ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Удар пластинки о воду, имеющую конечную глубину. Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 152.
2. Гуревич М. И. Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуцилиндра. ППМ, 1939, т. 3, вып. 2.
3. Парышев Э. В. Влияние вертикальных стенок канала на удар и глиссирование плоско-килеватой пластины. Техн. отчеты ЦАГИ, 1961, № 212.
4. Мазур В. Ю. Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.— Л., Физматгиз, 1963.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОГО ТЕЛА В ВОЗМУЩЕННОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Л. ЯКИМОВ

(*Москва*)

Рассматривается плоская задача об определении сил, действующих на движущийся деформируемый контур, который находится в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Показано, что выражение для сил и моментов может быть представлено в виде четырех слагаемых: 1) силы и моменты, которые действовали бы на недеформируемый контур, 2) силы и моменты, связанные с изменением присоединенных масс контура, 3) силы и моменты, связанные только с деформацией контура, 4) силы и моменты, аналогичные архимедовой силе, но пропорциональные конвективному ускорению скорости «внешнего потока» с учетом перемещения контура.

Вывод соответствующих выражений сделан в предположении достаточной малости характерных размеров контура по сравнению с характерным размером внешнего потока

$$L \operatorname{grad} |\mathbf{U}| \ll |\mathbf{v} - \mathbf{U}| \tag{1}$$

Здесь L — характерный размер тела; $\mathbf{v}$ — скорость тела; $\mathbf{U}$ — скорость «внешнего» течения вблизи контура, которая была бы при отсутствии контура.

Полученные выражения далее используются для составления уравнений движения тонкого тела, когда длина тела соизмерима, а его поперечный размер мал по сравнению с характерным размером внешнего потока, например длиной ветровой волны. Пусть удлиненное тело движется в жидкости. Рассмотрим плоские слои жидкости, перпендикулярные в данный момент продольной оси тела.

Выделим некоторый слой жидкости, состоящий из одних и тех же частиц. В следующий момент плоскости, ограничивающие рассматриваемый слой жидкости, превратятся в некоторые поверхности за счет пространственного характера обтекания тела и наличия внешнего потока.

Однако вследствие тонкости тела и малости поперечных размеров его по сравнению с характерным масштабом внешнего потока, искажением поверхностей, ограничивающих рассматриваемый слой в окрестности тела, можно пренебречь. При этом через рассматриваемый слой жидкости будут проходить различные сечения тела вследствие движения тела вдоль продольной оси и перемещения слоя жидкости.

Для определения суммарных сил и момента, действующих на тело со стороны жидкости, достаточно просуммировать силы и моменты, действующие на тело со стороны слоя жидкости.

Рассмотрим плоскую задачу о потенциальном обтекании деформируемого жидкого контура в идеальной несжимаемой жидкости. Тогда при отсутствии циркуляции имеем следующие выражения для сил и моментов [1]:

$$\mathbf{F} = X + iY = \overline{\frac{i\rho}{2}\int\limits_c \left(\frac{dw}{dz}\right)^2} + \frac{d}{dt}\left[\rho\frac{dSz^*}{dt} + i\rho\int\limits_c z\frac{dw}{dz}dz\right] \tag{2}$$

$$m = \operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2}\int\limits_c z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz + \frac{\rho}{2}\int\limits_c z\bar{z}\frac{dw}{dz}dz\right] \tag{3}$$

Здесь $z = x + iy$; $w(z) = \varphi + i\psi$ — характеристическая функция; ρ — плотность жидкости, c — граница контура; S — площадь контура; z^* — координаты центра тяжести контура; t — время. На границе контура выполняется следующее условие:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_c = V_n(s, t) \tag{4}$$

Здесь s — длина дуги на контуре, V_n — проекция скорости границы контура на внешнюю нормаль.

Представим w в виде суммы трех комплексных функций

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \tag{5}$$

Будем считать w_1 комплексным потенциалом внешнего потока. На контуре

$$\overline{\frac{dw}{dz}} = U(s, t) \tag{6}$$

Пусть $w_2(z, t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_n + [\mathbf{v} - \mathbf{U}(s, t)]_n, \qquad \operatorname{grad}\varphi_2 \underset{z\to\infty}{\to} 0 \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — некоторая характерная скорость контура. Положим, что $\mathbf{v}$ равна составляющей скорости точки пересечения продольной оси тела с рассматриваемым слоем жидкости. Так как потенциал w_1 внутри контура регулярен

$$\int_s U_n(s, t)\, ds = 0, \qquad \int_s \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} ds = 0 \tag{8}$$

Подставив (6) и (7) в (4), для $w_3(z, t)$ получим следующее условие:

$$\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\right|_c = V_n - [\omega \times r] - v_n, \qquad \operatorname{grad}\varphi_3 \underset{z\to\infty}{\to} 0 \tag{9}$$

Таким образом, потенциал w_3 связан с деформацией контура или его смещением относительно выбранной характерной точки.

Из условий (8) следует, что главные члены в разложении производных от w_2 и w_3 по z в окрестности точки $z = \infty$ будут

$$\frac{dw_2}{dz} = \frac{a_2(t)}{z^2} + \ldots, \qquad \frac{dw_3}{dz} = \frac{b_1(t)}{z} + \frac{b_2(t)}{z^2} + \ldots \tag{10}$$

При анализе выражения для силы (2) и граничных условиях (7) будем считать, что в данный момент t_0 начало неподвижной системы координат находится в центре тяжести контура, а на границе контура вследствие условия (1) зависимостью U от s можно пренебречь

$$z^*(t_0) = 0, \qquad \mathbf{U}(s, t) \approx \mathbf{u}(z^*, t) = \mathbf{u}(t) \tag{11}$$

Подставим в (2) выражение (5). Учитывая (10), (11), получаем при $t = t_0$

$$\mathbf{F} = X + iY = \frac{i\rho}{2}\int_c \overline{2u\frac{b_1}{z}}\, dz + \rho\frac{dz^*}{dt}\frac{dS}{dt} + \rho S\frac{d^2z^*}{dt^2} +$$

$$+ i\rho\frac{d}{dt}\int_c z\frac{dw_1}{dz} dz + i\rho\frac{d}{dt}\int_c z\frac{dw_2}{dz} dz + i\rho\frac{d}{dt}\int_c z\frac{dw_3}{dz} dz \tag{12}$$

Представим dz^* / dt в виде

$$\frac{dz^*}{dt} = \frac{dz_1^*}{dt} + \frac{dz_2^*}{dt} + \frac{dz_3^*}{dt} \tag{13}$$

где

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \mathbf{u}(t), \qquad \frac{dz_2^*}{dt} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + y\omega - ix\omega \tag{14}$$

Из условия отсутствия циркуляции следует, что

$$\operatorname{Im} b_1(t) = 0, \qquad \Gamma = \operatorname{Re}\int\limits_c \frac{dw}{dz}\,dz = \operatorname{Re}\int\limits_c \frac{dw_3}{dz}\,dz = \operatorname{Re}(2\pi i b_1)$$

Это выражение равно нулю, только при $\operatorname{Im} b_1(t) = 0$. Кроме того

$$\frac{dS}{dt} = -i\int\limits_c \frac{dw_3}{dz}\,dz = -i\int\limits_c \frac{b_1}{z}\,dz = 2\pi b_1 \tag{15}$$

Отсюда

$$\overline{\frac{i\rho}{2}\int\limits_c 2\bar{\mathbf{u}}\frac{b_1}{z}\,dz} = \overline{i\rho\bar{\mathbf{u}}\int\limits_c \frac{b_1}{z}\,dz} = -\overline{\rho\mathbf{u}2\pi b_1} = -\rho\mathbf{u}\frac{dS}{dt} \tag{16}$$

$$\int\limits_c z\frac{dw_1}{dz}\,dz = 0 \tag{17}$$

Подставляя (13) — (17) в (12), получаем

$$X + iY = \rho\frac{dz_2^*}{dt}\frac{dS}{dt} + \rho\frac{dz_3^*}{dt}\frac{dS}{dt} + \rho S\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \rho S\frac{d^2z^*}{dt^2} + i\rho\frac{d}{dt}\int\limits_c z\frac{dw_2}{dz}\,dz +$$
$$+ i\rho\frac{d}{dt}\int\limits_c z\frac{dw_3}{dz}\,dz = \rho S\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \rho\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(z_2^*S) + i\rho\int\limits_c z\frac{dw_2}{dz}\,dz\right] +$$
$$+ \rho\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(z_3^*S) + i\rho\int\limits_c z\frac{dw_3}{dz}\,dz\right] = \rho S\frac{d\mathbf{u}}{dt} + i\rho\frac{d}{dt}\int\limits_c z\,d\varphi_2 + i\rho\frac{d}{dt}\int\limits_c z\,d\varphi_3 \tag{18}$$

Здесь используется преобразование, указанное в [1], именно

$$\frac{dSz_i^*}{dt} = \int\limits_c z\,d\psi_i$$

Делая далее преобразования, аналогичные [1], можно представить второй член в виде

$$i\rho\int\limits_c z\,d\varphi_2 = I_{2x} + iI_{2y} = I_2$$

$$-I_{2x} = \lambda_{11}(v_x - u_x) + \lambda_{21}(v_y - u_y) + \lambda_{31}\omega$$
$$I_{2y} = \lambda_{21}(v_x - u_x) + \lambda_{22}(v_y - u_y) + \lambda_{32}\omega \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, ω, λ_{ij} определяются в подвижной системе координат в плоскости ζ. Выражение для гидродинамической силы имеет вид

$$X + iY = \rho S\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + i\rho\frac{d}{dt}\int\limits_c z\,d\varphi_3 =$$
$$= \rho S\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\partial I_2}{\partial t} + i\omega I_2 + i\rho\frac{d}{dt}\int\limits_c \zeta\,d\varphi_3 + \rho\omega\int\limits_c \zeta\,d\varphi_3$$

$$\zeta = (z - z_c)\exp i\int\limits_{t_0}^{t}\omega\,dt$$

Здесь знак частной производной принят для обозначения полной производной по времени в подвижной системе координат. Раскрывая эту производную по времени, имеем

$$\frac{\partial I_{2x}}{\partial t} = -\lambda_{11}\frac{\partial}{\partial t}(v_x - u_x) + \lambda_{22}\frac{\partial}{\partial t}(v_y - u_y) - \lambda_{31}\frac{\partial\omega}{\partial t} -$$
$$-(v_x - u_x)\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial t} - (v_y - u_y)\frac{\partial\lambda_{21}}{\partial t} - \omega\frac{\partial\lambda_{31}}{\partial t}$$
$$\frac{\partial I_{2y}}{\partial t} = -\lambda_{21}\frac{\partial}{\partial t}(v_x - u_x) - \lambda_{22}\frac{\partial}{\partial t}(v_y - u_y) - \lambda_{32}\frac{\partial\omega}{\partial t} -$$
$$-(v_x - u_y)\frac{\partial\lambda_{21}}{\partial t} - (v_y - u_y)\frac{\partial\lambda_{22}}{\partial t} - \omega\frac{\partial\lambda_{32}}{\partial t} \tag{20}$$

Таким образом в выражении для силы имеем четыре группы членов: первый член связан с полной производной скорости внешнего потока в центре тяжести контура; вторая группа членов связана с изменением относительной и угловой скорости тела; следующая группа членов связана с изменением присоединенных масс; интеграл в двух последних членах связан только с деформацией контура или движением выбранной характерной точки относительно контура.

Рассмотрим теперь выражение для моментов (3). Удобно перейти к системе координат, движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{u}(t_0)$. Представив, как и раньше, комплексный потенциал в виде $w = w_1 + w_2 + w_3$, имеем

$$\frac{\partial w_1}{dz}\bigg|_c = \mathbf{U}(s,t) - \mathbf{u}(t_0) \approx \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\bigg|_c = [\mathbf{v} - \mathbf{u}(t_0) - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(t_0))]_n + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_n = [\mathbf{v} - \mathbf{u}]_n + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_n$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n}\bigg|_c = [\mathbf{V}(s,t) - \mathbf{u}(t_0)]_n - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_n - [\mathbf{v} - \mathbf{u}(t_0)]_n = [\mathbf{V}(s,t) - \mathbf{v}]_n - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_n$$

$$\operatorname*{grad}_{z\to\infty} \varphi_2 \to 0, \qquad \operatorname*{grad}_{z\to\infty} \varphi_3 \to 0$$

Таким образом, выражения производных для φ_2 и φ_3 сохраняют прежний вид (7) и (9), и следовательно, w_2 и w_3 имеют также тот же вид, что при анализе выражения для сил. Имея в виду, что на контуре

$$\frac{dw_1}{dz}\bigg|_{t=t_0} \simeq 0$$

и учитывая разложение для w_2 и w_3, получаем

$$\operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2}\int\limits_c z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right] = 0$$

Кроме того

$$\frac{\rho}{2}\int\limits_c z\bar{z}\frac{dw_1}{dz}dz = \frac{\rho}{2}\frac{dw_1}{dz}\bigg|_{z=z^*}\int\limits_c z\bar{z}\,dz = \frac{\rho}{2}\frac{dw_1}{dz}2iSz^* = \rho Sz^* i\frac{dw_1}{dz}$$

Отсюда вследствие равенства

$$\frac{dw_1}{dz}\bigg|_{z=z^*} = 0, \quad t = t_0$$

имеем

$$\operatorname{Re}\frac{d}{dt}\left(i\rho Sz^*\frac{dw_1}{dz}\right) = \operatorname{Re}\left(i\rho Sz^*\frac{d\bar{u}}{dt}\right) = \rho S\left[x^*\frac{du_y}{dt} - y^*\frac{du_x}{dt}\right]$$

Таким образом, выражение для момента можно представить в виде

$$m = \operatorname{Re}\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_c z\bar{z}\frac{dw_2}{dz}dz + \operatorname{Re}\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_c z\bar{z}\frac{dw_3}{dz} + \rho S\left(x^*\frac{du_y}{dt} - y\frac{du_x}{dt}\right)$$

Обозначим

$$N = \operatorname{Re}\frac{\rho}{2}\int\limits_c z\bar{z}\frac{dw_2}{dz}dz = \frac{\rho}{2}\int\limits_c z\bar{z}\,d\varphi_2$$

Аналогично [1] можно получить

$$-N = \lambda_{13}(v_x - u_x) + \lambda_{23}(v_y - u_y) + \lambda_{33}\omega \tag{21}$$

Полная производная по времени от N в подвижной системе координат следующим образом [2] имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{Re}\{-i[v_x - u_x - i(v_y - u_y)]\,\mathrm{I}_2\} \tag{22}$$

тогда

$$m = -\lambda_{13}\frac{\partial}{\partial t}(v_x - u_x) - \lambda_{23}\frac{\partial}{\partial t}(v_y - u_y) - \lambda_{33}\frac{\partial\omega}{\partial t} - (v_x - u_x)\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial t} - (v_y - u_y)\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial t} -$$

$$-\omega\frac{\partial\lambda_{33}}{dt}+\mathrm{Re}\,\{-i\,[v_x-u_x-i(v_y-u_y)]\,I_2\}+\rho S\left(x^*\frac{du_y}{dt}-y^*\frac{du_x}{dt}\right)+$$

$$+\rho\,\mathrm{Re}\left[\overline{v\int\limits_c z_n\,d\varphi_3}+i\omega z^*\overline{\int\limits_c z_n\,d\varphi_3}\right]+\mathrm{Re}\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_c z_n\bar{z}_n\,d\varphi_3 \tag{23}$$

Очевидно, что, как и раньше, последние слагаемые связаны с деформацией контура. Раскрывая скалярное произведение, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\{-i\,[v_x-u_x-i(v_y-u_y)]\,I_2\}&=\mathrm{Re}\,\{-i\,[v_x-u_x-i(v_y-u_y)]\,(I_{2x}+iI_{2y})\}=\\&=(v_x-u_x)I_{2y}-(v_y-u_y)I_{2x}\end{aligned} \tag{24}$$

Для удобства переобозначим оси координат: $x\to y$, $y\to z$, $z\to x$. Связанную систему координат выберем так, чтобы ось x была направлена на продольной оси тела; оси y и z лежат в плоскости, перпендикулярной этой оси. Рассмотрим производные $\partial\lambda_{ij}/\partial t\cdot\lambda_{ij}$ меняются вследствие продвижения тела относительно слоя жидкости (в этом случае производные $\partial\lambda_{ij}/\partial t$ будут порядка $(\partial\lambda_{ij}/\partial x)(dx/dt)$, и вследствие поворота тела относительно слоя жидкости (поворот характеризуется углом φ — между плоскостью слоя жидкости в начальный момент и плоскостью, перпендикулярной продольной оси тела). Так как в начальный момент оси, связанной системой координат, и системы координат в плоскости слоя жидкости параллельны, то максимальные искажения всех длин будут порядка

$$\Delta l=(1-\cos\varphi)\,l\sim{}^1/_2\varphi^2 l$$

Поэтому производные от поворота

$$\frac{\partial\lambda_{ij}(l)}{\partial t}=\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial l}\frac{dl}{dt}\sim O(\varphi)$$

и равны нулю в начальный момент времени. Следовательно, учитывая, что $dx/dt=-(v_x-u_x)$, можно положить

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x}\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x}(v_x-u_x)$$

Пусть координаты точки пересечения продольной оси тела с некоторым слоем жидкости в связанной системе координат будут $(x,0,0)$ и скорость начала связанной системы $V=(V_x,V_y,V_z)$, угловая скорость $\omega=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$, тогда

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]$$

В этом случае выражения для сил и моментов в связанной системе координат будут иметь вид

$$\begin{aligned}Y=&-\lambda_{22}\left[\frac{\partial V_y}{\partial t}-\frac{\partial u_y}{\partial t}+x\frac{\partial\omega_z}{\partial t}-(V_x-u_x)\omega_x\right]-\\&-\lambda_{32}\left[\frac{\partial V_z}{\partial t}-\frac{\partial u_z}{\partial t}-x\frac{\partial\omega_y}{\partial t}+(V_x-u_x)\omega_y\right]-\lambda_{24}\frac{\partial\omega_x}{\partial t}+\\&+[V_y-u_y+\omega_z x]\frac{\partial\lambda_{22}}{\partial x}(V_x-u_x)+[V_z-u_z-\omega_y x](V_x-u_x)\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial x}+\omega_x(V_x-u_x)\frac{\partial\lambda_{24}}{\partial x}-\\&-\omega_x[-\lambda_{23}(V_y-u_y+\omega_z x)-\lambda_{33}(V_z-u_z-\omega_y x)-\lambda_{34}\omega_x]+\\&+\rho S\left(\frac{du_0}{dt}\right)_y+\frac{\partial}{\partial t}Y_3+\omega_x Z_3\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}Z=&-\lambda_{23}\left[\frac{\partial V_y}{\partial t}-\frac{\partial u_y}{\partial t}+x\frac{\partial\omega_z}{\partial t}-\omega_z(V_x-u_x)\right]-\\&-\lambda_{33}\left[\frac{\partial V_z}{\partial t}-\frac{\partial u_z}{\partial t}-x\frac{\partial w_y}{\partial t}+(V_x-u_x)w_y\right]-\lambda_{34}\frac{\partial w_x}{\partial t}+\\&+[V_y-u_y+\omega_{zx}](V_x-u_x)\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial x}+\omega_x[-\lambda_{22}(V_y-u_y+\omega_z x)-\end{aligned}$$

$$- \lambda_{23}(V_z - u_z - \omega_y x) - \lambda_{24}\omega_x] + [V_z - u_z - \omega_y x](V_x - u_x)\frac{\partial \lambda_{33}}{\partial x} +$$

$$+ \omega_x(V_x - u_x)\frac{\partial \lambda_{34}}{\partial x} + \rho S\left(\frac{du_0}{dt}\right)_z + \frac{\partial}{\partial t} Z_3 - \omega_x Y_3 \qquad (26)$$

$$m_x = -\lambda_{24}\left[\frac{\partial V_y}{\partial t} - \frac{\partial u_y}{\partial t} + x\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \omega_z(V_x - u_x)\right] - \lambda_{34}\left[\frac{\partial V_z}{\partial t} - \frac{\partial u_z}{\partial t} - x\frac{\partial \omega_y}{\partial t} +\right.$$

$$\left. + \omega_y(V_x - u_x)\right] - \lambda_{44}\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + (V_y - u_y + \omega_z x)(V_x - u_x)\frac{\partial \lambda_{24}}{\partial x} +$$

$$+ (V_z - u_z - \omega_y x)(V_x - u_x)\frac{\partial \lambda_{34}}{\partial x} + \omega_x(V_x - u_x)\frac{\partial \lambda_{44}}{\partial x} + (V_y - u_y + \omega_z x) \times$$

$$\times [-\lambda_{23}(V_y - u_y + \omega_z x) - \lambda_{33}(V_z - u_z - \omega_y x) - \lambda_{34}\omega_x] - (V_z - u_z - \omega_y x) \times$$

$$\times [-\lambda_{22}(V_y - u_y + \omega_z x) - \lambda_{23}(V_z - u_z - \omega_y x) - \lambda_{24}\omega_x] +$$

$$+ \left[z^* x \rho S \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right] + m_3 + V_y Z_3 + V_z Y_3 \qquad (27)$$

Здесь V_x, V_y, V_z — скорость движения начала связанной системы координат; ω_x, ω_y, ω_z — скорость вращения твердого тела; u_x, u_y, u_z — скорость внешнего потока в связанной системе; $\lambda_{ij}(x)$ — присоединенные массы элементарного сечения с координатой в связанной системе координат; Y_3, Z_3, m_3 — интегралы, связанные только с деформацией контура.

Результирующее воздействие жидкости на тело найдется из элементарных воздействий при помощи обычных правил сложения и переноса сил и моментов сил

$$R_y = \int_{x_1}^{x_2} Y\,dx, \quad R_z = \int_{x_1}^{x} Z\,dz \quad \mathbf{M} = \int_{x_1}^{x_2} \{m_x + [x, jR_y + kR_z]\}\,dx \qquad (28)$$

где x — вектор с координатами $(x, 0, 0)$. Интегрирование ведется по всей смоченной длине тела.

Если рассматривается движение твердого тела, то интегралы, связанные с деформацией каждого сечения относительно соответствующего слоя жидкости, будут пропорциональны $(V_x - u_x)$ или при достаточно большой скорости поступательного движения пропорциональны просто V_x и выражениям, зависящим только от геометрии тела.

Поступило 19 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэромеханики. Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Изд. 6, М., Физматгиз, 1963.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

А. В. СМОЛЬЯКОВ, В. М. ТКАЧЕНКО

(*Ленинград*)

Приводятся результаты измерения продольного, поперечного и диагонального взаимных спектров и фазовой скорости для поля турбулентных пульсаций давления на стенке. Данные относятся к развитому пограничному слою с нулевым градиентом среднего давления. Измерения проводились при числах Рейнольдса $0{,}35 \cdot 10^8$ и $1{,}1 \cdot 10^8$ на экспериментальной установке, которая аналогична использованной Скучиком [1].

1. Статистические характеристики поля турбулентных давлений на уровне двухточечных моментов второго порядка можно получать измерением пространственно-временных корреляций. Однако вместо этого в последнее время часто изме-