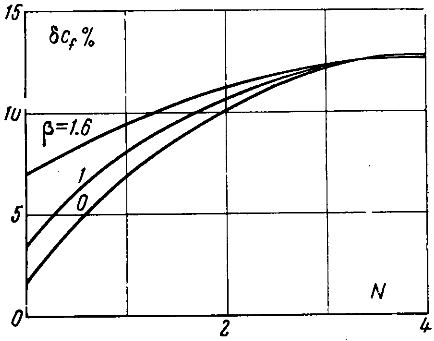
Сравнение результатов расчета производилось по значениям коэффициента трения $C_f\sqrt{R_x}$. В табл. 2 приведены результаты расчета коэффициента трения для различных значений β и N.

На фиг. 2 представлена величина относительной погрешности расчета коэффициента трения

$$\delta C_f = \frac{C_f - C_{f0}}{C_{f0}} 100$$

при задании профиля скорости в нулевом приближении в виде $f_0 = 2\eta - \eta^2$.

Как видно из приведенного графика, с ростом β и N погрешность расчета приближенным методом возрастает. При этом для малых значений N погрешность довольно сильно зависит от β. Так, при $N = 0$ с увеличением β от 0 до 1.6 погрешность возрастает от 1.6 до 7.0%. При больших N точность метода практически не зависит от величины β: при $N = 4$ для всех β $\delta C_f \approx$ $\approx 13\%$.



Фиг. 2

Для оценки точности метода, помимо автомодельных течений, были рассмотрены и некоторые неавтомодельные задачи, в частности задача о течении проводящей жидкости у изоляционной поверхности МГД-канала при $w_1(x) = \text{const}$, $B(x) = \text{const}$.

Точное решение задачи для этого случая отсутствует и решение сравнивалось с решением этой же задачи методом Кармана — Польгаузена при использовании профиля скорости в виде [7]

$$w_x / w_1 = [\operatorname{ch} H_\delta - \operatorname{ch} H_\delta (1 - \eta) + {}^1\!/_2 H_\delta^2 (\eta^2 - 2\eta^3 + \eta^4)] / (\operatorname{ch} H_\delta - 1) \qquad (4.3)$$

где $H_\delta = \delta B \sqrt{\sigma / \mu}$.

При этом, как показано в работе [7], погрешность расчета рассматриваемой задачи составляет несколько процентов, причем с ростом параметра H_δ точность повышается.

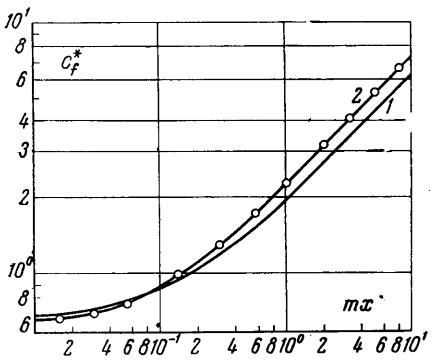
Таблица 2

N	β	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}	точное
0	0	0.3333	0.3359	0.3366	0.3380	0.3353	0.3321
	1	1.361	1.323	1.323	1.306	1.306	1.266
	1.6	2.691	2.623	2.614	2.578	2.580	2.412
0.5	0	0.6455	0.6267	0.6246	0.6132	0.6146	0.5889
	1	1.600	1.555	1.550	1.524	1.527	1.404
	1.6	3.007	2.925	2.914	2.867	2.873	2.625
1	0	0.8729	0.8433	0.8397	0.8210	0.8251	0.7673
	1	1.812	1.758	1.751	1.719	1.724	1.590
	1.6	3.295	3.201	3.188	3.133	3.142	2.870
2	0	1.219	1.176	1.171	1.142	1.149	1.037
	1	2.178	2.110	2.101	2.058	2.068	1.859
	1.6	3.812	3.697	3.682	3.611	3.626	3.247
4	0	1.722	1.663	1.655	1.614	1.627	1.430
	1	2.776	2.687	2.676	2.616	2.632	2.321
	1.6	4.683	4.537	4.518	4.422	4.447	3.924

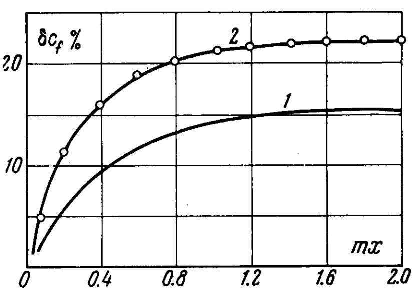
В табл. 3 и на фиг. 3 представлены результаты расчетов ${}^1\!/_2 C_f \sqrt{R_x}$ методом М. Е. Швеца и результаты работы [7]. Как видно из приведенных таблицы и фигуры, отличие результатов работы [7] от результатов расчета трения рассматриваемым методом с ростом параметра магнитогидродинамического взаимодействия увеличивается. На фиг. 4 представлена величина относительной погрешности расчета коэффициента трения. Видно, что с ростом mx она возрастает, асимптотически приближаясь к некоторому предельному значению, которое зависит от вида f_0. При $f_0 = 2\eta - \eta^2$ максимальная погрешность составляет 15.5%.

Интересно рассмотреть влияние вида функции f_0 на точность расчетов рассматриваемым методом. Как известно, при обычном гидродинамическом течении с постоянной скоростью внешнего потока вид f_0 слабо влияет на результаты расчета. При рассмотрении МГД-течений выбор исходного профиля оказывает несколько более сильное влияние на точность расчетов этим методом.

Рассмотренные выше профили f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{04}, f_{05} (2.17) удовлетворяют граничным условиям, вытекающим из определения пограничного слоя конечной толщины и отличаются степенью заполнения профиля. Сравнение результатов, полученных для различных профилей в случае автомодельных течений (табл. 2), показало, что минимальная среднеквадратичная погрешность получается для профиля f_{04}, для профилей f_{05}, f_{03}, f_{02}, f_{01} она соответственно в 1.07, 1.25, 1.29, 1.67 раза больше. Подобная картина получается и при рассмотрении решения неавтомодельной задачи (табл. 3). Наименьшая погрешность получается для f_{04}, а для профилей f_{05}, f_{03}, f_{02}, f_{01} она соответственно в 1.06, 1.16, 1.20, 1.44 раза больше (при $mx > 1$).



Фиг. 3



Фиг. 4

Таблица 3

mx	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}	[7]
0	0.333	0.335	0.336	0.337	0.335	0.341
0.2	0.574	0.550	0.547	0.549	0.550	0.517
0.4	0.773	0.748	0.745	0.729	0.732	0.666
0.6	0.943	0.888	0.885	0.885	0.890	0.793
0.8	1.090	1.052	1.047	1.024	1.029	0.902
1	1.221	1.179	1.173	1.147	1.154	1.01
1.2	1.339	1.294	1.287	1.259	1.266	1.095
1.4	1.447	1.399	1.392	1.362	1.370	1.183
1.6	1.548	1.497	1.490	1.457	1.466	1.265
1.8	1.642	1.589	1.581	1.547	1.556	1.342
2.0	1.731	1.676	1.667	1.631	1.641	1.414

Таким образом, точность метода М. Е. Швеца зависит от вида f_0, более заполненные профили f_{04}, f_{05} дают погрешность в 1.5 раза меньшую, чем профиль f_{01}.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что метод М. Е. Швеца может быть использован в инженерных расчетах МГД-задач, погрешность расчета в общем зависит от величины параметра магнитогидродинамического взаимодействия и в ряде случаев, представляющих технический интерес, она не превышает 10%.

Авторы благодарят аспиранта НИИ механики МГУ А. С. Попеля за помощь, оказанную при решении уравнения (4.1) на ЭЦВМ.

Поступило 13 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
2. Шарикадзе Д. В. О приближенном решении некоторых стационарных задач пограничного слоя с учетом магнитного поля. Сообщения АН ГрузССР, 1966, т. 43, № 3, стр. 551—554.
3. Rossow V. I. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of transverse Magnetic field. NACA Report, 1958, No. 1358.
4. Hunt I. C. R. Magnetohydrodynamic flow in an rectangular ducts. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 4, pp. 577—590.
5. **Волков В. И.** Об одном уточнении метода Кармана — Польгаузена в теории пограничного слоя. Инж. физ. ж., 1965, т. 9, № 5, стр. 583—588.
6. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А. Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, № 1, стр. 47—50.
7. Бузникова Л. И., Иотковский Б. Г., Кириллов В. В. О приближенном решении уравнений пограничного слоя на стенках МГД-генератора. В сб.: «Магнитогидродинамический метод получения электроэнергии». М., «Энергия», 1968.