

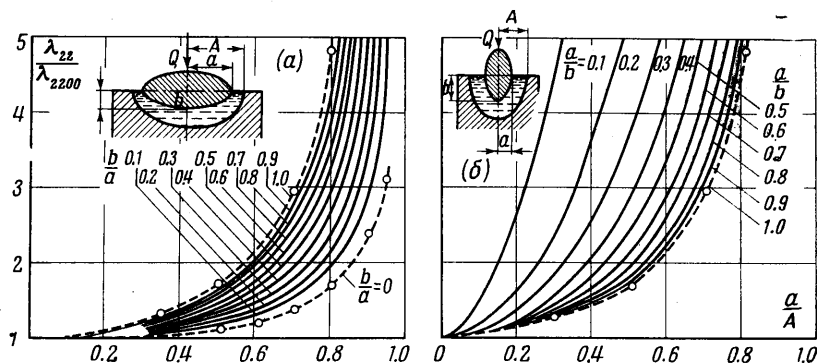
ПЯТЬ ЗАДАЧ О ВЛИЯНИИ ТВЕРДОГО ЭКРАНА НА ПРИСОЕДИНЕННУЮ МАССУ ПЛАВАЮЩИХ ПИЛОНДИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ УДАРЕ

В. М. БОТВИНКОВ, А. М. ПОЛУНИН

(Новосибирск)

Количество работ, посвященных влиянию стенки канала на присоединенную массу плавающих цилиндрических тел при вертикальном ударе, невелико. Это работы: М. В. Келдыша [1], М. И. Гуревича [2], Э. В. Парышева [3], В. Ю. Мазура [4].

В данной работе прямым методом в криволинейных координатах (при обычных допущениях, принимаемых в теории гидродинамического удара) решаются задачи о вертикальном ударе: горизонтально и вертикально расположенных эллипсов, руководствуясь большой осью в софокусных сосудах; цилиндров, плавающих: эксцентрично в полцилиндрическом сосуде, вблизи вертикальной стенки и вблизи неподвижного цилиндра. Решения справедливы для любой близости ударяемого контура к стенке канала.



Фиг. 1. Увеличение присоединенной массы горизонтального (а) и вертикального (б) эллиптического цилиндра в софокусном эллиптическом канале

1. *Горизонтальный и вертикальный эллипсы в софокусных каналах* (Фиг. 1). Пусть по эллиптическому цилиндру, наполовину погруженному в идеальную жидкость, заполняющую канал в форме эллиптического цилиндра, в направлении сверху вниз действует ударный импульс Q (на единицу длины).

Согласно закону количества движения

$$Q = (m + \mu)V_0 \quad \left(\mu = -\frac{\rho}{V_0} \int_S u \cos(ny) dS \right) \quad (1)$$

Здесь V_0 — скорость цилиндра в момент после удара; m — масса единицы длины цилиндра; μ — присоединенная масса; ρ — плотность жидкости; (n, y) — угол между направлением удара и внешней нормалью к погруженной поверхности цилиндра; dS — элемент погруженной поверхности S , по которой производится интегрирование; u — функция, удовлетворяющая для области, занимаемой жидкостью, уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях: $u = 0$ на свободной поверхности; $du/dn = 0$ на стенках канала; $du/dn = V_n$, где V_n — нормальная составляющая скорости на погруженной поверхности цилиндра; $d\phi/dn = 0$ на стенке канала.

Для нахождения величины μ введем на плоскости Oxy координаты α и β , связанные с декартовыми координатами соотношениями соответственно для горизонтального и вертикального эллипсов [5]

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, & y &= c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \\ x &= c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, & y &= c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (2)$$

Координатные линии — софокусные эллипсы ($\alpha = \operatorname{const}$) соответственно

$$\left(\frac{x}{c \operatorname{ch} \alpha} \right)^2 + \left(\frac{y}{c \operatorname{sh} \alpha} \right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x}{c \operatorname{sh} \alpha} \right)^2 + \left(\frac{y}{c \operatorname{ch} \alpha} \right)^2 = 1 \quad (3)$$

и ортогональные к ним софокусные с ними гиперболы, соответственно ($\beta = \text{const}$)

$$\left(\frac{x}{c \sin \beta}\right)^2 - \left(\frac{y}{c \cos \beta}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{y}{c \sin \beta}\right)^2 - \left(\frac{x}{c \cos \beta}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

Уравнение Лапласа в криволинейных координатах (α, β) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (5)$$

Подстановка коэффициентов Ляме

$$H_\alpha = H_\beta = c\sqrt{\text{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta} \quad (\text{горизонтальный эллипс})$$

$$H_\alpha = H_\beta = c\sqrt{\text{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta} \quad (\text{вертикальный эллипс})$$

приводит это уравнение к виду, одинаковому для обоих случаев

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0 \quad (6)$$

Решение уравнения (6) ищем в форме

$$u = A(\alpha) \cos \beta \quad (7)$$

Это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению $A'' - A = 0$, интеграл которого равен

$$A = C_1 \text{ch } \alpha + C_2 \text{sh } \alpha \quad (8)$$

Тогда для потенциала имеем

$$u = (C_1 \text{ch } \alpha + C_2 \text{sh } \alpha) \cos \beta$$

Условия на свободной поверхности $u = 0$ выполняются, так как в обоих случаях $\beta = \frac{1}{2}\pi$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 удовлетворяют двум оставшимся граничным условиям. Граничное условие на стенке канала

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{C_1}{C_2} = -\text{th } \alpha_2$$

Граничное условие на погруженной поверхности плавающих эллиптических цилиндров записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = V_0 \cos(n, y) \quad (10)$$

Для горизонтального и вертикального эллипсов с учетом (2) соответственно получим

$$\cos(n, y) = \frac{\text{ch } \alpha \cos \beta}{\sqrt{\text{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta}}, \quad \cos(n, y) = \frac{\text{sh } \alpha \cos \beta}{\sqrt{\text{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \quad (11)$$

Из (10) с учетом (9) и (11) получаем постоянные C_1 для горизонтального и вертикального эллипсов соответственно

$$C_1 = V_0 c \frac{\text{ch } \alpha_1}{(\text{sh } \alpha_1 - \text{th } \alpha_2 \text{ch } \alpha_1)}, \quad C_1' = V_0 c \frac{\text{sh } \alpha_1}{(\text{sh } \alpha_1 - \text{th } \alpha_2 \text{ch } \alpha_1)} \quad (12)$$

С учетом (12) выражения для потенциалов запишутся соответственно

$$u = V_0 c \frac{\text{ch } \alpha_1 (\text{ch } \alpha - \text{th } \alpha_2 \text{sh } \alpha) \cos \beta}{(\text{sh } \alpha_1 - \text{th } \alpha_2 \text{ch } \alpha_1)}, \quad u = V_0 c \frac{\text{sh } \alpha_1 (\text{ch } \alpha - \text{th } \alpha_2 \text{sh } \alpha) \cos \beta}{(\text{sh } \alpha_1 - \text{th } \alpha_2 \text{ch } \alpha_1)} \quad (13)$$

Окончательно выражение (12) с учетом формул для элементов поверхностей эллиптических цилиндров

$$dS = c\sqrt{\text{ch}^2 \alpha_1 - \sin^2 \beta} d\beta, \quad dS = c\sqrt{\text{ch}^2 \alpha_1 - \cos^2 \beta} d\beta$$

примет вид:

для горизонтального эллипса

$$\mu = -\rho c^2 \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_1 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1)}{(\operatorname{sh} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1)} 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \beta \, d\beta =$$

$$= \frac{\pi \rho c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1}{2} \frac{(\operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1)}{(\operatorname{sh} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1)} \quad (14)$$

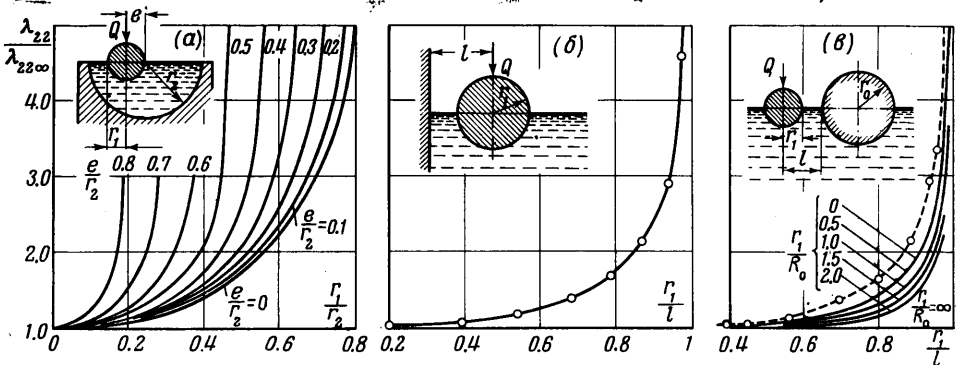
для вертикального эллипса аналогично

$$\mu' = \frac{\pi \rho c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{2} \frac{(\operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1)}{(\operatorname{sh} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1)}$$

Значение $\alpha_2 \rightarrow \infty$ соответствует вертикальному удару эллиптических цилиндров, плавающих на поверхности жидкости, заполняющей все нижнее пространство. В этом случае $\operatorname{th} \alpha_2 = 1$ и получаем известные формулы присоединенных масс [6]

$$\mu_{\infty} = \frac{\pi \rho c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1}{2} = \frac{\pi \rho a^2}{2}, \quad \mu'_{\infty} = \frac{\pi \rho c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1}{2} = \frac{\pi \rho a^2}{2} \quad (15)$$

где a — полуось эллипса, перпендикулярная направлению удара.



Фиг. 2. Увеличение присоединенной массы кругового цилиндра, плавающего эксцентрично в круговом канале (а), вблизи вертикальной стенки (б) и вблизи неподвижно плавающего цилиндра (в)

Теперь, беря отношения μ / μ_{∞} , получаем выражение для коэффициента увеличения присоединенных масс горизонтального и вертикального эллипсов в софокусных сосудах при вертикальном ударе, одинаковое в обоих случаях

$$\frac{\mu}{\mu_{\infty}} = \frac{\operatorname{ch} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1} = \operatorname{cth}(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (16)$$

На фиг. 1 графически представлен результат расчета по формуле (16), причем параметры графиков соответственно выражаются в виде

$$\frac{b}{a} = \operatorname{th} \alpha_1, \quad \frac{a}{A} = \frac{\operatorname{ch} \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_2}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1}, \quad \frac{a}{A} = \frac{\operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_2}$$

2. Цилиндры плавающие:

- эксцентрично в полуцилиндрическом канале;
 - вблизи вертикальной стенки;
 - вблизи неподвижного цилиндра (фиг. 2).
- Пусть по цилиндрам, наполовину погруженным в идеальную жидкость, заполняющую соответствующие каналы, в направлении сверху вниз действует ударный импульс Q (на единицу длины).

Согласно закону количества движения

$$Q = (m + \mu) V_0$$

Здесь V_0 — скорость цилиндра в момент удара; m — масса единицы длины цилиндра; μ — присоединенная масса, равная соотношению (2).

Для нахождения величины μ введем на плоскости Oxy биполярные координаты α и β , связанные с декартовыми координатами следующими соотношениями [5]:

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \quad (17)$$

Координатные линии — окружности $\alpha = \text{const}$

$$(y - c \operatorname{ctg} \alpha)^2 + x^2 = \left(\frac{c}{\sin \alpha} \right)^2$$

пересекающие ось x в точках $\pm c$ и ортогональные к ним окружности $\beta = \text{const}$

$$y^2 + (x - c \operatorname{cth} \beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \beta} \right)^2$$

Уравнение Лапласа в криволинейных координатах (α, β) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0$$

После подстановки коэффициентов Лямэ

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \quad (18)$$

оно принимает окончательный вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0 \quad (19)$$

Ищем решение уравнения (19) в форме

$$u = B(\beta) \sin \alpha \quad (20)$$

(так как на свободной поверхности $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$), где $B(\beta)$ — функция только координаты β , что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно B

$$B'' - B = 0$$

интеграл которого равен

$$B = C_1 \operatorname{ch} \beta + C_2 \operatorname{sh} \beta$$

Тогда потенциал для цилиндра запишется

$$u = (C_1 \operatorname{ch} \beta + C_2 \operatorname{sh} \beta) \sin \alpha \quad (21)$$

Граничное условие на свободной поверхности $u = 0$ выполнено. Произвольные постоянные C_1 и C_2 должны удовлетворять двум оставшимся граничным условиям.

Граничное условие на стенке канала можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = 0 \quad (22)$$

откуда, подставляя в (22) коэффициент Лямэ H_β и производя дифференцирование u по β , получаем связь произвольных постоянных

$$\frac{C_2}{C_1} = - \operatorname{th} \beta_2 \quad (23)$$

Граничное условие на погруженной поверхности плавающих цилиндров записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = V_0 \cos(\widehat{n, y}) \quad (24)$$

где

$$\cos(\widehat{n, y}) = \frac{y}{r} = \frac{\sin \alpha \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}$$

Из (23), (24) при $\beta = \beta_1$ получаем

$$C_1 = \frac{V_0 c \operatorname{sh} \beta}{(\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha)^2 (\operatorname{sh} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1)} \quad (25)$$

С учетом (20) и (23) выражение для потенциала выразится так:

$$u = \frac{V_0 c \operatorname{sh} \beta \sin \alpha (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{sh} \beta)}{(\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha)^2 (\operatorname{sh} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1)} \quad (26)$$

Окончательное выражение (1) с учетом формулы для элемента поверхности цилиндра

$$dS = \frac{c d\alpha}{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha}$$

примет следующий вид:

$$\mu = - \frac{\rho c^2 (\operatorname{ch} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1) \operatorname{sh}^2 \beta_1}{(\operatorname{sh} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1)} \int_{\pi}^0 \frac{\sin^2 \alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha)^4} \quad (27)$$

Подынтегральная функция в (27) не зависит от степени стеснения жидкости сосудом и полностью определяется лишь размерами плавающих цилиндров ($\beta_1 = \text{const}$), а определенный интеграл есть постоянное число.

Рассмотрим случай безграничной жидкости, заполняющей все нижнее полупространство ($\beta_2 \rightarrow -\infty$). Тогда из выражения (29) получаем выражение для присоединенной массы в безграничной жидкости μ_∞ .

Теперь, беря отношение μ / μ_∞ , получаем выражение для коэффициента увеличения присоединенной массы цилиндров при вертикальном ударе, одинаковое для случаев *a*, *b* и *e*

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{sh} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1} = \operatorname{cth} (\beta_1 - \beta_2) \quad (28)$$

Случаю *a* соответствуют значения

$$0 < \beta_2 < \beta_1$$

случаю *b*

$$\beta_2 = 0$$

случаю *e*

$$-\infty < \beta_2 < 0$$

На фиг. 2 графически представлены результаты расчета по выражению (28), причем

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{sh} \beta_1}, \quad \frac{e}{r_2} = \operatorname{ch} \beta_2 - \operatorname{ch} \beta_1 \frac{\operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{sh} \beta_1}$$

$$\frac{r_1}{l} = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_1}, \quad \frac{r_4}{R_0} = \frac{\operatorname{sh} |\beta_2|}{\operatorname{sh} \beta_1}, \quad \frac{r_1}{l} = \left[\operatorname{ch} \beta_1 + \operatorname{ch} \beta_2 \frac{\operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{sh} |\beta_2|} - \frac{\operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{sh} |\beta_2|} \right]^{-1}$$

Выражение (27) соответствует предельному случаю — удару кругового цилиндра, плавающего на поверхности жидкости бесконечной глубины, — при $\beta_1 \rightarrow \infty$; цилиндр вырождается в шнур, и стеснение объема жидкости стенкой канала, характеризуемое величиной β_2 , не проявляется. Тогда из (27) имеем

$$\mu = - \rho c^2 \operatorname{sh}^2 \beta_1 \frac{(1 - \operatorname{th} \beta_2 \operatorname{th} \beta_1)}{(\operatorname{th} \beta_1 - \operatorname{th} \beta_2)} \frac{1}{\operatorname{ch}^4 \beta_1} \int_{\pi}^0 \sin^2 \alpha d\alpha$$

а так как $\operatorname{th} \beta_1 = 1$, $\operatorname{ch} \beta_1 \gg \cos \alpha$ и $\operatorname{sh} \beta_1 \approx \operatorname{ch} \beta_1$ при $\beta_1 \rightarrow \infty$, то

$$\mu = \frac{\pi \rho c^2}{2 \operatorname{sh}^2 \beta_1} = \frac{\pi \rho r^2}{2}, \quad \text{так как } r = \frac{c}{\operatorname{sh} \beta}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Удар пластинки о воду, имеющую конечную глубину. Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 152.
2. Гуревич М. И. Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуцилиндра. ПИМ, 1939, т. 3, вып. 2.
3. Парышев Э. В. Влияние вертикальных стенок канала на удар и глассирование плоско-килеватой пластины. Техн. отчеты ЦАГИ, 1961, № 212.
4. Мазур В. Ю. Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОГО ТЕЛА В ВОЗМУЩЕННОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

Рассматривается плоская задача об определении сил, действующих на движущийся деформируемый контур, который находится в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Показано, что выражение для сил и моментов может быть представлено в виде четырех слагаемых: 1) силы и моменты, которые действовали бы на недеформируемый контур, 2) силы и моменты, связанные с изменением присоединенных масс контура, 3) силы и моменты, связанные только с деформацией контура, 4) силы и моменты, аналогичные архимедовой силе, но пропорциональные конвективному ускорению скорости «внешнего потока» с учетом перемещения контура.

Вывод соответствующих выражений сделан в предположении достаточной малости характерных размеров контура по сравнению с характерным размером внешнего потока

$$L \operatorname{grad} |U| \ll |v - U| \quad (1)$$

Здесь L — характерный размер тела; v — скорость тела; U — скорость «внешнего» течения вблизи контура, которая была бы при отсутствии контура.

Полученные выражения далее используются для составления уравнений движения тонкого тела, когда длина тела соизмерима, а его поперечный размер мал по сравнению с характерным размером внешнего потока, например длиной ветровой волны. Пусть удлиненное тело движется в жидкости. Рассмотрим плоские слои жидкости, перпендикулярные в данный момент продольной оси тела.

Выделим некоторый слой жидкости, состоящий из одних и тех же частиц. В следующий момент плоскости, ограничивающие рассматриваемый слой жидкости, превратятся в некоторые поверхности за счет пространственного характера обтекания тела и наличия внешнего потока.

Однако вследствие тонкости тела и малости поперечных размеров его по сравнению с характерным масштабом внешнего потока, искажением поверхностей, ограничивающих рассматриваемый слой в окрестности тела, можно пренебречь. При этом через рассматриваемый слой жидкости будут проходить различные сечения тела вследствие движения тела вдоль продольной оси и перемещения слоя жидкости.

Для определения суммарных сил и момента, действующих на тело со стороны жидкости, достаточно просуммировать силы и моменты, действующие на тело со стороны слоя жидкости.

Рассмотрим плоскую задачу о потенциальном обтекании деформируемого жидкого контура в идеальной несжимаемой жидкости. Тогда при отсутствии циркуляции имеем следующие выражения для сил и моментов [1]:

$$F = X + iY = \frac{i\rho}{2} \int_c \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{d}{dt} \left[\rho \frac{dSz^*}{dt} + i\rho \int_c z \frac{dw}{dz} dz \right] \quad (2)$$

$$m = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \int_c z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz + \frac{\rho}{2} \int_c z \bar{z} \frac{dw}{dz} dz \right] \quad (3)$$