Укажем, кстати, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} C_f R_1 \frac{Y_w}{Y_w^-}$$

Здесь C_f — коэффициент трения, т. е. модуль напряжения трения на стенке канала, деленный на характерный скоростной напор $^1/_2\rho_1 W^2$.

Из (2.14) видно, что при постоянном K можно задавать любое число M при соответствующем значении R_1.

Численные расчеты, проведенные по методике, изложенной в [2], показывают, что при законе площадей канала (2.14) и профиле скорости на входе, отличающемся от автомодельного, в канале на некотором расстоянии от входа устанавливается автомодельное течение.

Поступило 15 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams J. C. Viscous compressible and incompressible flow in slender channels. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 1.
2. Быркин А. П., Межиров И. И. О расчете течения вязкого газа в канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

М. М. ЗАСЛАВСКИЙ, В. А. ПЕРФИЛЬЕВ

(*Москва*)

Указывается, что известные вариационные принципы для модели идеальной сжимаемой жидкости в эйлеровых координатах обладают следующими недостатками:

1) они не связаны с соответствующими вариационными принципами в лагранжевых координатах;

2) процедура варьирования в этих вариационных принципах приводит не к самим уравнениям движения в форме Эйлера, а к некоторым соотношениям, соответствующим определенным классам решений уравнений Эйлера (при этом учет уравнений связей, налагаемых условиями адиабатичности и неразрывности, ограничивает область применения этих вариационных принципов только потенциальными течениями);

3) получение более общих результатов, связанных с отказом от потенциальности течения, достигается искусственным подбором некоторых добавочных условий связей, налагаемых на варьируемые величины, причем и в этом случае требуется дополнительное выяснение вопроса, является ли любое течение невязкой сжимаемой жидкости экстремалью соответствующей вариационной задачи.

Предлагается новая формулировка принципа Гамильтона для невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых координатах, свободная от указанных недостатков.

1. Известно [1–2], что вариационные принципы гидродинамики, аналогичные принципу Гамильтона классической механики системы дискретных материальных точек, наиболее естественно формулируются в лагранжевых координатах, поскольку задача лагранжева описания динамики сплошной среды (определение истинных траекторий частиц среды) соответствует как раз традиционной формулировке принципа Гамильтона классической механики системы. В противоположность этому, эйлерово представление динамики сплошной среды не имеет аналогов в механике системы точек. Существующие вариационные принципы в динамике невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых переменных формулируются как правило без связи с вариационными принципами в лагранжевых координатах, в критерии их истинности целиком определяются лишь совпадением получаемых при варьировании функционала действия уравнений Эйлера — Лагранжа с соответствующими гидродинамическими соотношениями, имеющими место в обычной системе эйлеровых уравнений движения. При этом характерной особенностью большинства вариационных принципов динамики невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых переменных является то обстоятельство, что процедура варьирования приводит не к самим уравнениям движения в форме Эйлера, а к соотношению типа теоремы Бернулли и к представлению поля скоростей через потенциал скоростей [3]. Более общие результаты, не связанные с ограничени-

ем потенциальности течения, достигаются на этом пути искусственным подбором дополнительных условий связей, налагаемых на варьируемые величины, и приводят к представлениям Клебша [4] или Вебера [1] для эйлерова поля скорости. Однако и эти более общие (хотя и более искусственные) результаты требуют дополнительного выяснения вопроса, является ли любое течение невязкой сжимаемой жидкости экстремалью соответствующей вариационной задачи [1]. Последнее обстоятельство иногда упускается из рассмотрения и может повлечь за собой переоценку реальной степени общности постулируемых вариационных принципов этого типа (именно так обстоит дело, например, с вариационным принципом в эйлеровых координатах, предложенным в [4]).

Перечисленные недостатки известных вариационных принципов для модели невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых переменных могли бы быть устранены в такой формулировке вариационного принципа в эйлеровых координатах, которая была бы связана с обычной формой принципа Гамильтона для этой модели в лагранжевых координатах и приводила бы непосредственно к уравнениям движения в форме Эйлера без привлечения каких-либо дополнительных условий, помимо обычных условий неразрывности и адиабатичности. Решение этой задачи приводится ниже.

2. Принцип Гамильтона в лагранжевом представлении для рассматриваемой модели имеет вид [1]

$$\delta A = \delta \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{\mathbf{X}_0} \rho_0 l \, d\mathbf{X}_0 \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{X}_0$ — область лагранжевых координат $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, за которые выбираются начальные координаты частиц среды в неподвижной декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$

$$x^i(\mathbf{x}_0, t = 0) = x_0^i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

а $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ — начальная плотность среды. Удельный лагранжиан l в (2.1) выбирается в виде

$$l = l(\mathbf{x}_0, t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} \left[\frac{dx^i(\mathbf{x}_0, t)}{dt}\right]^2 - e(\rho, s)$$

Здесь $e(\rho, s)$ — удельная внутренняя энергия частиц среды, полагаемая для рассматриваемой модели функцией текущей плотности $\rho(\mathbf{x}_0, t)$ и энтропии $s(\mathbf{x}_0)$, причем последняя удовлетворяет условию адиабатичности

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \text{откуда } \delta s = 0 \tag{2.2}$$

Вариация функционала действия подчинена следующим условиям:

$$\delta t = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt} \delta x^i(\mathbf{x}_0, t) - \delta \frac{d}{dt} x^i(\mathbf{x}_0, t) = 0 \tag{2.4}$$

$$\delta x^i(\mathbf{x}_0, t_1) = \delta x^i(\mathbf{x}_0, 0) = \delta x_0^i = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{dM(\mathbf{X}_t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int\limits_{\mathbf{X}_t} \rho \, d\mathbf{X}_t = 0 \tag{2.6}$$

$$\delta x^i |_{\Sigma_t} = 0 \tag{2.7}$$

(в условии сохранения массы (2.6) область интегрирования $\mathbf{X}_t$ есть область, которую занимает жидкий объем $\mathbf{X}_0$ в момент времени t, а в последнем условии Σ_t есть граница области $\mathbf{X}_t$). При этих условиях из принципа Гамильтона (2.1) следуют обычные уравнения движения невязкой сжимаемой жидкости в форме Лагранжа

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_0^j} \tag{2.8}$$

причем давление P вводится обычным термодинамическим определением $P = \rho^2 \partial e / \partial \rho$.

Так как функционал действия в (2.1) инвариантен относительно произвольных непрерывно дифференцируемых преобразований независимых переменных с отличным от нуля якобианом преобразования [5], то можно перейти к новым переменным интегрирования при помощи следующего преобразования:

$$x_0{}^i \to x^i(\mathrm{x}_0,\ t), \qquad t \to t \tag{2.9}$$

причем в силу условия сохранения массы якобиан этого преобразования отличен от нуля. Вводя далее в удельном лагранжиане новые зависимые переменные

$$v^i(\mathrm{x}, t) = \frac{dx^i}{dt}$$

приходим к следующему представлению принципа Гамильтона (2.1) в эйлеровых переменных

$$\delta A = \delta \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{\mathrm{X}} \rho(x, t) \left[\frac{1}{2} v^i v^i - e(\rho, s) \right] d\mathrm{X} = 0 \tag{2.10}$$

где

$$\rho(\mathrm{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial(x_0{}^1, x_0{}^2, x_0{}^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}$$

3. Полученное выражение по форме совпадает с обычно рассматриваемым [1, 3, 4] формулировками вариационных принципов для невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых координатах. Однако вариацию функционала действия в (2.10) будем искать при условиях варьирования, отличных от обычно выбираемых условий

$$\delta x^i = 0, \quad \delta v^i = \bar{\delta} v^i, \quad \delta v^i(\mathrm{x},\ t_1) = \delta v^i(\mathrm{x},\ 0) = 0 \tag{3.1}$$

($\bar{\delta} v^i(\mathrm{x},\ t)$ — вариация формы функции $v^i(\mathrm{x},\ t)$). По поводу условий (3.1) прежде всего следует заметить, что они выбираются совершенно произвольно, и единственным оправданием для их введения является то обстоятельство, что получаемая с их помощью система соотношений соответствует некоторому классу решений уравнений Эйлера. Однако уже заранее можно предвидеть, что условия (3.1) не подходят для решения поставленной в п. 1 задачи. Во-первых, граничное условие (3.1.3) не согласуется с условием «закрепленности концов» (2.5) в принципе Гамильтона (2.1); во-вторых, условие (3.1.1) (а следовательно, и (3.1.2) также не годится для непосредственного получения из принципа Гамильтона (2.10) уравнений Эйлера. Действительно, последние являются не уравнениями движения в обычном смысле этого слова (т. е. не уравнениями, из которых определяются траектории частиц), а законом сохранения импульса. Поэтому следует ожидать, что уравнения Эйлера должны следовать из вариационного принципа (2.10) как законы сохранения соответствующих компонент импульса в соответствии с теоремой Неттер и тем самым должны быть связаны именно с варьированием области интегрирования X в выражении для функционала действия. Ниже будет показано, что правила варьирования (2.2) — (2.7), в которых совершен переход к эйлеровым переменным, как раз и приводят к законам сохранения компонент импульса среды. Характерной особенностью получаемых правил варьирования является то обстоятельство, что вариации эйлеровых полей переменных $\delta v^i(\mathrm{x},\ t)$, $\delta\rho(\mathrm{x},\ t)$ выражаются только через вариации независимых переменных δx^i. Поэтому при выполнении процедуры варьирования в подынтегральном выражении функционала действия присутствует лишь группа членов, обязанная своим появлением варьированию области интегрирования X, но нет обычных выражений, дающих уравнения Эйлера — Лагранжа, и содержащих вариации формы варьируемых функций $v^i(\mathrm{x},\ t)$, $\rho(\mathrm{x},\ t)$.

4. Выясним, какой вид принимают условия (2.2) — (2.7) при переходе к эйлеровым переменным. Очевидно, что условия адиабатичности (2.2) и изохронности (2.3) остаются без изменений. Условие (2.4) перестановочности операций варьирования и дифференцирования по времени декартовых координат частиц среды дает в силу определения эйлерова поля скоростей следующую связь между вариациями $\delta v^i(\mathrm{x},\ t)$ поля скоростей и вариациями декартовых координат δx^i

$$\delta v^i(\mathrm{x}, t) = \frac{d}{dt}\delta x^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^j} v^j + \frac{\partial \delta x^i}{\partial t} \tag{4.1}$$

Условие (2.5) закрепленности концов переходит в следующее:

$$\delta x^i|_{t=0} = \delta x^i|_{t=t_1} = 0 \tag{4.2}$$

так что в начальный и конечный моменты времени вариации пространственных координат δx^i обращаются в нуль. В остальные моменты времени они, вообще говоря, отличны от нуля. Заметим, кстати, что в эйлеровом представлении не имеет места обращение в нуль на концах временного интервала $[0, t_1]$ вариаций поля скоростей. В самом деле, условие закрепленности концов для моментов времени $t = 0, t_1$ относится только к вариациям координат, в то время как

$$\delta v^i|_{t=0,t_2} = \delta \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0,t_1} \neq 0$$

в полном соответствии с аналогичной ситуацией в вариационном принципе (2.1) в лагранжевых координатах и в принципе Гамильтона для систем дискретных материальных точек.

Условие сохранения массы (2.6) принимает в рассматриваемом случае известный вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{X}} \rho(\mathbf{x}, t)\, dx = \int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v^i}{\partial x^i}\right) d\mathbf{X} = 0 \tag{4.3}$$

причем как обычно для функций эйлеровых переменных

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

С другой стороны, из (2.6) следует, что

$$M(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{X}} \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{X} = \mathrm{const}$$

и эта интегральная форма закона сохранения массы приводит к следующему условию связей, налагаемому на вариации переменных $\delta\rho$, δx^i:

$$\delta\rho + \rho\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^i} = 0 \tag{4.4}$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\delta\rho(\mathbf{x}, 0) = \delta\rho(\mathbf{x}, t_1) = 0$$

Далее, легко убедиться, что условие (4.4) приводит к следующему выражению для δA:

$$\delta A = \int_0^{t_1} dt \int_{\mathbf{X}} \rho\delta l\, d\mathbf{X} \tag{4.5}$$

в котором, однако, в отличие от (2.1) при вычислении δl варьируется область интегрирования $\mathbf{X}$ (так как вариации функций $\delta v^i(\mathbf{x}, t)$, $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$ выражаются через δx^i в соответствии с (4.1) и (4.4)).

Для вариации функционала действия в принципе Гамильтона (2.10) с учетом полученных соотношений (4.5), (4.4), (4.1) получаем

$$\delta A = \int_0^{t_1} dt \int_{\mathbf{X}} \rho\left[v^i v^j \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^j} + v^i\frac{\partial \delta x^i}{\partial t} + \frac{P}{\rho}\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^i}\right] d\mathbf{X} = 0$$

Последнее можно преобразовать к виду

$$\delta A = \int_0^{t_1} dt \int_{\mathbf{X}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j \delta x^i) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j)\delta x^i + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i \delta x^i) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i)\delta x^i + \frac{\partial}{\partial x^j}(P\delta^{ij}\delta x^i) - \frac{\partial}{\partial x^j}(P\delta^{ij})\delta x^i\right] d\mathbf{X} = 0$$

Используя граничные условия для δx^i, отсюда находим

$$\delta A = \int_0^{t_1} dt \int_{\mathbf{X}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j + P\delta^{ij}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i)\right] \delta x^i\, d\mathbf{X} = 0$$

Приравнивая нулю подынтегральное выражение в квадратных скобках, приходим к уравнениям сохранения импульса вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) = -\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^j} \tag{4.6}$$

где $\Pi^{ij} = \rho v^i v^j + P\delta^{ij}$ — тензор плотности потока импульса. С учетом уравнения неразрывности (4.3) из (4.6) можно получить обычную форму уравнений Эйлера

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x^i}$$

В заключение отметим, что аналогичным образом может быть получен и принцип Гамильтона в эйлеровых переменных для более простого случая невязкой несжимаемой жидкости, исходя из известной формы принципа Гамильтона для этой модели в лагранжевых координатах [1].

Поступило 22 VIII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Drobot S., Rybarski A. Variational principle of hydromechanics. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, vol. 2, No. 5, pp. 393—410.
3. Bateman H. Irrational motion of a compressible inviscid fluid. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1930, vol. 16, No. 12, pp. 816—825.
4. Ito H. Variational principle in hydrodynamics. Progr. Theoret. Phys., 1959, vol. 9, No. 2, pp. 1117—1131.
5. Eckart C. Some transformations of the hydrodynamic equations. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 8, pp. 1037—1041.

О НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ В СЛАБОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Л. А. ТЕМКИН

(*Харьков*)

Решается задача о малых колебаниях идеальной жидкости, частично заполняющей сферический сосуд, в слабом силовом поле (с учетом сил поверхностного натяжения) при таком угле смачивания, при котором равновесная поверхность является плоской. Движение жидкости считается потенциальным.

Математически задача приводится к нахождению собственных значений λ и собственных функций φ следующей системы уравнений и граничных условий [1]:

в объеме Ω, заполненном жидкостью

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1}$$

на смоченной поверхности Σ сферы

$$\partial\varphi / \partial n = 0 \tag{2}$$

на свободной поверхности S

$$\left(\frac{1}{b}\Delta - 1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \lambda\varphi + C = 0 \qquad \left(b = \frac{\alpha\gamma g R^2}{\sigma},\ \lambda = \frac{\omega^2 R}{\alpha g}\right) \tag{3}$$

на линии пересечения l свободной поверхности со стенкой сосуда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\,\partial\nu} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \tag{4}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа (в уравнении (1) — трехмерный, в (3) — двумерный); φ — потенциал скоростей; n — внешняя нормаль к свободной поверхности; ν — внешняя нормаль к контуру l в плоскости S; a — радиус окружности l, отнесенный к радиусу сферы R; C — произвольная постоянная; b — число Бонда, где α — коэффи-