5. Буевич Ю. А. О сопротивлении движению частицы, взвешенной в турбулизованной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Джрбашян Э. Т. Об относительной скорости движения твердых частиц в турбулентном потоке. Изв. АН АрмССР, Сер. техн. н., 1963, т. 16, № 2—3.
7. Броунштейн Б. И., Тодес О. М. Вычисление пульсационных скоростей и коэффициентов тепло- и массопередачи для твердых частиц, взвешенных в турбулентном потоке. Тр. Одесского ун-та, Сер. физ. н., 1962, т. 152, вып. 8.
8. Tchen C. M. Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent flow. Haque, 1947.
9. Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Стесненное падение шара в цилиндрической трубке. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 3.
10. Броунштейн Б. И., Тодес О. М. Основы теории пневматического транспорта, 1. Ж. техн. физ., 1953, т. 23.
11. Горбис З. Р. Теплообмен дисперсных сквозных потоков М.— Л., Энергия, 1964.

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОЙ ФОРМЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. Н. САЛЬНИКОВ, С. Н. ОКА

(*Белград*)

Ряд авторов (Л. Г. Лойцянский [1], В. Я. Шкадов [2]) указали возможные формы уравнений Прандтля теории пограничного слоя, не содержащие ни в своем составе, ни в граничных условиях скорость внешнего потока, отличающую отдельные конкретные задачи. Такие уравнения получили наименование универсальных.

Ниже предлагается новый выбор независимых переменных, позволяющих в случае произвольной внешней скорости получить универсальные уравнения ламинарного пограничного слоя, и приводится вывод этих уравнений.

Выберем в качестве переменных наряду с независимой и зависимой переменными Гертлера [3]

$$\eta = U(x)y\left[2\nu\int_0^x U(x)dx\right]^{-1/2}, \qquad F = \psi(x,y)\left[2\nu\int_0^x U(x)dx\right]^{-1/2} \tag{1}$$

Здесь x, y — продольная и поперечная координаты, $U(x)$ — упомянутая выше скорость внешнего потока, а ψ — функция тока. Еще выберем бесконечную систему независимых между собой переменных

$$\beta_{(k)}(x) = \xi^{k-1}\frac{d^{k-1}\beta}{d\xi^{k-1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Здесь $\beta_{(1)}$ представляет собой известную главную функцию Гертлера

$$\beta_1 = \beta = \frac{2U'(x)}{U^2/x}\int_0^\infty U(x)dx = \frac{2\xi}{U(\xi)}\frac{dU}{d\xi}$$

выраженную в переменной

$$\xi = \frac{1}{\nu}\int_0^x U(x)dx \tag{4}$$

Простое дифференцирование показывает, что существует рекуррентное соотношение

$$\xi\beta'_{(k)}(\xi) = [(k-1)\beta_{(k)} + \beta_{(k+1)}] = B_k \tag{5}$$

между производной от переменной $\beta_{(k)}$ и последующими переменными.

Производя в уравнении

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + F\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \beta(\xi)\left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2\right] = 2\xi\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)$$

$$F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta} \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty \tag{6}$$

легко выводимом из уравнения Прандтля для функции тока в случае плоского стационарного пограничного слоя путем перехода к переменным (1) и (4) и замены переменных (ξ, η; F) переменными (η, $\beta_{(1)}$, $\beta_{(2)}$, ..., $\bar{F}$), связанными, согласно (5), с предыдущими переменными соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d\beta_{(k)}}{d\xi}\frac{\partial}{\partial \beta_{(k)}} = \frac{1}{\xi}\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\partial}{\partial \beta_{(k)}}, \tag{7}$$

$$F(\xi, \eta) = \bar{F}(\eta, \beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \ldots)$$

придем к следующему универсальному уравнению в новых переменных

$$\frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial \eta^3} + \bar{F}\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} + \beta_{(1)}\left[1 - \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta}\right)^2\right] = 2\sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta \partial \beta_{(k)}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\frac{\partial F}{\partial \beta_{(k)}}\right) \tag{8}$$

$$\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty$$

Решение этого уравнения возможно только в каких-то конечных отрезках, получаемых сбрасыванием того или другого количества переменных и производных по ним. Интересно отметить, что однопараметрическое уравнение, соответствующее сбрасыванию всех переменных $\beta_{(k)}$, начиная с $k = 2$, в силу равенства (5), при $k = 1$, сводящегося к $B_1 = 0$, будет иметь вид уравнения Фокнера — Скэн [4]

$$\frac{\partial^3 \bar{F}^{(1)}}{\partial \eta} + \bar{F}^{(1)}\frac{\partial^2 \bar{F}^{(1)}}{\partial \eta} + \beta_{(1)}\left[1 - \left(\frac{\partial \bar{F}^{(1)}}{\partial \eta}\right)^2\right] = 0$$

$$\bar{F}^{(1)} = \frac{\partial \bar{F}^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial \bar{F}^{(1)}}{\partial \eta} \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty \tag{9}$$

что позволяет в этом приближении соответствующем известному однопараметрическому решению Кочина — Лойцянского [5], пользоваться таблицами Хартри [6].

Приведем общий вид двухпараметрического уравнения

$$\frac{\partial^3 \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta^3} + \bar{F}^{(2)}\frac{\partial^2 \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta^2} + \beta_1\left[1 - \left(\frac{\partial \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta}\right)^2\right] =$$

$$= 2\beta_{(2)}\left[\frac{\partial \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta\, \partial \beta_{(1)}} + \frac{\partial^2 \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta\, \partial \beta_{(2)}}\right) - \frac{\partial \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \bar{F}^{(2)}}{\partial \beta_{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \beta_{(2)}}\right)\right]$$

$$\bar{F}^{(2)} = \frac{\partial \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial \bar{F}^{(2)}}{\partial \eta} \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty \tag{10}$$

Решение уравнения (10) может производиться как разложением в степенной ряд по переменным $\beta_{(1)}$ и $\beta_{(2)}$, так и непосредственным численным интегрированием ЭВЦМ.

Поступило 14 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, стр. 70—87.
2. Шкадов В. Я. Пограничный слой с градиентом давления в потоке сжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
3. Görtler H. A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows. J. Math. and Mech., 1957, vol. 6, No. 1, pp. 1—66.
4. Falkner V. M., Skan S. W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Philos Mag. 1931, vol. 12, 865: ARC Report, 1930, 1314.
5. Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя. Докл. АН СССР, т. 30, 1, Но. 9.
6. Лойцянский Л. Г. Теория пограничного слоя. М., Физматгиз, 1962.