

Частота колебаний могла непрерывно меняться при помощи реостата в определенном диапазоне. Амплитуда колебаний была равна $a_0 = 0.04$ м. Числа Рейнольдса R и Струхала S^0 , характеризующие режимы обтекания колеблющихся цилиндров, изменялись для цилиндра с $d = 0.16$ м в диапазоне $0.11 \cdot 10^6 \leq R \leq 0.496 \cdot 10^6$, $0.01 \leq S^0 \leq 0.1$; для цилиндра с $d = 0.5$ м в диапазоне $0.346 \cdot 10^6 \leq R \leq 1.55 \cdot 10^6$, $0 \leq S^0 \leq 0.28$. Были обнаружены три характерных режима обтекания колеблющихся цилиндров.

Первый режим соответствует изменению кинематических чисел Струхала $0 \leq S^0 \leq 0.04$. На этом режиме частота измеренных пульсаций давления на поверхности цилиндра, вызванная периодическим срывом вихрей, соответствует аэродинамическому числу Струхала $S \approx 0.2$, так как и у неподвижного цилиндра [3], см. фиг. 1, где точки 1, ..., 8 соответствуют следующим значениям числа Рейнольдса:

точки	1	2	3	4	5	6	7	8
$R \cdot 10^{-6}$	0.110,	0.276,	0.346,	0.496,	0.518,	0.795,	0.862,	1.552

Для правильного понимания механизма автоколебаний цилиндра очень важно знать тот диапазон кинематических чисел Струхала S^0 , при котором может происходить «захват» частоты срыва вихрей частотой колеблющегося цилиндра.

Изучение пульсаций давления в различных точках на поверхности цилиндра показало, что в диапазоне кинематических чисел $0.04 \leq S^0 \leq 0.1$ начинает сказываться влияние колебания цилиндра на частоту схода вихрей.

На фиг. 1 этот режим соответствует второму участку зависимости $S = f(S^0)$, при котором аэродинамическое число Струхала S уменьшается от 0.2 до 0.1.

Третий режим обтекания колеблющегося цилиндра соответствует изменению кинематических чисел Струхала $0.1 \leq S^0 \leq 0.28$. На этом режиме происходит захват частотами колебаний цилиндра частот срыва вихрей. Следует отметить, что на этом режиме отсутствуют точки, соответствующие докритическому обтеканию цилиндра. На фиг. 2 можно видеть срыв вихрей с частотой, равной частоте колеблющегося цилиндра. Этот режим соответствует на фиг. 1 третьему участку кривой $S = f(S^0)$, на котором аэродинамическое число Струхала равно кинематическому $S = S^0$.

Авторы выражают признательность Г. И. Петрову за полезное обсуждение и ценные советы.

Поступило 12 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмина Л. Х., Захаров Ю. Г. Колебания цилиндрических тел в воздушном потоке. В сб.: «Исследования по динамике сооружений», М., Госстройиздат, 1957.
2. Павлихина М. А., Смирнов Л. П. Вихревой след при обтекании колеблющегося цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
3. Петров Г. И., Штейнберг Р. И. Исследование потока за плохообтекаемыми телами. Тр. ЦАГИ, 1940, № 482.
4. Федяевский К. К., Блюмина Л. Х. О периодических пульсациях давления на поверхности цилиндра на закритическом режиме обтекания. Научно-техн. о-во судостроительной пром. Л., 1967, вып. 89.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ ШАРОВОМ СЛОЕ

В. И. ЯКУШИН (Пермь)

Исследуется устойчивость течения в тонком шаровом слое по отношению к малым возмущениям. Показано, что для каждой данной толщины слоя существует последовательность критических чисел Рейнольдса, выше которых движение неустойчиво. Критическое возмущение напоминает по своему виду вторичное течение, возникающее при потере устойчивости основного движения жидкости между вращающимися цилиндрами (задача Тейлора).

1. Исследование гидродинамической устойчивости движения жидкости в замкнутых объемах связано с большими трудностями. Последние обусловлены тем, что до сих пор неизвестно ни одного точного аналитического решения уравнений движения, описывающего основное стационарное течение в замкнутой полости.

Характерным примером такого течения может служить движение жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. Аналитическое выражение для скорости основного движения, возникающего в шаровом слое при медленном вращении одной только внутренней сферы с угловой скоростью Ω , может быть получено [1] в виде ряда по степеням числа Рейнольдса R

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 R + \mathbf{U}_2 R^2 + \dots \quad (1.1)$$

Скорости первого и второго приближений известны [2, 3]

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{a^3 - 1} \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \mathbf{n} \times \mathbf{r} \equiv \varphi(r) \mathbf{n} \times \mathbf{r} \quad \left(a \equiv \frac{r_2}{r_1}, R = \frac{\Omega r_1^2}{\nu} \right) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{U}_2 = F(r) \mathbf{r}_0 P_2 + G(r) r \nabla P_2 \quad (P_2 = 1/2(3 \cos^2 \theta - 1)) \quad (1.3)$$

Здесь $F(r, a)$, $G(r, a)$ — известные функции [3], $a \equiv r_2 / r_1$ — отношение радиусов внешней и внутренней сфер, $R = \Omega r_1^2 / \nu$.

Сходимость разложения (1.1) существенно улучшается с уменьшением толщины слоя $\delta \equiv a - 1$: отношение максимальных значений $|\mathbf{U}_2| / |\mathbf{U}_1|$ порядка 10^{-2} при $\delta \approx 1$ и 10^{-5} при $\delta \approx 0.1$.

Эти оценки показывают, что для тонкого шарового слоя ($\delta \approx 0.1$)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 R \quad (1.4)$$

можно рассматривать как точное решение стационарных уравнений движения вплоть до $R \sim 10^3 \div 10^4$.

2. Рассмотрим устойчивость стационарного течения (1.4) по отношению к малым возмущениям. Выберем в качестве единицы длины r_1 , скорости ν / r_1 и времени r_1^2 / ν . Полагая возмущения скорости \mathbf{u} и давления p пропорциональными $e^{-\lambda t}$, для амплитуд нормальных возмущений получим линейные уравнения [4]

$$\begin{aligned} -\lambda \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_{s_1, s_2} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Исследование устойчивости сводится к вычислению декрементов λ (стационарное движение \mathbf{U} устойчиво, если вещественные части всех декрементов λ положительны).

Краевая задача (2.1) решалась методом Бубнова — Галеркина, причем в качестве базиса выбирались 60 собственных функций задачи о возмущениях неподвижной жидкости в шаровом слое (задача (2.1) при $\mathbf{U} \equiv 0$). Естественно предположить, что в тонком шаровом слое, как и в задаче Тейлора, неустойчивость прежде всего возникает по отношению к аксиально-симметричным возмущениям.

Как известно [3, 5], в неподвижном шаровом слое существуют аксиально-симметричные возмущения двух видов: «азимутальные»

$$\mathbf{u}^{(2)} = h_l(r) \mathbf{r} \times \nabla P_l$$

когда частицы жидкости движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и «меридиональные»

$$\mathbf{v}_l^{(0)} = f_l(r) \mathbf{r}_0 P_l + \frac{(f_l r^2)'}{l(l+1)r} r \Delta P_l$$

в которых отсутствует азимутальная составляющая скорости. Функции f_l и h_l выражаются через функции Бесселя полуполого индекса и обращаются в нуль на внутренней и внешней сферах, $P \equiv P_l(\cos \nu)$ — полиномы Лежандра.

Положим

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^{30} \alpha_l \mathbf{u}_l^{(0)} + \beta_l \mathbf{v}_l^{(0)} \quad (2.2)$$

Стандартной процедурой метода Галеркина уравнения (2.1) приводятся к системе 60 линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (-\lambda + \mu_l^{(0)})\alpha_l + H_{l-1,l}\beta_{l-1} + H_{l,l+1}\beta_{l+1} &= 0 \\ (-\lambda + \nu_l^{(0)})\beta_l + K_{l,l-1}\alpha_{l-1} + K_{l,l+1}\alpha_{l+1} &= 0 \quad (l = 1, \dots, 30) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\mu_l^{(0)}$ и $\nu_l^{(0)}$ — декременты возмущений в неподвижной жидкости и

$$\begin{aligned} H_{mn} &= \int \mu_m^{(0)} [(U\nabla)\nu_n^{(0)} + (\nu_n^{(0)}\nabla)U] dV \\ K_{mn} &= \int \nu_m^{(0)} [(U\nabla)\mu_n^{(0)} + (\mu_n^{(0)}\nabla)U] dV \end{aligned}$$

Из ортогональности полиномов Лежандра вытекает, что интегралы H_{mn} и K_{mn} отличны от нуля только для $m - n = \pm 1$. Таким образом, система (2.3) будет иметь трехдиагональную матрицу с элементами $\mu_l^{(0)}$, $\nu_l^{(0)}$ и

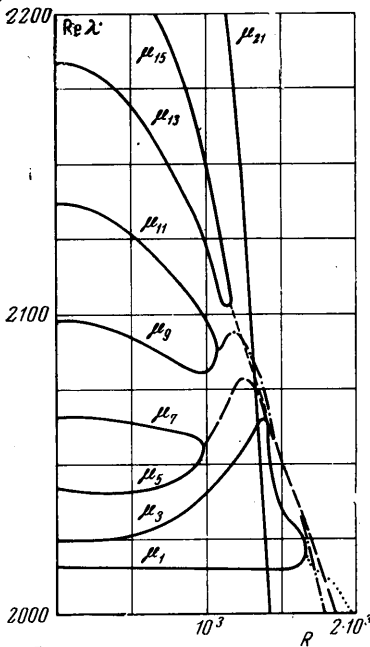
$$\begin{aligned} H_{l+1,l} &= \frac{4\pi(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \int_1^a \left(\frac{2f_l' r \varphi}{l+1} + \frac{4f_l \varphi}{l+1} - 2\varphi f_l - f_l r \varphi' \right) h_{l+1} r^2 dr \\ H_{l-1,l} &= \frac{4\pi(l+1)l}{(2l+1)(2l+3)} \int_1^a \left(2\varphi f_l + f_l r \varphi' + \frac{2\varphi f_l' r}{l} + \frac{4f_l \varphi}{l} \right) h_{l-1} r^2 dr \\ K_{l+1,l} &= -\frac{8\pi l}{(2l+1)(2l+3)} \int_1^a [(l+3)f_{l+1}\varphi + f_{l+1}' r \varphi] h_l r^2 dr \\ K_{l-1,l} &= \frac{8\pi(l+1)}{4l^2 - 1} \int_1^a [(l-2)f_{l-1}\varphi - f_{l-1}' r \varphi] h_l r^2 dr \end{aligned}$$

Возмущения в неподвижной жидкости $\mu_l^{(0)}$ и $\nu_l^{(0)}$ обладают разными свойствами симметрии по отношению к отражению в плоскости экватора. Возмущения $\mu_l^{(0)}$ с нечетными l и $\nu_l^{(0)}$ с четными являются симметричными функциями, а $\mu_l^{(0)}$ с четными и $\nu_l^{(0)}$ с нечетными l — антисимметричные функции относительно отражения в плоскости экватора. Поскольку возмущения разной симметрии ортогональны друг другу, то матрица системы (2.3) будет иметь блочно-диагональную структуру из двух блоков. Таким образом, задача определения декрементов λ свелась к нахождению собственных значений трехдиагональной вещественной матрицы 30-го порядка. Для решения проблемы собственных значений использовался ортогонально-степенной метод [6].

3. Рассмотрим, как изменяются декременты λ с увеличением числа Рейнольдса. На фиг. 1 изображена нижняя часть спектра декрементов симметричных возмущений для $\delta = 0.07$. При малых R все декременты вещественны и положительны. С увеличением числа Рейнольдса ($R > 10^3$) происходит попарное слияние некоторых вещественных декрементов с образованием комплексно-сопряженных пар, т. е. появляются колебательные возмущения, осциллирующие с частотой $\omega = \text{Im } \lambda$. Однако не все декременты стремятся к образованию комплексно-сопряженных пар. Начиная с некоторого номера l , декременты μ возмущений быстро уменьшаются с ростом R , оставаясь вещественными. При некоторых значениях $R = R_i$ эти декременты меняют знак, т. е. стационарное движение U становится неустойчивым¹. Для $\delta = 0.07$ первым таким декрементом является μ_{21} (см. фиг. 1) для симметричных и μ_{22} для антисимметричных возмущений. На фиг. 2, a, b изображены декременты, дающие три нижних критических числа Рейнольдса для симметричных a и антисимметричных b возмущений. Первое критическое число для симметричных возмущений при $\delta = 0.07$ равно 3260. Следующие критические числа можно легко найти из экстраполяции, причем $R_{*2} = 3800$ и $R_{*3} = 4600$.

¹ Наличие дискретного спектра R_i в данной задаче характерно для замкнутой полости. Течение Тейлора в цилиндрическом слое бесконечной длины имеет непрерывный спектр критических чисел $R_*(k)$, где k — волновое число.

Из графика видно, что критические числа для симметричных и антисимметричных возмущений практически совпадают, так что вторичное движение, возникающее при $R > R_{*1}$, может быть как симметричным, так и антисимметричным относительно отражения в плоскости экватора. Заметим, что основное течение (1.4) является симметричным.

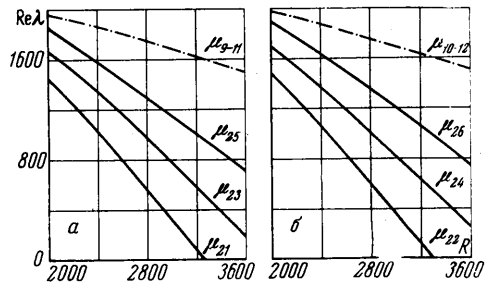


Фиг. 1

На фиг. 3 показаны декременты симметричных возмущений для $\delta = 0.10$. Нижнее критическое число дает декремент возмущения μ_{17} .

Сравнение фиг. 2 и 3 показывает, что критические числа как для $\delta = 0.07$, так и для $\delta = 0.10$ расположены не эквидистантно, причем для $\delta = 0.10$ они лежат гораздо ближе друг к другу, чем при $\delta = 0.07$.

Следует отметить, что вещественные части комплексно-сопряженных декрементов убывают с ростом R более медленно, чем декременты монотонных возмущений. На фиг. 2 штрихпунктирными линиями обозначены веществен-



Фиг. 2

ные части наиболее быстро убывающих комплексных декрементов. Оценку критического числа Рейнольдса, соответствующего колебательной неустойчивости, при помощи экстраполяции следует делать с большой осторожностью, так как при больших R необходимо предъявлять повышенные требования к точности вычислений.

Для $\delta = 0.07$ такая оценка дает $R \approx (7 \div 8) \cdot 10^3$ и для $\delta = 0.10$, $R \approx (4 \div 5) \cdot 10^3$.

При больших значениях R решение краевой задачи (2.1) имеет сложный характер. Поэтому для нахождения приближенного решения (2.2) нужно брать большое число функций. В данном расчете максимальное число функций каждой симметрии равнялось 30. Для проверки сходимости решения при $R = R_{*1}$ вычисления проводились также в приближении 28 функций. Если из базиса убрать функции $v_{30}^{(0)}$ и $\mu_{26}^{(0)}$, то значение первого критического числа увеличивается на 6% для $\delta = 0.07$ и на 3% для $\delta = 0.10$. Функции $v_2^{(0)}$ и $\mu_1^{(0)}$ и точность определения R_{*1} не влияют.

В работе [7] неустойчивость движения жидкости в тонком шаровом слое была обнаружена экспериментально, причем зависимость критического числа Рейнольдса от толщины слоя δ определяется формулой

$$\gamma = R_{*1} \delta = 49.0$$

в интервале $0.04 < \delta < 0.12$. В рассматриваемом случае $\gamma = 60.3$ для $\delta = 0.07$ и $\gamma = 50.6$ для $\delta = 0.10$. Отличие γ от экспериментального значения для $\delta = 0.07$ связано с отсутствием в базисе (2.2) функций с $l > 30$. Очевидно, чем меньше δ , тем больше необходимо брать функций с высокими номерами l . Естественно ожидать, что для хорошей аппроксимации критического возмущения, число базисных функций каждой симметрии, используемых в методе Бубнова — Галеркина, должно быть не меньше π / δ . Для $\delta = 0.10$ экспериментальное значение $R_{*1} = 1600$ совпадает с расчетным.

Заметим, что для течения Тейлора зависимость критического числа Рейнольдса от толщины слоя дается аналогичной формулой с $\gamma = 41.3$ (см., например, [2]).

4. Найдем форму возмущения, срывающего течение (1.4). Произвольное возмущение можно представить как сумму азимутальной и меридиональной частей

$$u = u^v + u^m$$

Для меридиональной части возмущения можно ввести функцию тока

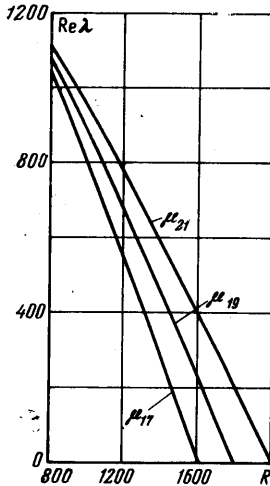
$$u^v = \text{rot } A$$

и получить уравнение для линий тока в виде

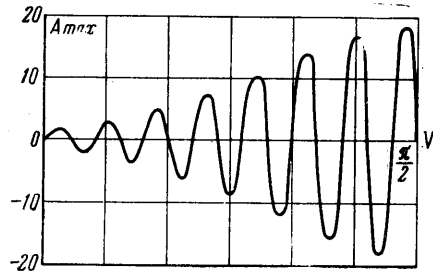
$$\sum_l \beta_l f_l r^2 \frac{1}{l(l+1)} \frac{dP_l}{d\theta} \sin \theta = \text{const}$$

Здесь β_l есть компоненты собственного вектора системы (2.3). Для симметричных возмущений суммирование следует делать по четным l , а для антисимметричных — по нечетным.

На фиг. 4 показано максимальное значение функции тока симметричного возмущения для $R = 3400$ и $\lambda = -175$. Как следует из графика, возмущение представляет собой систему кольцевых вихрей, интенсивность которых падает от экватора к полюсам. Соседние вихри вращаются в противоположных направлениях. Аналогичная картина для антисимметричных возмущений отличается от представленной на фиг. 4 только сдвигом на $1/4$ периода, т. е. на экваторе A_{max} будет иметь не нулевое, а максимальное значение. Кольцевые вихри вблизи плоскости эква-



Фиг. 3



Фиг. 4

тора наблюдались экспериментально в работе [7]. Однако данные о числе вихрей, об их интенсивности, а также о симметрии их по отношению к отражению в плоскости экватора в работе [7] отсутствуют, поэтому сравнение наших результатов с результатами [7] в этом аспекте затруднительно.

Автор благодарен М. И. Шлиомису за постоянное внимание к работе.

Поступило 10 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
3. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
4. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
5. Якушин В. И. О спектре малых возмущений движения жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
6. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
7. Хлебутин Г. Н. Устойчивость движения жидкости между вращающейся и неподвижной концентрическими сферами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.