

## О ВЛИЯНИИ СЖИМАЕМОСТИ ГАЗА НА ТЕЧЕНИЕ И ПЕРЕНОС ТЕПЛА ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

В. И. ПОЛЕЖАЕВ (Москва)

Приводятся результаты исследования исходя из уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа влияния критерия сжимаемости  $C_F$  в диапазоне  $0.02 \leq C_F \leq 1$  на конвекцию в замкнутой области при различных направлениях внешней силы. Рассмотрены особенности поля течения и температуры; показано, что при увеличении  $C_F$  теплопередача увеличивается в случае конвекции в области, подогреваемой сбоку, и уменьшается, когда область подогревается снизу. Возникновение конвекции в последнем случае зависит от величины  $C_F$ . Найдена зависимость критического числа Грассхофа от критерия сжимаемости. Результаты расчета двух типов конвекции (п. 2 и 3) при различных числах Грассхофа и малых значениях  $C_F$  приведены в работах [1, 2].

В газе, плотность которого зависит не только от температуры, но и от давления, процессы естественной конвекции определяются, помимо критериев Грассхофа и Прандтля, еще и критерием сжимаемости<sup>1</sup>  $C_F = gL/a^2$  ( $g$  — ускорение силы тяжести,  $L$  — масштаб длины,  $a$  — скорость звука), влияние которого существенно при больших размерах области, больших значениях  $g$  или малых  $a$ . Изменение давления при больших значениях этого критерия приводит к увеличению работы диссипативных сил и сил сжатия и перераспределению плотности в направлении действия силы. При естественной конвекции эти эффекты проявляются различным образом в зависимости от направления потока тепла по отношению к направлению внешней силы.

В работах [3, 4] исследовалось влияние диссипации исходя из уравнений несжимаемой жидкости с зависимостью плотности только от температуры (рассматривались случаи конвекции в плоском вертикальном канале и на вертикальной пластине). В случае, когда газ подогревается снизу, рассматривались в основном условия возникновения конвекции без учета теплопроводности и вязкости [5, 6]. Условия применимости уравнений несжимаемой жидкости с зависимостью плотности только от температуры (уравнения Буссинеска) для расчета конвекции сжимаемого газа обсуждались в работах [7, 8].

1. Общая постановка задачи приведена на фиг. 1. Замкнутая область поддерживается с одной стороны при температуре  $T_{w2}$ , с другой — при  $T_{w1}$  ( $T_{w2} > T_{w1}$ ); две других стороны области теплоизолированы. Рассматриваются два положения внешней силы:  $\theta = 0$  (подогрев сбоку) и  $\theta = 1/2\pi$  (подогрев снизу). Газ предполагается совершенным ( $p = \rho RT$ ), зависимости коэффициентов теплопроводности к вязкости от температуры определяются формулой Сатерленда, число Прандтля и удельные теплоемкости во всей области постоянны.

Движение газа и перенос тепла в газе рассчитываются исходя из уравнений Навье — Стокса, которые запишем в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{1}{\rho C_R} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - C_F \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{1}{\rho C_R} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - C_F \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> Этот критерий, возможно, более точно назвать критерием весовой сжимаемости, так как речь идет об изменении плотности, связанной с изменением давления под действием внешних сил.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\delta T}{\delta t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho C_R P} \left( \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{p}{\rho} (\kappa - 1) \operatorname{div} V + \frac{\mu \kappa (\kappa - 1)}{\rho C_R} \Phi$$

Здесь  $u, v$  — проекции вектора скорости  $V$  на оси  $x, y$  соответственно,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\Phi$  — диссипативная функция. За масштаб температуры принимается температура холодной стенки  $T_{w1}$ , к ней же отнесены коэффициенты теплопроводности и вязкости; масштаб скорости взят равным скорости звука на холодной стенке. Масштаб плотности, как и ранее [1, 2], взят равным плотности  $\rho_{w2}^0$  на нагретой стенке в условиях гидростатического равновесия при отсутствии внешней силы, масштаб длины — размер области  $L$ , масштаб времени  $L/a_{w1}$ , где  $a_{w1}$  — скорость звука на холодной стенке.

Будем рассматривать стационарные решения системы уравнений (1.1), которые реализуются в процессе установления при  $t \rightarrow \infty$ . Описание численного метода решения этих уравнений дано в работе [1].

Течение и перенос тепла на стационарном режиме при заданной геометрии области, фиксированных тепловом режиме границы и направлении внешней силы зависят от безразмерных величин

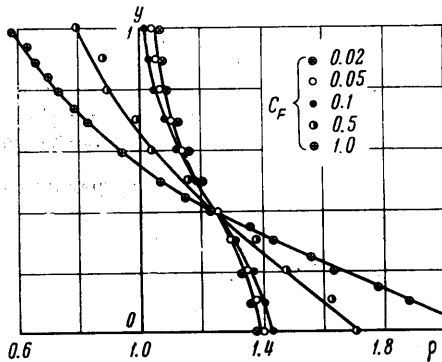
$$G = \frac{gL^3 \rho_{w2}^0}{\mu_{w1}^2} (\beta - 1), \quad P = \frac{\mu_{w1} C_p}{k_{w1}}, \quad C_F = \frac{gL}{a_{w1}^2}, \quad \kappa = \frac{C_p}{C_v}, \quad C^+ = \frac{C}{T_{w1}}, \quad \beta = \frac{T_{w2}}{T_{w1}} \quad (1.2)$$

Здесь  $G$  — число Грассхофа,  $P$  — число Прандтля,  $C_F$  — критерий сжимаемости,  $\kappa$  — отношение теплоемкостей,  $C^+$  — константа Сатерленда,  $c_p, c_v$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно,  $a_{w1}^2 = \kappa R T_{w1}$ . Расчеты выполнены при фиксированных значениях  $P = 0.71$ ,  $\kappa = 1.405$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $C^+ = 0.37$ .

В условиях, встречающихся обычно при естественной конвекции в поле земного тяготения, когда размеры области сравнительно невелики, значение  $C_F$  весьма мало (например, при  $g = 9.8 \text{ м/сек}^2$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ,  $a_{w1} = 300 \text{ м/сек}$  значение  $C_F$  порядка  $10^{-4}$ ), и влиянием весовой сжимаемости на течение и теплообмен можно пренебречь, переходя к уравнениям конвекции в предположении, что плотность не зависит от давления [2]. Большие значения  $C_F$  возможны в сильных гравитационных полях, а в поле земного тяготения — при движении с большими перегрузками или при больших размерах области. Заметим, что для области вертикальный размер  $H$  которой отличается от горизонтального, характерным будет критерий  $C_{FH} = gH/a_{w1}^2$ .

Численное моделирование изменения  $C_F$  при неизменных значениях других критериев подобия (1.2) осуществляется путем изменения комплекса  $C_R$  по формуле

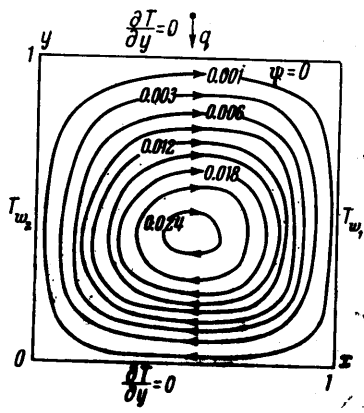
$$C_R = \left[ \frac{G}{C_F (\beta - 1)} \right]^{1/2}, \quad \left( C_R = \frac{a_{w1}^0 \rho_{w2}^0}{L} \right)$$



Фиг. 2

что соответствует, например, при изменении  $g$  изменению масштаба плотности (давления). Расчеты системы (1.1) при малых  $C_F < 0.02$  затруднительны из-за появления малого параметра при старших производных; при этом значительно возрастает число итераций. При больших  $C_F > 1$  в расчетах на крупных сетках из-за значительных изменений плотности возникают бегания, характерные для симметричных разностных схем [1] без сглаживания. Основные расчеты выполнены на разностной сетке  $\tau = h = l = 0.1$  ( $\tau$  — шаг сетки по времени;  $h, l$  — шаги сетки в направлениях  $x, y$  соответственно), для контроля точности проводились также расчеты с шагами сетки, уменьшенными вдвое ( $\tau = h = l = 0.05$ ).

2. В области, подогреваемой сбоку (этот случай соответствует углу  $\theta = 0$  на фиг. 1) гидростатическое равновесие неподвижного газа невозможно и конвективное движение поддерживается за счет неравномерного распределения плотности в направлении, перпендикулярном направлению действия внешней силы. В развитом циркуляционном движении возникает вертикальное температурное расслоение газа: в нижней части области температура ниже, а плотность выше, чем наверху. При увеличении  $C_F$  появляется значительное вертикальное расслоение плотности под действием внешних сил: плотность газа увеличивается вниз и уменьшается вверх. Профили плотности  $\rho(y)$  в сечении  $x = 0.5$  при  $0.02 \leq C_F \leq 1.0$  приведены на фиг. 2. Эти и показанные на фиг. 3—5 результаты расчетов получены при развитой конвекции ( $G = 1.25 \cdot 10^4$ ), когда на нагретой и холодной стенках выявляются температурные пограничные слои (режим пограничного слоя). При значениях  $C_F < 0.1$  относительное изменение плотности невелико; профили плотности при  $C_F = 0.02$  и  $C_F = 0.05$  практически не различаются (режим слабой сжимаемости). На фиг. 3 показана картина линий тока при  $C_F = 1.0$  и  $G = 1.25 \cdot 10^4$  (аналогичная картина при  $C_F = 0.05$  приведена на фиг. 6 в работе [1]). В соответствии с балансом расхода сжимаемого газа через вертикальное сечение



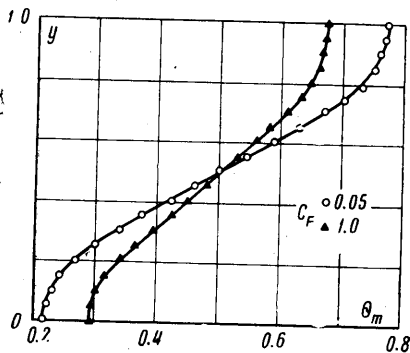
Фиг. 3

$$\int_0^1 \rho v dy = 0$$

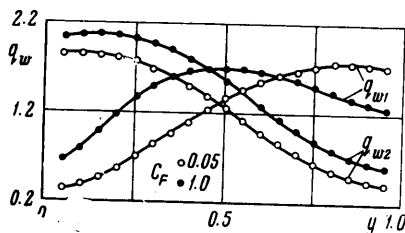
линии тока при  $C_F = 1.0$  сгущены у нижнего основания и более редки у верхнего, а центр вихря смещен в сторону нижнего основания. При увеличении  $C_F$  вертикальное расслоение газа по температуре уменьшается; сопоставление распределения температуры  $\theta_m(y)$  при  $C_F = 0.05$  и  $C_F = 1.0$  в вертикальном сечении при  $x = 0.5$  приведено на фиг. 4 (здесь  $\theta_m = (T_m - T_{w1}) / (T_{w2} - T_{w1})$ , где  $T_m$  — температура в сечении  $x = 0.5$ ).

Вертикальное перераспределение параметров при увеличении  $C_F$  связано с качественно новыми закономерностями в местном потоке тепла на нагретой и холодной стенках (фиг. 5). При малых  $C_F$  местный поток тепла монотонно падает по течению, поднимаясь вверх вдоль нагретой стенки к опускающемуся вниз вдоль холодной стенки, причем местные потоки тепла  $q_{w1}(y)$  на холодной и  $q_{w2}(y)$  на нагретой стенках симметричны.

При увеличении  $C_F$  распределения потоков тепла на нагретой и холодной



Фиг. 4



Фиг. 5

стенках значительно различаются; в потоке тепла  $q_{w1}(y)$  появляется максимум, положение которого смещается вниз по потоку, и при  $C_F = 1.0$  находится примерно на расстоянии  $x = 0.5$ . Средняя теплопередача от нагретой стенки к холодной увеличивается; это связано в основном с увеличением выделения тепла за счет работы сил трения и сжатия. Зависимость среднего числа Нуссельта при ламинарной конвекции

в режиме пограничного слоя, полученная в расчетах в диапазоне  $0.02 \leq C_F \leq 1.0$ , имеет вид

$$N^+(C_F) = N^0(1 + C_F)^{0.35} \quad (2.1)$$

Здесь

$$N^+ = \frac{q_w^+ L}{k_{w1}(T_{w2} - T_{w1})} \quad q_w^+ = \int_0^1 k_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w dy, \quad N_0 = N^+(C_F \rightarrow 0)$$

Расчеты при  $C_F = 0.05$  и  $C_F = 1.0$  проводились также на сетке  $\tau = h = l = 0.05$ ; при этом относительная невязка в среднем потоке тепла не превышала 1%. Из распределений плотности (фиг. 2) и зависимости (2.1) следует, что приближенное моделирование течения и теплообмена при естественной конвекции несжимаемой жидкости, исходя из уравнений (1.1), возможно в режиме слабой сжимаемости при  $C_F = 0.02 \div 0.05$ ; поправка на влияние сжимаемости в среднем потоке тепла при этом не превышает 2%. В этом режиме безразмерные значения скорости  $u/\sqrt{C_F}$ ,  $v/\sqrt{C_F}$  и времени установления нестационарного процесса  $t/\sqrt{C_F}$  не зависят от величины  $C_F$  и, кроме того, возможно универсальное представление зависимости числа Нуссельта при различных  $\kappa$  и  $C_F$  от одного критерия  $K = gL/c_p T_{w1} = (\kappa - 1)C_F$  [9]. Для конвекции жидкости с зависимостью плотности только от температуры, но с учетом диссипативных сил и сил сжатия этот критерий был ранее введен Острахом [3]. Для сжимаемого газа, как видно из приведенных результатов, этот критерий учитывает еще эффекты, связанные с вертикальным перераспределением плотности.

3. При конвекции в области, подогреваемой снизу ( $\theta = 1/2$  л на фиг. 1), влияние сжимаемости оказывается совсем иным. В этом случае гидростатическое равновесие неподвижного газа возможно, но может быть неустойчивым, конвективное движение возникает после потери устойчивости равновесия и поддерживается за счет неравномерного распределения плотности в направлении, совпадающем с направлением внешней силы. В хорошо изученном случае конвекции в вязкой несжимаемой жидкости с зависимостью плотности только от температуры, потеря устойчивости равновесия определяется числом Грассхофа и происходит при  $G > G_*$  ( $G_*$  — критическое число Грассхофа). С другой стороны, в случае, если теплопроводностью и вязкостью пренебречь, но учесть сжимаемость газа, условие устойчивости будет иметь вид [5, 6].

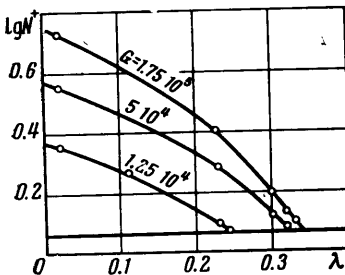
$$\frac{dT}{dx} > - \frac{g}{c_p} \quad (3.1)$$

Это условие определяет так называемый адиабатический градиент температуры и обычно используется как необходимое условие устойчивости подогреваемой снизу газовой среды больших размеров. Согласно (3.1) элемент газа, всплывающий вверх и расширяющийся в поле переменной плотности, опускается обратно, если градиент температуры меньше адиабатического, и продолжает всплывать, если градиент температуры больше адиабатического. Условие (3.1) можно записать в безразмерном виде, связывающем исходные критерии.

$$\beta < 1 + K \quad (3.2)$$

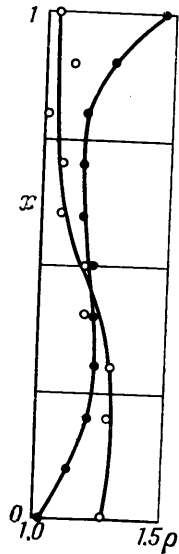
В общем случае сжимаемого, вязкого и теплопроводного газа условия возникновения конвекции будут определяться как числом Грассхофа, так и критерием сжимаемости и отношением температур. При больших значениях  $C_F$  увеличение плотности под действием внешней силы компенсирует уменьшение плотности за счет нагревания стенки, и равновесие может быть устойчивым даже при  $G > G_*$ . Цель последующих расчетов — установить связь между этими двумя условиями возникновения конвекции и оценить влияние критерия сжимаемости на теплообмен и структуру конвективного движения, развивающегося после потери устойчивости. Детали расчета и анализ ветвей стационарных решений при малых  $C_F$  изложены в работе [2].

На фиг. 6 приведена зависимость среднего числа Нуссельта от критерия сжимаемости, полученная в расчетах при  $G = 1.25 \cdot 10^4$ ,  $5 \cdot 10^4$ ,  $1.75 \cdot 10^5$  на стационарном режи-



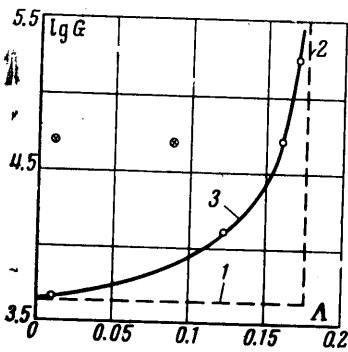
Фиг. 6

ме за порогом устойчивости для циркуляционного движения с одним вихрем, которое имеет наименьшее критическое число Грассхофа  $G_1$  (по оси абсцисс на фиг. 6 отложены значения  $\lambda = \lg(1 + C_F)$ ). Сопоставление профилей плотности  $\rho(x)$  в сечении  $y = 0.5$  при  $G = 5 \cdot 10^4$  и значениях  $C_F = 0.05$  и  $0.5$  приведено на фиг. 7. При малом  $C_F = 0.05$  внутри области имеется развитое конвективное движение с пограничным слоем на стенках и ядром в центральной зоне. Изменение плотности в этом случае определяется в основном распределением температуры, и плотность меньше на нагретой стенке и больше на холодной. При увеличении  $C_F$  плотность в направлении действия силы увеличивается и становится большей внизу и меньшей — наверху. Это приводит к снижению интенсивности циркуляционного движения (в результате чего ядро в центральной зоне и пограничные слои на стенках сливаются) и переноса тепла от нагретой стенки к холодной (фиг. 6). Так как интенсивность циркуляционного движения здесь поддерживается в основном за счет неравномерного распределения плотности в направлении действия силы, то и влияние сжимаемости оказывается значительно большим, чем в случае подогрева сбоку (п. 2.).



Фиг. 7

Условия возникновения конвекции определяются из пересечения кривых  $N^+(C_F)$  при различных  $G$  с линией  $N^+ = \text{const}$ , соответствующей переносу тепла только путем теплопроводности (фиг. 6). Полученная таким образом зависимость критического числа Грассхофа от критерия сжимаемости приведена на фиг. 8 (по оси абсцисс на фиг. 8 отложены значения  $\Lambda = \lg(1 + K)$ ). Пунктирной линией 1 на фиг. 8 показана граница возникновения конвекции при условиях, когда сжимаемость газа практически отсутствует ( $G > G_*$ ). Пунктирной линией 2 показана граница возникновения конвекции в сжимаемом газе без учета теплопроводности и вязкости, согласно оценке (3.2)<sup>1</sup> при  $\beta = 1.5$ . Согласно



Фиг. 8

конвекция должна быть в области значений  $(G, K)$ , находящихся сверху линии 1 и слева от линии 2. Граница возникновения конвекции, полученная с учетом вязкости теплопроводности и сжимаемости газа, показана на фиг. 8 сплошной линией 3. Отсюда видно, что влияние сжимаемости затягивает возникновение конвекции в области, подогреваемой снизу, и при значениях  $(G, K)$ , ограниченных линиями 1, 2 и 3, конвективного движения нет. Таким образом, в этом диапазоне значений  $(G, K)$  равновесие устойчиво при перепаде температур, превышающем адиабатический; критерий Шварцшильда (3.1) приближается к достаточному условию возникновения конвекции лишь при больших числах Грассхофа (судя по результатам, представленным на фиг. 8, при  $G > 5 \cdot 10^5$ ), когда влияние вязкости существенно уменьшается. Область значений  $(G, K)$  выше кривой 3 соответствует развитым конвективным движениям за порогом устойчивости (крестиками отмечены значения  $G, K$ , которым соответствую-

ют результаты расчета профилей плотности (фиг. 7).

Представляет интерес изучение режимов конвективного движения и в более широком диапазоне чисел Грассхофа и критерия сжимаемости.

Приведенные результаты получены при постоянном отношении температур  $\beta$ . При различных  $\beta$  условие устойчивости  $G(K)$  удобнее представить в виде зависимости  $K^+(C_F)$ , где

$$K^+ = \frac{K}{\beta - 1} = \frac{g}{c_p} \cdot \frac{L}{T_{w_2} - T_{w_1}}$$

есть отношение адиабатического градиента к заданному.

В заключение автор благодарит Г. И. Петрова и В. С. Авдеевского за внимание к работе и полезные советы.

<sup>1</sup> Эта оценка предполагает линейность начального профиля температуры во всей области; при  $\beta = 1.5$ ,  $C^+ = 0.37$  начальный профиль здесь незначительно отличается от линейного.

Поступило 27 III 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
2. Полежаев В. И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
3. Ostrach S. Laminar flows with body forces. In: «Theory of laminar flows», London, Oxford, Univ. Press, 1964, vol. 4.
4. Gebhard B. Effect of viscous dissipation on natural convection. J. Fluid Mech., 1962, No. 14, pt. 2.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
6. Сорокин В. С. Об устойчивости неравномерно нагретого газа в поле силы тяжести. ПММ, 1953, т. 17, № 2.
7. Jeffreys H. The instability of a compressible fluid heated from below. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, 26, 170.
8. Spiegel E. A., Veronis G. On Boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophys. J., 1960, vol. 131, No. 2.
9. Полежаев В. И. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое. Тр. III Всес. Сопещания по тепло- и массообмену, т. 1. Минск, 1968.

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Б. ГОРСКИЙ

(Саранск)

В работе выводятся уравнения второго и третьего приближения для функции тока плоского и осесимметричного безвихревого околзвучового потока невязкого газа и находятся их частные решения, соответствующие некоторым трансзвучовым течениям.

Аналогичное изучение во втором приближении дозвучового и сверхзвучового потоков было проведено в работах Ван Дайка [1] и Хейса [2].

Второе приближение для потенциала скорости околзвучового потока было подробно рассмотрено Хейсом [3]. Еврар [4, 5] исследовал асимптотическое поведение трансзвучового потока далеко от тела, а С. В. Фалькович, И. А. Чернов и автор [6] — течение в горловине сопла.

В данной заметке приводится околзвучовая асимптотика для функции тока

1. Уравнения асимптотических приближений трансзвучового потока. Плоские ( $\nu = 0$ ) и осесимметричные ( $\nu = 1$ ) установившиеся безвихревые течения невязкого газа описываются одним уравнением для функции тока  $\Psi$

$$\Psi_x^2 \Psi_{xx} + 2\Psi_x \Psi_y \Psi_{xy} + \Psi_y^2 \Psi_{yy} - \nu y^{-1} \Psi_y (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) + (1 - M^{-2}) (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) (\nu y^{-1} \Psi_y - \Psi_{xx} - \Psi_{yy}) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $M$  — число Маха;  $x, y$  — декартовы координаты в плоском случае, а в осесимметричном потоке  $x$  — координата вдоль прямолинейной оси симметрии,  $y$  — расстояние до этой оси. В таком виде уравнение движения в более общем случае присутствия продольного магнитного поля получено для  $\nu = 0$  в [7] и для  $\nu = 1$  в [8]. При этом функция тока  $\Psi$  введена, как обычно, при помощи уравнения неразрывности, так что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y^\nu \frac{\rho v_y}{\rho_* w_*}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = y^\nu \frac{\rho v_x}{\rho_* w_*} \quad (1.2)$$