Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$v = \frac{1}{y}\left[c_1 + c_2 \int \exp\left(R \int u\, dy\right) y\, dy \right] \tag{6}$$

Произвольные постоянные необходимо определить так, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям (2), тогда

$$v = \frac{1}{y} \int_0^1 \exp\left(R \int_0^y u\, dy\right)^{-1} \int_0^y \exp\left(R \int_0^y u\, dy\right) y\, dy \tag{7}$$

Таким образом, функция v, удовлетворяющая уравнению (5) и граничным условиям (2), определяется, если известна функция u.

В уравнения, определяющие u, η и θ, не входит v, эти уравнения аналогичны уравнениям для составляющих скорости в невращающейся трубе с проницаемыми стенками. Решение системы уравнений (3), (4) с граничными условиями (2) и (5) получено, например, в работе [1], где функции u и η представлены в виде рядов по степеням $1/R$.

Для иллюстрации применения формулы (7) воспользуемся приближенной зависимостью

$$u = -y^{-1} \sin^{1/2} \pi y^2 \tag{8}$$

полученной в работе [1] для достаточно больших чисел Рейнольдса. Тогда

$$v = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\left(\int_0^1 \exp(-{}^1/_2 R \operatorname{si} {}^1/_2 \pi\xi)\, d\xi\right)^{-1} \int_0^\xi \exp(-{}^1/_2 R \operatorname{si} {}^1/_2 \pi\xi)\, d\xi \qquad (\xi = y^2) \tag{9}$$

Здесь $\operatorname{si} {}^1/_2 \pi\xi$ — интегральный синус.

При $R \to \infty$ формулы (7) и (9) обращаются в уравнение сохранения момента количества движения для идеального газа $v = 1/y$, а при $R = 0$ — в уравнение $v = y$.

При малых числах Рейнольдса формулы (8) и (9) несправедливы, необходимо для вычисления u удерживать в решении работы [1] члены, содержащие более высокие степени $1/R$. Функция v при этом вычисляется подстановкой полученного выражения u в формулу (7).

Для практических расчетов при числе Рейнольдса $R > 10^3$ для вычисления v можно принять приближенные зависимости, полученные упрощением формулы (9)

$$v = y^{-1}[1 - \exp(-{}^1/_4 \pi R y^2)]$$

или

$$v = \begin{cases} y^{-1} & 1 \leqslant y < y_* = 2\sqrt{1/\pi R} \\ {}^1/_4 \pi R y & (y_* < y \leqslant 0) \end{cases}$$

Поступило 15 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Yuane S. W., Fincelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous walles. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 4, p. 719.

О НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

А. П. БЫРКИН, И. И. МЕЖИРОВ

(*Москва*)

В работе рассматривается класс автомодельных осесимметричных и плоских ламинарных течений вязкого газа в длинном канале с плавным контуром, в которых продольная составляющая скорости и температура газа будут функциями одной безразмерной поперечной координаты. Таким течениям соответствует экспоненциальный (осесимметричное течение) и линейный (плоское течение) закон увеличения радиуса или высоты канала и соответственно экспоненциальный и гиперболический закон падения статического давления по длине канала.

1. Основные уравнения. Рассмотрим ламинарное стационарное течение газа в осесимметричном или плоском канале, характерный радиус (или высота) которого δ много меньше длины канала L, так что $\delta / L \ll 1$. Будем предполагать также, что контур канала достаточно плавный, т. е. $\delta / r \ll 1$, где r — радиус продольной кривизны контура. При этом, как известно (см. [1]), в уравнениях Навье — Стокса, описывающих течение вязкого газа, может быть опущен ряд членов, и они переходят в более простые уравнения пограничного слоя (рассматривается случай совершенного газа)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{dx} + \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\nu \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(y^\nu \rho v) = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\nu \mu \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y}\left[y^\nu \mu \left(\frac{1}{P} - 1\right) \frac{\partial \tau}{\partial y}\right] \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1) — (1.3) все переменные — безразмерные. Продольная и поперечная координаты x, y, компоненты скорости u, v, давление p связаны с соответствующими размерными величинами X, Y, U, V, Π соотношениями

$$x = \frac{X}{\delta}\frac{1}{R}, \quad y = \frac{Y}{\delta}, \quad u = \frac{U}{W}, \quad v = \frac{V}{W}R, \quad p = \frac{\Pi}{\rho_1 W^2}, \quad R = \frac{\rho_1 W \delta}{\mu_1}$$

Здесь R — постоянное число Рейнольдса; W, ρ_1 и μ_1 — характерные скорость, плотность и коэффициент вязкости течения (например, в случае симметричного течения скорость, плотность и коэффициент вязкости на оси симметрии на входе в канал). Остальные безразмерные величины — плотность ρ, коэффициент вязкости μ, температура торможения θ и статическая температура τ — получены делением размерных величин на их характерные значения ρ_1, μ_1, T_1; P — число Прандтля; величина ν принимает значения 1 в случае осесимметричного канала и 0 в случае плоского канала.

К уравнениям (1.1)—(1.3) необходимо добавить уравнение Клапейрона

$$p = p^- \rho \tau \tag{1.4}$$

(верхний индекс минус обозначает условия в начальном сечении) и зависимость коэффициента вязкости от температуры. Здесь будет рассматриваться для определенности степенная зависимость

$$\mu = \tau^n \tag{1.5}$$

хотя, как ясно из дальнейшего, функция $\mu(\tau)$ может быть любой.

Система уравнений пограничного слоя должна решаться при следующих граничных условиях.

В случае симметричного течения $u = v = 0$ на стенке канала, $\partial u / \partial y = 0$ на оси канала.

В случае несимметричного течения в плоском или осесимметричном кольцевом канале $u = v = 0$ на одной стенке канала, $u = 0$ на другой стенке.

Для получения однозначного решения системы уравнений (1.1) — (1.5), кроме указанных граничных (а также начальных) условий для скорости и температуры (о последних применительно к рассматриваемым течениям будет сказано ниже), требуется еще одно условие. При решении обычной задачи о пограничном слое таким дополнительным условием будет задание давления на поверхности тела, которое находится в результате расчета внешнего невязкого потока. В данном случае распределение давления по длине канала является искомой функцией наряду с другими характеристиками течения. Замыкающим условием в случае канала с непроницаемыми стенками является постоянство расхода через все сечения канала

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{y_{w1}}^{y_{w2}} y^\nu \rho u \, dy = 0 \tag{1.6}$$

где y_{w1} и y_{w2} — координаты стенок канала.

Из (1.6), (1.2) и упомянутых выше граничных условий для скорости следует естественное условие равенства нулю поперечной составляющей скорости v на обеих стенках канала или (в случае канала круглого сечения) на стенке и на оси симметрии.

Наконец, должен быть задан закон площадей канала в виде

$$y_w = y_w(x) \tag{1.7}$$

Уравнению (1.7) соответствует семейство контуров $Y = Y(X)$, у которых при изменении числа R абсциссы X изменяются прямо пропорционально числу R, а ординаты Y не меняются (см. [2]).

В сходственных сечениях различных каналов одного семейства, характеризуемых условием $x = \mathrm{const}$, градиенты давления $d\Pi / dX$ меняются обратно пропорционально числу R, не меняются профили продольной скорости u, соответствующих ей чисел M, профили безразмерной плотности, температуры и других величин.

2. **Автомодельные решения.** Будем искать такие решения системы уравнений и граничных условий предыдущего пункта, для которых $u = u(\eta)$, $\tau = \tau(\eta)$, где $\eta = y / y_{w1}$. Эти течения, если они существуют, являются обобщениями на случай газа течения Пуазейля, причем при $M > 0$ для компенсации падения плотности, вызванного силами трения, при сохранении вдоль канала неизменного профиля скорости канал должен расширяться.

Перейдем от независимых переменных x, y к переменным $\xi = x$, η. Формулы преобразования производных будут при этом следующие:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{y_{w1}'(\xi)}{y_{w1}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{y_{w1}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{2.1}$$

Штрих здесь и ниже обозначает дифференцирование функции по своему аргументу.

Рассмотрим сначала соотношение (1.6). Переходя в нем от y к η и учитывая (1.4), получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left(p y_{w1}^{\nu+1} \int\limits_{\eta_{w2}}^{1} \frac{u}{\tau} \eta^\nu \, d\eta \right) = 0$$

Отсюда получаем следующие условия, которым должны удовлетворять отыскиваемые течения

$$p y_{w1}^{\nu+1} = \mathrm{const}, \qquad \eta_{w2} = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

Из второго условия (2.2) следует, что в осесимметричном кольцевом канале, в котором реализуется рассматриваемое автомодельное течение, отношение радиусов внешней и внутренней стенок канала должно быть постоянным (в случае плоского канала всегда можно положить $\eta_{w2} = 0$). В дальнейшем, поэтому всюду будет фигурировать только один радиус y_{w1}, причем индекс 1 будет опускаться.

Отсюда видно также, что любая линия $\eta = \eta_1 = \mathrm{const}$ $(\eta_{w2} \leqslant \eta_1 \leqslant 1)$ является линией тока. Ее уравнение в плоскости x, y будет

$$y = \eta_1 y_w$$

откуда, дифференцируя обе части уравнения, находим связь между компонентами скорости

$$v = \eta u y_w' \tag{2.3}$$

Это соотношение, конечно, может быть получено и из уравнения неразрывности (1.2).

Уравнения количества движения и энергии (1.1), (1.3) в переменных ξ, η имеют следующий вид:

$$\frac{p}{p-\tau} \frac{y_w'}{y_w} \left(-u\eta + \frac{v}{y_w'} \right) \frac{du}{d\eta} = -\frac{dp}{d\xi} + \frac{1}{\eta^\nu y_w^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^\nu \mu \frac{du}{d\eta} \right) \tag{2.4}$$

$$\frac{p}{p-\tau} \frac{y_w'}{y_w} \left(-u\eta + \frac{v}{y_w'} \right) \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{\eta^\nu y_w^2} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^\nu \left[\mu \frac{d\theta}{d\eta} + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \mu \frac{d\tau}{d\eta} \right] \right\} \tag{2.5}$$

Вследствие (2.3) левые части уравнений (2.4) и (2.5) равны нулю, и получаем

$$p' = \frac{1}{\eta^\nu y_w^2}(\eta^\nu \mu u')' \qquad \left\{ \eta^\nu \left[\mu\theta' + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \mu\tau' \right] \right\}' = 0 \tag{2.6}$$

Определим характерный поперечный размер канала δ соотношением

$$\delta = Y_w^-(p^-)^{1/\nu+1}$$

Тогда

$$p y_w^{\nu+1} = p^{2-\nu} y_w^2 = 1 \qquad (\nu = 0, 1)$$

Учитывая это и деля обе части первого уравнения (2.6) на $p^{2-\nu}$, видим, что переменные разделяются, и получаем

$$\frac{p'(\xi)}{[p(\xi)]^{2-\nu}} = \frac{1}{\eta^\nu}[\eta^\nu \mu(\eta) u'(\eta)]' = -\alpha_\nu = \text{const} \tag{2.7}$$

Интегрируя уравнение для давления, получаем распределение давления

$$\frac{p}{p^-} = \begin{cases} e^{-\alpha_1 \xi} & \text{при } \nu = 1 \\ (1 + p^- \alpha_0 \xi)^{-1} & \text{при } \nu = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

и закон изменения радиуса (высоты) канала по его длине

$$\frac{y_w}{y_w^-} = \begin{cases} e^{(\alpha_1/2)\xi} & \text{при } \nu = 1 \\ 1 + p^- \alpha_0 \xi & \text{при } \nu = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Из формул (2.9) видно, что в осесимметричном течении для компенсации влияния вязкости при сохранении скорости течения канал должен расширяться сильнее, чем в плоском течении.

Отметим, что величины p^- и δ зависят от характерного числа M течения ($p^- = (\varkappa M^2)^{-1}$, $\varkappa$ — показатель адиабаты газа). Легко убедиться, что при $M \to 0$ $p / p^- = y_w / y_w^- = 1$. Это соответствует течению Пуазейля в цилиндрическом канале. Рассмотрим второе уравнение (2.6). Интегрируя его один раз, получаем

$$\eta^\nu \left[\mu\theta' + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \mu\tau' \right] = C$$

Постоянная интегрирования C определяет величину теплового потока через стенку, причем легко видеть, что количества тепла, проходящие через обе стенки канала (плоского или кольцевого), равны между собой и противоположны по знаку, так что не происходит изменения температуры газа вдоль линий тока.

В случае канала круглого сечения (вторая стенка отсутствует) рассматриваемые автомодельные течения могут существовать только при теплоизолированной стенке, т. е. при $C = 0$. На этом случае остановимся ниже более подробно.

Полагая число Прандтля P постоянным и интегрируя второе уравнение (2.6) дважды, при $C = 0$, получаем (в размерных величинах)

$$T + P\frac{U^2}{2c_p} = T_w = \text{const}$$

откуда видно, что коэффициент восстановления температуры равен в этом случае числу Прандтля P.

Переходя к безразмерным величинам, принимая в качестве характерной температуры T_1 ее значение на оси канала и вводя число M течения на оси, получим

$$\tau = 1 + \gamma(1 - u^2), \qquad \gamma = {}^1/_2(\varkappa - 1)M^2 P \tag{2.10}$$

Здесь γ — параметр, учитывающий влияние числа M и физических свойств газа на распределение температуры.

Интегрируя уравнение для скорости (2.7) (для простоты ограничиваемся случаями осесимметричного канала с круглым сечением и плоского канала), получим с учетом условия прилипания на стенке и условия симметрии на оси течения

$$\int^u \mu \, du = -\frac{\alpha_\nu}{2(\nu + 1)}\eta^2$$

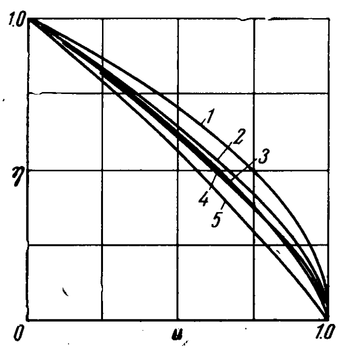
Видно, что распределение продольной составляющей скорости в поперечном сечении канала отличается от параболического только за счет зависимости коэффициента вязкости от температуры. Используя степенной закон вязкости (1.5), а также (2.10), находим величину α_ν, входящую в (2.8) и (2.9)

$$\alpha_\nu(\gamma, n, \nu) = 2(\nu + 1) \int_0^1 [1 + \gamma(1 - u^2)]^n \, du$$

При изменении параметра γ (или числа M) от нуля до бесконечности α_ν изменяется в пределах $2(\nu + 1) - \infty$. Окончательно для вычисления продольной составляющей скорости получаем формулу

$$\eta^2 = \frac{I(u)}{I(0)}, \qquad I(u) = \int_u^1 [1 + \gamma(1 - u^2)]^n \, du \tag{2.11}$$

Из (2.11) видно, что распределение скорости $u(\eta)$ одно и то же в осесимметричном канале с круглым сечением и в плоском канале.



В случае $M = 0$ $(\gamma = 0)$ имеем параболический профиль Пуазейля

$$u = 1 - \eta^2$$

Такой же результат получается при $\varkappa = 1$ и произвольном числе M течения на оси канала.

При $M \to \infty$ и $\varkappa > 1$ $(\gamma \to \infty)$ распределение скорости вычисляется при помощи соотношения

$$\eta^2 = \frac{J(u)}{J(0)}, \qquad J(u) = \int_u^1 (1 - u^2)^n \, du \tag{2.12}$$

При $n = 0.5,\ 1$ интегралы в формулах (2.11), (2.12) вычисляются.

Отметим интересную особенность распределения скорости $u(\eta)$ при $M = \infty$. В этом случае на оси канала температура и коэффициент вязкости газа равны нулю, и напряжение трения на оси может равняться нулю при отличном от нуля градиенте скорости. Действительно, из (2.12) получаем, раскрывая неопределенность при $\eta = 0$

$$u'(0) = -\lim \left[\frac{(1 - u^2)^{1-n}}{nu} \int_0^1 (1 - u^2)^n \, du \right]^{1/2} \quad \text{при } u \to 1 \tag{2.13}$$

Отсюда видно, что $u'(0) = 0$ при $n < 1$, $u'(0) = -\infty$ при $n > 1$, $u'(0) = -\sqrt{2/3}$ при $n = 1$.

На фигуре построены зависимости $u(\eta)$; значения $\varkappa$ и P приняты равными соответственно 1.4 и 0.71; при этом кривым соответствуют следующие комбинации значений n и числа Маха:

$1(-, M = 0)$, $2(n = 0.5, M = 5)$, $3(n = 0.5, M = \infty)$, $4(n = 1, M = 5)$, $5(n = 1, M = \infty)$

Отметим далее, что в фиксированном расширяющемся канале, закон площадей которого соответствует условиям автомодельного течения, т. е. определяется формулами (2.9), может быть реализовано автомодельное течение с любым заданным значением числа M на оси $(M > 0)$, если должным образом выбрано число R и на входе в канал имеет место профиль скорости (2.11). Действительно, соотношения (2.9) могут быть переписаны так:

$$\frac{y_w}{y_{\bar w}} = \begin{cases} \exp K \dfrac{X}{Y_{\bar w}} & \text{при } \nu = 1 \\[2mm] 1 + K \dfrac{X}{Y_{\bar w}} & \text{при } \nu = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

где

$$K = \frac{\varkappa M^2 \alpha_0(\nu, n)}{R_1}, \qquad R_1 = \frac{Y_w W \rho_1}{\mu_1}, \qquad \alpha_0 = 2 \int_0^1 [1 + \gamma(1 - u^2)]^n \, du$$

Укажем, кстати, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} C_f R_1 \frac{Y_w}{Y_w^-}$$

Здесь C_f — коэффициент трения, т. е. модуль напряжения трения на стенке канала, деленный на характерный скоростной напор $^1/_2 \rho_1 W^2$.

Из (2.14) видно, что при постоянном K можно задавать любое число M при соответствующем значении R_1.

Численные расчеты, проведенные по методике, изложенной в [2], показывают, что при законе площадей канала (2.14) и профиле скорости на входе, отличающемся от автомодельного, в канале на некотором расстоянии от входа устанавливается автомодельное течение.

Поступило 15 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams J. C. Viscous compressible and incompressible flow in slender channels. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 1.
2. Быркин А. П., Межиров И. И. О расчете течения вязкого газа в канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

М. М. ЗАСЛАВСКИЙ, В. А. ПЕРФИЛЬЕВ

(*Москва*)

Указывается, что известные вариационные принципы для модели идеальной сжимаемой жидкости в эйлеровых координатах обладают следующими недостатками:

1) они не связаны с соответствующими вариационными принципами в лагранжевых координатах;

2) процедура варьирования в этих вариационных принципах приводит не к самим уравнениям движения в форме Эйлера, а к некоторым соотношениям, соответствующим определенным классам решений уравнений Эйлера (при этом учет уравнений связей, налагаемых условиями адиабатичности и неразрывности, ограничивает область применения этих вариационных принципов только потенциальными течениями);

3) получение более общих результатов, связанных с отказом от потенциальности течения, достигается искусственным подбором некоторых добавочных условий связей, налагаемых на варьируемые величины, причем и в этом случае требуется дополнительное выяснение вопроса, является ли любое течение невязкой сжимаемой жидкости экстремалью соответствующей вариационной задачи.

Предлагается новая формулировка принципа Гамильтона для невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых координатах, свободная от указанных недостатков.

1. Известно [1–2], что вариационные принципы гидродинамики, аналогичные принципу Гамильтона классической механики системы дискретных материальных точек, наиболее естественно формулируются в лагранжевых координатах, поскольку задача лагранжева описания динамики сплошной среды (определение истинных траекторий частиц среды) соответствует как раз традиционной формулировке принципа Гамильтона классической механики системы. В противоположность этому, эйлерово представление динамики сплошной среды не имеет аналогов в механике системы точек. Существующие вариационные принципы в динамике невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых переменных формулируются как правило без связи с вариационными принципами в лагранжевых координатах, и критерии их истинности целиком определяются лишь совпадением получаемых при варьировании функционала действия уравнений Эйлера — Лагранжа с соответствующими гидродинамическими соотношениями, имеющими место в обычной системе эйлеровых уравнений движения. При этом характерной особенностью большинства вариационных принципов динамики невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых переменных является то обстоятельство, что процедура варьирования приводит не к самим уравнениям движения в форме Эйлера, а к соотношению типа теоремы Бернулли и к представлению поля скоростей через потенциал скоростей [3]. Более общие результаты, не связанные с ограничени-