где $\Pi^{ij} = \rho v^i v^j + P\delta^{ij}$ — тензор плотности потока импульса. С учетом уравнения неразрывности (4.3) из (4.6) можно получить обычную форму уравнений Эйлера

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x^i}$$

В заключение отметим, что аналогичным образом может быть получен и принцип Гамильтона в эйлеровых переменных для более простого случая невязкой несжимаемой жидкости, исходя из известной формы принципа Гамильтона для этой модели в лагранжевых координатах [1].

Поступило 22 VIII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Drobot S., Rybarski A. Variational principle of hydromechanics. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, vol. 2, No. 5, pp. 393—410.
3. Bateman H. Irrational motion of a compressible inviscid fluid. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1930, vol. 16, No. 12, pp. 816—825.
4. Ito H. Variational principle in hydrodynamics. Progr. Theoret. Phys., 1959, vol. 9, No. 2, pp. 1117—1131.
5. Eckart C. Some transformations of the hydrodynamic equations. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 8, pp. 1037—1041.

О НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ В СЛАБОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Л. А. ТЕМКИН

(*Харьков*)

Решается задача о малых колебаниях идеальной жидкости, частично заполняющей сферический сосуд, в слабом силовом поле (с учетом сил поверхностного натяжения) при таком угле смачивания, при котором равновесная поверхность является плоской. Движение жидкости считается потенциальным.

Математически задача приводится к нахождению собственных значений λ и собственных функций φ следующей системы уравнений и граничных условий [1]:
в объеме Ω, заполненном жидкостью

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1}$$

на смоченной поверхности Σ сферы

$$\partial\varphi / \partial n = 0 \tag{2}$$

на свободной поверхности S

$$\left(\frac{1}{b}\Delta - 1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \lambda\varphi + C = 0 \qquad \left(b = \frac{\alpha\gamma g R^2}{\sigma},\ \lambda = \frac{\omega^2 R}{\alpha g}\right) \tag{3}$$

на линии пересечения l свободной поверхности со стенкой сосуда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\,\partial\nu} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \tag{4}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа (в уравнении (1) — трехмерный, в (3) — двумерный); φ — потенциал скоростей; n — внешняя нормаль к свободной поверхности; ν — внешняя нормаль к контуру l в плоскости S; a — радиус окружности l, отнесенный к радиусу сферы R; C — произвольная постоянная; b — число Бонда, где α — коэффициент перегрузки, γ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли, σ — коэффициент поверхностного натяжения; ω — частота колебаний.

Систему уравнений и граничных условий (1) — (4) представим в интегральной форме способом, предложенным А. Д. Тюпцовым.

В интегральном представлении гармонической функции

$$p\varphi(x)=\iint\limits_{S+\Sigma} G(x,\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n}dS_\xi-\iint\limits_{S+\Sigma}\varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}dS_\xi$$

$$p=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\Omega+S+\Sigma\\ 1, & \text{если } x\in\Omega\\ {}^1/_2, & \text{если } x\in S-l\\ {}^1/_2\beta/\pi, & \text{если } x\in l \ (\beta \text{ — угол смачивания})\end{cases}$$

В качестве $G(x, \xi)$ выберем функцию Грина внутренней задачи Неймана для полной сферы. Тогда

$$p\varphi(x)=\iint\limits_{S} G(x,\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n}dS_\xi-\iint\limits_{S}\varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}dS_\xi+C_1 \tag{5}$$

Здесь C_1 — неизвестная постоянная.

Граничное условие (3) с учетом (4) представим в интегральной форме следующим образом [2]:

$$\omega\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_l\left[\frac{1}{a}K_0(\sqrt{b}r)-\frac{\partial}{\partial\nu}K_0(\sqrt{b}r)\right]\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n}dl_\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\lambda\iint\limits_S K_0(\sqrt{b}r)\varphi(\xi)dS_\xi+C_2 \tag{6}$$

Здесь K_0 — функция Ханкеля нулевого порядка первого рода от мнимого аргумента, r — расстояние между точками x и ξ, C_2 — произвольная постоянная

$$\omega=\begin{cases}0, & \text{если } x\,\overline{\in}\,S\\ 1, & \text{если } x\in S-l\\ {}^1/_2, & \text{если } x\in l\end{cases}$$

Поскольку, согласно исходной системе уравнений (1) — (4), функция φ определяется с точностью до аддитивной постоянной, можно добавить к φ некоторую постоянную так, чтобы уравнение (6) стало однородным относительно φ. Тогда в уравнении (5) постоянная C_1 заменится другой неизвестной постоянной C_0.

К системе уравнений (5), (6) добавим условие сохранения объема.

$$\iint\limits_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=0 \tag{7}$$

Переходя в равенствах (5) — (7) к полярным координатам и представляя $\varphi(x)$ и $\partial\varphi(x)/\partial n$ в виде рядов Фурье по полярному углу, получаем системы уравнений относительно коэффициентов φ_k и ψ_k при соответствующих косинусах (относительно коэффициентов при синусах получаются точно такие же системы уравнений)

$$p\varphi_k(\rho_x)=\int\limits_0^a K_k(\rho_x,\rho_\xi)\Psi_k(\rho_\xi)d\rho_\xi-\int\limits_0^a N_k(\rho_x,\rho_\xi)\varphi(\xi)d\rho_\xi+C_3 \tag{8}$$

$$\omega\Psi_k(\rho_x)=f(\rho_x)\Psi_k(a)+\lambda\int\limits_0^a Q_k(\rho_x,\rho_\xi)\varphi_k(\rho_\xi)d\rho_\xi \tag{9}$$

$$\int\limits_0^a\rho_\xi\Psi_0(\rho_\xi)d\rho_\xi=0,\qquad C_3=\begin{cases}C_0 & \text{при } k=0\\ 0 & \text{при } k>0\end{cases}$$

$$K_k(\rho_x, \rho_\xi) = \rho_\xi \int_0^{2\pi} G \cos K\delta \, d\delta, \qquad N_k(\rho_x, \rho_\xi) \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial n} \cos k\delta \, d\delta$$

$$Q_k(\rho_x, \rho_\xi) = \frac{1}{2\pi} \rho_\xi \int_0^{2\pi} K_0(\sqrt{b}r) \cos k\delta \, d\delta$$

$$f_k(\rho_x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[K_0(\sqrt{b}r) - a \frac{\partial}{\partial \nu} K_0(\sqrt{b}r) \right] \Bigg|_{\rho_\xi = a} \cos \delta \, d\delta$$

$$(k = 0, 1, 2 \ldots)$$

Здесь ρ_x, θ_x и ρ_ξ, θ_ξ — полярные координаты точек x и ξ, $\delta = \theta_\xi - \theta_x$.

Отметим, что соотношения (8) — (10) будут системами одномерных интегральных уравнений относительно функций φ_k и ψ_k при $k > 0$ и φ_0, ψ_0 и C_0 при $k = 0$. При этом условие (10) существенно только при $k = 0$.

Ядра $K_k(\rho_x, \rho_\xi)$ имеют особенности логарифмического типа при $\rho_\xi = \rho_x$, а $N_k \cdot (\rho_x, \rho_\xi)$ — при $\rho_\xi = \rho_x = d$. Эти особенности выделим, как рекомендуется, например, в [3]. Тогда уравнение (8) приведется к виду

$$\left[p + \int_0^a N_k(\rho_x, \rho_\xi) d\rho_\xi \right] \varphi(\rho_x) - \psi(\rho_x) \int_0^a K_k(\rho_x, \rho_\xi) d\rho_\xi =$$

$$= \int_0^a K_k(\rho_x, \rho_\xi)[\psi(\rho_\xi) - \psi(\rho_x)] \, d\rho_\xi - \int_0^a N_k(\rho_x, \rho_\xi)[\varphi_k(\rho_\xi) - \varphi_k(\rho_x)] \, d\rho_\xi + C_3 \qquad (11)$$

Интегралы в полученной системе уравнений (9) — (11) заменим приближенно квадратурными суммами гауссового типа с шестью и (для сравнения) с восьмью узлами.

Отметим, что в уравнении (9) входит значение неизвестной функции Ψ_k в точке a, т. е. на конце промежутка интегрирования. Вследствие гладкости функций Ψ_k (что ясно из физических соображений) $\psi_k(a)$ можно найти при помощи интерполяционного полинома Лагранжа по всем узлам квадратурной формулы.

Из полученных систем линейных однородных алгебраических уравнений находим собственные значения и соответствующие им собственные функции, нормированные условием

$$\pi \int_0^a \rho \varphi^2(\rho) \, d\rho = 1$$

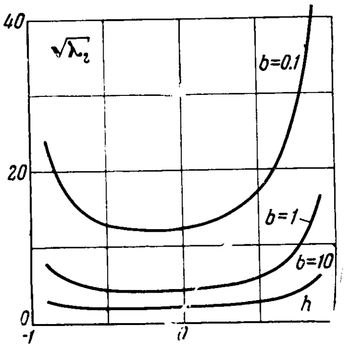
Основные вычислительные трудности при решении задач описанным выше способом связаны с вычислением ядер K_k, N_k, Q_k, функции f_k и интегралов от ядер K_k, N_k. Для вычисления каждого из этих интегралов промежуток интегрирования разбиваем на части, на каждой из которых подынтегральная функция будет достаточно гладкой, так что выгодно применять квадратурные формулы гауссового типа. В подпрограмме вычисления интегралов было предусмотрено, чтобы начальное разбиение промежутка интегрирования осуществлялось при обращении к подпрограмме, а более мелкое дробление промежутка проводилось автоматически, в зависимости от степени гладкости подынтегральной функции. Это оказалось выгодным в смысле экономии машинного времени.

По описанной выше методике на ЭЦВМ М-20 были проведены вычисления собственных значений и собственных функций с относительной погрешностью, не превышающей 0.01. (Все промежуточные вычисления проводились с более высокой степенью точности.) При этом оказалось, что для получения результатов с такой точностью интегралы по переменной ρ_ξ в уравнениях (9) — (11) достаточно заменять квадратурными суммами с восьмью узлами.

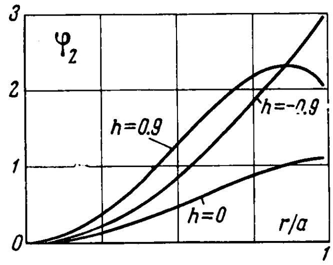
Известно [4, 5], что собственные значения задачи (1) — (4) образуют дискретный спектр, все собственные значения λ_i положительны и $\lambda_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Были вычислены первое и второе собственные значения λ_1 и λ_2 и соответствующие им собственные функции φ_1 и φ_2 при различных значениях числа Бонда и различных глубинах заполнения сосуда. (Безразмерная глубина h отсчитывается от среднего сечения сферы и меняется от -1 до 1). Фактически вычислялось по два первых (в порядке возрастания) корня характеристических уравнений при $k = 0, 1, 2$ (k здесь имеет тот же смысл, что и в уравнениях (9) — (11)). Из этих корней выбирались при каждом значении b и h наименьшие собственные значения λ_1 и λ_2.

Вычисления показали, что λ_1 практически не зависит от числа Бонда, т. е. первая собственная частота приближенно пропорциональна $\sqrt{\alpha}$. График зависимости $\sqrt{\lambda_1} = F_1(h)$, а также первая собственная функция φ_1 совпадают с соответствующими кривыми, полученными в работах [6, 7] без учета сил поверхностного натяжения. Графики зависимости $\sqrt{\lambda_2} = F_2(h)$ при $b = 10$, 1, 0.1 представлены на фиг. 1. Как показали вычисления, вторая собственная форма колебаний практически не зависит от числа Бонда. Графики второй собственной функции $\varphi_2 = \varphi_2(\rho / a)$ представлены на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Автор благодарит А. Д. Мышкиса, В. С. Темкину и А. Д. Тюнцова за полезные советы и помощь в работе.

Поступило 19 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
2. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. Линейные уравнения математической физики. М., «Наука», 1964.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5, М.—Л., Физматгиз, 1962.
4. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965. т. 5, № 6.
5. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. Малые колебания идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
6. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., 1966.
7. Budiansky B. Sloshing of liguids in circular canals and spherical tanks. J. Aero-Space Sci., 1960, vol. 27, No. 3.