

го (при данном G) значения ψ_* . Как видно из фиг. 11, с увеличением G время разгона τ_* уменьшается, а максимальная интенсивность увеличивается. Обработка результатов, полученных для разных G , приводит к зависимостям

$$\psi_* = 0.20G^{0.47}, \quad \tau_* = 1.8G^{-0.57} \quad (3.2)$$

справедливым при больших G (практически при $G > 40 \cdot 10^3$).

Таким образом, результаты численного решения позволяют установить асимптотические зависимости характеристик нестационарной конвекции — времени разгона и максимальной интенсивности конвекции от числа Грассхофа.

Автор благодарен Е. М. Жуховицкому и Г. З. Гершуни за постоянное внимание к работе и помощь.

Поступило 26 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Севрук И. Г. О нестационарной тепловой конвекции в шаровом слое. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
2. Пустовойт С. П. О нестационарной тепловой конвекции в сферической полости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
3. Wilkes I. O., Churchill S. W. The finite — difference computation of natural convection in a rectangular enclosure. A. I. Ch. E. Journal, 1966, vol. 12, No. 1.
4. Barakat H. Z., Clark I. A. Analytical and experimental study of the transient laminar natural convection flows in partially filled liquid containers. Proc. 3 rd Int. Heat Transf. Conf., 1966, vol. 2.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
6. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и в физике. М., «Энергия», 1964.
7. Russell D. D. On obtaining solutions to the Navier — Stokes equations with Automatic digital computers. Aeronaut Res. Council Repts. and Mem., 1963, No. 3331.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О КОМБИНИРОВАННОЙ (ВЫНУЖДЕННОЙ И СВОБОДНОЙ) ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КРУГОВОМ КАНАЛЕ В ОДНОРОДНОМ МАССИВЕ

Л. Э. БЭР (Пермь)

Рассмотрена установившаяся комбинированная (вынужденная и свободная) турбулентная конвекция в вертикальном круговом канале в однородном твердом массиве в случае, если в массиве вдали от канала поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры. Определено распределение скорости и температуры, вычислены критические значения числа Рэлея при осесимметричном и антисимметричном движениях жидкости. Задача решается методом Галеркина.

Обозначения

$v^{(0)}$ — скорость вынужденной конвекции,	p_0 — осредненное давление, соответствующее постоянной температуре жидкости,
$v^{(1)}$ — скорость свободной конвекции,	z — координата вдоль оси канала, направленная вверх,
v — скорость при наложении вынужденной и свободной конвекции,	Q — количество тепла, выделяемое внутренними источниками в единице объема жидкости в единицу времени,
$\langle v \rangle$ — средняя по сечению канала скорость,	κ — коэффициент теплопроводности жидкости, (χ — массива),
T — температура при наложении вынужденной и свободной конвекции,	R — число Рейнольдса,
T_w — температура стенки канала,	R^* — число Рэлея,
y — расстояние от стенки канала,	P — число Прандтля,
y_* — безразмерное расстояние от стенки,	Γ — число Грассхофа,
r_0 — радиус канала;	v_* — динамическая скорость, определяемая из равенства
r — расстояние от оси,	
ν_t — турбулентная вязкость,	
χ_t — турбулентная температуропроводность,	

$$\frac{2\rho_0 \nu_*^2}{r_0} = -\rho_0 g - \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad u^{(0)} \equiv \frac{v^{(0)}}{v_*}, \quad u^{(1)} \equiv \frac{v^{(1)}}{v_*}, \quad u \equiv u^{(0)} + u^{(1)}, \quad \theta \equiv \frac{T}{A r_0}, \quad v \equiv v^{(0)} + v^{(1)},$$

$$\psi = 1 + \frac{v_t}{v}, \quad \psi_1 = 1 + \frac{\chi_t}{\chi}, \quad \xi = \frac{r}{r_0}$$

$$G = \frac{g\beta A r_0^4}{v^2}, \quad P = \frac{v}{\chi}, \quad P_t = \frac{v_t}{\chi_t}, \quad P_1 = \frac{P}{P_t}$$

$$R = \frac{2r_0 \langle v \rangle}{v}, \quad R_* = \frac{v_* r_0}{v}, \quad R^* = GP, \quad Q_* = \frac{Q}{\rho_0 c_p A v_*}$$

$$J_2 = \int_0^1 (1 + v_t/v) \left(\frac{du^{(0)}}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi,$$

$$J_{ij} = \int_0^1 (1 + v_t/v) \frac{du_i^{(1)}}{d\xi} \frac{du_j^{(1)}}{d\xi} \xi d\xi \quad (i, j=1, 2)$$

1. **Уравнения задачи.** Пусть через вертикальный круговой канал в однородном твердом массиве прокачивается жидкость. Числа Рейнольдса достаточно велики, так что течение турбулентно. В массиве бесконечно далеко от канала внешними источниками поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры A . В канале имеется постоянный вертикальный градиент давления, и в жидкости произвольно по сечению, но осесимметрично распределены внутренние источники тепла. Жидкость предполагается механически несжимаемой, но термически деформируемой, так что на вынужденное движение накладывается свободное. Осредненную скорость будем предполагать вертикальной.

Уравнения задачи [1] будут

$$\nabla(\psi \nabla u) = -2R_* - (G/R_*)\theta, \quad \nabla(\psi_1 \nabla \theta) = -PR_*Q_* + PR_*u \quad (1.1)$$

В уравнения (1.1) входят четыре неизвестные функции: u, θ, v_t, χ_t .

Для их определения двух уравнений (1.1) недостаточно. Поэтому в рамках полумпирической теории v_t и χ_t должны быть найдены путем обработки опытных данных и из физических соображений.

Тепловые явления в канале являются причиной возмущений температурного поля в массиве. Возмущение температуры в массиве удовлетворяет уравнению

$$\Delta \theta_e = 0 \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) нужно решить при следующих условиях на границе канала и массива:

$$u = 0, \quad \theta = \theta_e, \quad \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} = \kappa_e \frac{\partial \theta_e}{\partial n} \quad (1.3)$$

и в массиве на бесконечности $\theta_e \rightarrow 0$.

2. **Решение.** Будем искать решение уравнений (1.1) в виде

$$u = F(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\xi) \cos k\varphi, \quad \theta = \theta(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(\xi) \cos k\varphi \quad (2.1)$$

Здесь $F(\xi)$ — осесимметричная часть скорости, т. е. вынужденная конвекция; $\theta(\xi)$ — соответствующая этому движению температура.

Подставив (2.1) в (1.1) и приравнявая члены с одинаковыми функциями от азимута φ , получим системы уравнений

$$\text{при } \cos 0 \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \psi \frac{dF}{d\xi} \right) = -2R_* - \frac{G}{R_*} \theta \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \psi_1 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -PR_*Q_* + PR_*F \quad (2.2)$$

при $\cos k\varphi$ ($\kappa = 1, 2, 3 \dots$)

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \psi \frac{dF_k}{d\xi} \right) - \frac{k^2}{\xi^2} \psi F_k = -\frac{G}{R_*} \theta_k, \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \psi_1 \frac{d\theta_k}{d\xi} \right) - \frac{k^2}{\xi^2} \psi_1 \theta_k = PR_*F_k \quad (2.3)$$

Здесь ψ и ψ_1 считаются функциями только от ξ и параметров. Из (2.2) могут быть найдены функции F и θ , из (2.3) — функции F_k, θ_k . Наибольший интерес представляет случай $k = 1$, когда жидкость в одной половине канала поднимается, а в другой опускается — антисимметричное течение.

Решая второе из уравнений (2.2), можно найти температуру жидкости в канале, отсчитанную от температуры стенки на расстоянии ξ от оси

$$\vartheta - \vartheta_w = PR_* \int_1^{\xi} \frac{J_1(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \quad \left(J_1(\xi) \equiv \int_0^{\xi} (F - Q_*) \xi d\xi \right) \quad (2.4)$$

Следуя схеме метода Бубнова — Галеркина, будем искать решение первого из уравнений (2.2) в виде суммы функций

$$F = u^{(0)} + u^{(1)} = u^{(0)} + \sum_{i=1}^n A_i u_i^{(1)} \quad (2.5)$$

Каждая из функций $u_i^{(1)}$ должна удовлетворять граничному условию на стенке, уравнению неразрывности и условию замкнутости потока свободной конвекции. При турбулентном режиме течения функции $u_i^{(1)}$ должны отражать факт наличия большого градиента скорости у стенки.

Подставим теперь (2.4) и (2.5) в первое из уравнений (2.2), умножим его на каждую из функций $u_i^{(1)}$ и проинтегрируем по сечению канала. После некоторых преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_i

$$R_* \int_0^1 \frac{I_i(\xi) J_1(\xi) d\xi}{(1 + P_i v_t/v) \xi} + \int_0^1 (1 + v_t/v) \frac{du^{(1)}}{d\xi} \frac{du_i^{(1)}}{d\xi} \xi d\xi = 0 \quad (2.6)$$

Здесь

$$I_i(\xi) \equiv \int_0^{\xi} u_i^{(1)} \xi d\xi$$

Зависимость (2.6) верна для ламинарного, турбулентного и промежуточного режимов течения. При вычислении (2.6) встречается интеграл (2.7). С хорошей степенью точности можно принять

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{du^{(0)}}{d\xi} \frac{du_i^{(1)}}{d\xi} \xi d\xi = 0 \quad (2.7)$$

В случае ламинарного режима течения (2.7) выполняется точно, при турбулентном течении интеграл (2.7) составляет 1.5% от J_2 и 0.6% от наименьшего из интегралов J_{ij} , где в качестве $u_i^{(1)}$ и $u_j^{(1)}$ брались функции (3.1) при $m_1 = 15$, $m_2 = 45$. Интегралы были вычислены при $R = 314.25$.

Заметим, что постоянная в выражении для температуры (2.4) при решении системы (1.1) методом Галеркина не имеет существенного значения.

В случае $R_* = Q_* = 0$ (чисто свободная конвекция без внутренних источников тепла) система уравнений (2.2) становится однородной и имеет нетривиальное решение лишь при определенном значении числа Рэлея R_{0*} , характеризующем порог конвекции. Это значение найдется из условия равенства нулю определителя системы (2.6). В этом случае при $R_* > 0$, когда в верхней части канала теплее, чем в нижней, свободное движение вообще не возникает. При $R_* < 0$, когда в нижней части канала теплее, чем в верхней, движение возникает при достижении числом Рэлея критического значения. Если, кроме свободного движения есть вынужденное ($R_* \neq 0$) или присутствуют внутренние источники тепла ($Q_* \neq 0$), то система (2.6) имеет единственное решение при любых значениях R_* . Вынужденное движение в этом случае является причиной возникновения свободного движения при $R_* > 0$ и при малых (докритических) $R_* < 0$. Если при комбинированной осесимметричной конвекции число Рэлея достигает критического значения, то амплитуда свободного движения обращается в бесконечность. В действительности бесконечно большого движения не будет. Если амплитуда свободной конвекции достаточно велика, то осесимметричное движение становится гидродинамически неустойчивым и переходит в другой тип движения, например, в тип движения, в котором преобладает антисимметричная конвекция.

Системы уравнений (2.3) однородны и имеют решение при выполнении определенной зависимости между R_* и параметрами R_* и χ/χ_* . Если число R_* достаточно велико и эти зависимости выполняются, то на осесимметричное течение накладываются движения, определяемые из (2.3). Наибольший интерес представляет антисимметричное течение ($k = 1$), возникающее при наименьших числах Рэлея. Если на

осесимметричную комбинированную конвекцию накладывается антисимметричная, то для определения амплитуды антисимметричного движения необходимо знать поток тепла, переносимого конвекцией через сечение канала за единицу времени. По мере увеличения R^* все новые пары уравнений (2.3) будут иметь решение, возникнут новые движения. Постепенно кроме турбулентности гидродинамической наступит турбулентность тепловая.

Для решения системы уравнений (2.3) при каждом k применим схему решения, использованную в [2] при решении задач ламинарной свободной конвекции методом Бубнова — Галеркина. Представим скорость в виде отрезка ряда

$$F_k = \sum_{i=1}^n A_i u_i^{(1)} \quad (2.8)$$

Каждая из функций $u_i^{(1)}$ должна удовлетворять граничному условию на стенке, уравнению неразрывности и условию замкнутости потока свободной конвекции. Подставив (2.8) во второе из уравнений (2.3), решаем его совместно с уравнением (1.2) и граничными условиями (1.3). Затем подставляем найденную температуру θ_k и (2.8) в первое из уравнений (2.3). Затем умножаем его на каждую функцию $u_i^{(1)}$ и интегрируем по сечению канала. Полученная однородная система алгебраических уравнений определяет критическое число Рэлея.

3. Ламинарная конвекция. Применим уравнения (2.6) для решения задачи о ламинарной комбинированной конвекции в вертикальном канале. В качестве приближающих функций для осесимметричной свободной конвекции возьмем многочлены

$$u_m^{(1)} = (1 - \xi^2)^m \left[1 - \frac{2(m+2)}{(m+1)} \xi^2 \right] \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

Будем исходить из предположения, что система функций (3.1) является полной в смысле среднего квадратичного уклонения. В (2.5) ограничимся двумя приближающими функциями для свободной конвекции. Положим $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. В результате подстановки (3.1) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

$$u^{(0)} = \frac{1}{2} R_* (1 - \xi^2) \quad (3.2)$$

в (2.6), полагая в (2.6) $v_i/v = 0$, находим систему двух неоднородных алгебраических уравнений для определения A_1 , A_2 . Система имеет единственное решение при любых значениях R^* . Сравнение с точным решением [3, 4] при значениях параметров $-100 \leq R^* \leq 10^3$, $0 \leq Q_* \leq \frac{5}{2} R_*$ показывает, что наибольшее отклонение не превышает 0.5%. Критическое число Рэлея, вычисленное с помощью (3.1) при $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$, равно $R_{0*} = -452.62$. Это число лишь на 0.1% больше по модулю точного значения (-452.1), найденного в [3].

Вычисления, проведенные для одной и двух приближающих функций, показали быструю сходимость метода.

При $R^* > 10^3$ по мере увеличения R^* отклонения от точного решения быстро нарастают. Это объясняется тем, что при $R^* > 10^3$ скорость свободной конвекции имеет большой градиент у стенки. Между тем (3.1) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ не обеспечивает большого градиента скорости у стенки. Можно поэтому просто увеличить число приближающих функций, т. е. добавить $m_3 = 3$, $m_4 = 4$ и т. д. Однако, имея в виду получение наилучшего приближения только с двумя приближающими функциями, возьмем $m_1 = 1$, $m_2 = 5$. Вычисления, выполненные с учетом (3.1) при $m_1 = 1$, $m_2 = 5$, (3.2) и условия $Q_* = \text{const}$, дают

$$A_1 = \frac{R^* [R^* (216887R_* - 771804Q_*) - 740417184R_* + 1723887360Q_*] 25}{[R^{*2} 291929 + R^* 2387786400 + 1034332416000] 8}$$

$$A_2 = \frac{R^* [R^* (-321R_* + 1040Q_*) + 45600R_*] 9009}{[R^{*2} 291929 + R^* 2387786400 + 1034332416000] 4} \quad (3.3)$$

При $-100 \leq R^* \leq 10^4$, $0 \leq Q_* \leq \frac{5}{2} R_*$ отклонения от точного решения [3, 4] не превышают 3%. В большинстве же случаев отклонения значительно меньше.

4. Турбулентная конвекция. Убедившись в эффективности приближенного метода, рассмотрим комбинированную турбулентную конвекцию в вертикальном канале.

При чисто вынужденной конвекции турбулентная вязкость вблизи стенки канала хорошо выражается функцией [5]

$$v_i/v = 4.4 ({}^{1/11} y_* - \text{th } {}^{1/11} y_*) \quad (4.1)$$

в ядре потока — функцией

$$v_t / v = {}^{1/15}R_* (1 - \xi^2) (1 + 2\xi^2) - 1 \quad (4.2)$$

Вблизи стенки (4.2) теряет силу. Формулы (4.1), (4.2) отличаются от соответствующих формул полученных в [5] тем, что в них подставлено значение $\kappa (\kappa = 0.4)$ и в (4.1) коэффициент 11 вынесен за скобки. В пристеночном слое будем брать v_t / v согласно (4.1) до точки сопряжения с (4.2), в ядре потока — согласно (4.2). На фиг. 1 кривые 1, 2, 3 выражают соответственно (4.1), (4.2) и $1 + v_t / v$ при $R_* = 314.25$. Если значения параметра R_* равны 93.43; 110; 314.25; 700.62, то при чисто вынужденной конвекции числа Рейнольдса соответственно будут $2.5 \cdot 10^3$; $3 \cdot 10^3$; 10^4 ; $2.5 \cdot 10^4$. Отношение $v_t / \chi_t = P_t$ будем считать постоянным.

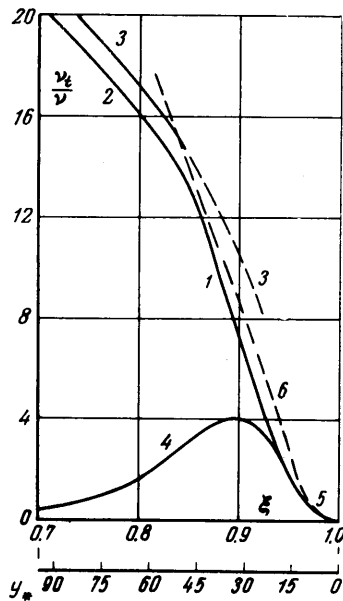
Если на вынужденное движение накладывается свободное, то турбулентная вязкость претерпевает некоторые изменения, так как форма профиля скорости оказывает влияние на развитие турбулентных пульсаций. Как видно из экспериментальных данных [6, 7], если в пристеночном слое потоки вынужденной и свободной конвекций находятся в противотоке ($R^* < 0$), возникает дополнительное возмущение пристеночного слоя и увеличение турбулентной вязкости в этом слое. Это ведет к возрастанию сопротивления течению и усилению теплопередачи. Напротив, если потоки в пристеночном слое совпадают ($R^* > 0$), турбулентные пульсации, а значит, и турбулентная вязкость в этом слое значительно убывают. Некоторое изменение турбулентной вязкости в ядре течения весьма незначительно влияет на сопротивление и теплопередачу.

Это явление можно назвать эффектом возмущения или стабилизации вязкого пристеночного слоя. Учтем этот эффект, исходя из следующих соображений. Вблизи стенки добавочная турбулентная вязкость ϵ / v должна зависеть от безразмерного расстояния от стенки y_*^4 [8], вне пристеночного слоя ϵ / v должна обращаться в нуль. Этим требованиям удовлетворяет функция

$$\epsilon / v = a ({}^{1/11} y_*)^4 \exp(-{}^{1/11} b y_*) \quad (4.3)$$

Коэффициенты a и b должны быть определены экспериментально.

Изучая экспериментальные данные работы [7], можно явственно увидеть, что если потоки вынужденной и свободной конвекции у стенки совпадают, теплопередача постепенно убывает по мере увеличения свободной конвекции. При этом наибольшее уменьшение составляет $25 \div 30\%$ и наступает, когда вынужденная и свободная конвекции одного порядка величины. Этот факт может использоваться для определения a и b в (4.3). Если положить $a = 4.4$, $b = -1.4$ и рассчитать теплопередачу, то вычисленное число Нуссельта будет на 25% меньше, чем при $a = 0$.



Фиг. 1

При скорости свободной конвекции на оси канала одной величины с вынужденной, можно, основываясь на указанных фактах, с удовлетворительной точностью положить $a = -4.4$, $b = 1.4$, если потоки у стенки совпадают и $a = 4.4$, $b = 1.4$, если потоки у стенки не совпадают. График функции (4.3) при $a = 4.4$, $b = 1.4$ представлен на фиг. 1 кривой 4.

Переменные ξ и y_* связаны зависимостью $y_* = R_* (1 - \xi)$. На фиг. 1 кроме масштаба для ξ дан дополнительный масштаб для y_* при $R_* = 314.25$.

Как показано ниже, при $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$, $Q_* = 0$ свободная конвекция на оси скважины одной величины с вынужденной, т. е. $|u^{(1)}(0)| = |u^{(0)}(0)|$, при $R_1^* = 1.1 \cdot 10^5$ и $R_2^* = -4.2 \cdot 10^4$. Если же $Q_* = R_* / 10$, то это равенство выполняется при $R_3^* = 1.7 \cdot 10^5$; если $Q_* = -R_* / 10$, то при $R_4^* = -1.9 \cdot 10^4$.

На фиг. 2 построена зависимость коэффициента a от R^* для этих четырех случаев. При этом каждый раз ставилось требование, чтобы $a = 4.4$ для указанных значений R^* и убывало в десять раз, если R^* возрастало или убывало в десять раз.

Восходящая ветвь кривой задавалась функцией

$$a = 4.4 \exp[-c_i (R^* - R_i^*)^2] \quad (4.4)$$

и нисходящая ветвь — функцией

$$a = 4.4 \exp[-c_i^1 (R^* - R_i^*)^2] \quad (4.5)$$

Коэффициенты c_i и c_i^1 были определены так, чтобы (4.4) и (4.5) удовлетворяли указанным выше требованиям. Выражения (4.4), (4.5) и коэффициенты a и b в (4.3) должны рассматриваться как предварительные и для их обоснования и уточнения нужны физические эксперименты.

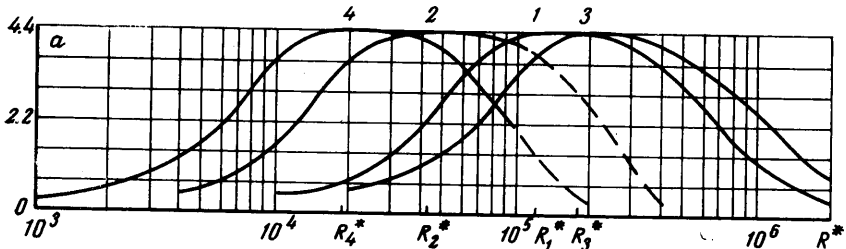
На фиг. 2 кривые построены для значений параметров

$$1(R^* > 0, Q_* = 0); \quad 2(R^* < 0, Q_* = 0); \quad 3(R^* > 0, Q_* = R_*/10); \\ 4(R^* < 0, Q_* = -R_*/10)$$

Во всех случаях

$$P = 1, P_t = 1, R_* = 314.25$$

Заметим, что $Q_* < 0$ при $R^* < 0$, хотя источники тепла положительные ($Q > 0$).



Фиг. 2

После того, как $u^{(1)}(0)u^{(0)}(0)$ вычислены с учетом поправки к турбулентной вязкости, следует найти значения R_i^* , а затем определить положение кривых на фиг. 2. Будем определять поправку к турбулентной вязкости с помощью (4.3) и выражений (4.4), (4.5). Причем при $R^* > 0$, $Q_* = 0$ коэффициент $a > 0$; при $R_* < 0$, $Q_* = 0$ коэффициент $a < 0$; при $R_* < 0$, $Q_* \neq 0$ следует пользоваться более общим правилом: если потоки вынужденной и свободной конвекции у стенки совпадают, то $a < 0$; если потоки у стенки находятся в противотоке, то $a > 0$.

При чисто вынужденном турбулентном течении будем искать профиль скорости в круговом канале в виде

$$u^{(0)} = a_1[(1 - \xi^n) + 1/3(1 - \xi^2)] \quad (4.6)$$

Здесь n и a_1 — неопределенные коэффициенты. Для определения n следует вычислить среднюю по сечению скорость $\langle v \rangle$ и касательное напряжение на стенке τ_w с использованием (4.6) и подставить в выражение для коэффициента сопротивления $f \equiv 8\tau_w / \rho \langle v \rangle^2$. С другой стороны, f равно [9].

$$f = (1.82 \lg R - 1.64)^{-2} \quad (4.7)$$

Приравнявая эти значения f , найдем n

$$n = 1/6 [(7k - 8) \pm \sqrt{(7k - 4)^2 - 32k}] \quad (k = 1/32Rf) \quad (4.8)$$

Коэффициент a_1 найдем из равенства $1/3a_1 = u_{\max}^{(0)}$, тогда как для определения $u_{\max}^{(0)}$ может послужить зависимость

$$u_{\max}^{(0)} = R_* \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{1 + \nu_t/\nu} \quad (4.9)$$

Эта формула получена путем решения первого из уравнений (2.2) при условии $G = 0$.

В ламинарном случае ($f = 1/64R$) выражение (4.6) легко переходит в параболу Пуазейля.

При комбинированной конвекции $u^{(0)}$ можно тоже найти из (4.6). Вычисляя $u_{\max}^{(0)}$ из (4.9), необходимо учесть поправку к турбулентной вязкости согласно (4.3). Входящий в (4.8) коэффициент сопротивления f следует найти по формуле [1]

$$f = \frac{8}{J^2 R_*^2}, \quad J = \int_1^1 \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \nu_t/\nu} \quad (4.10)$$

Вычисляя J , необходимо тоже учесть поправку к турбулентной вязкости.

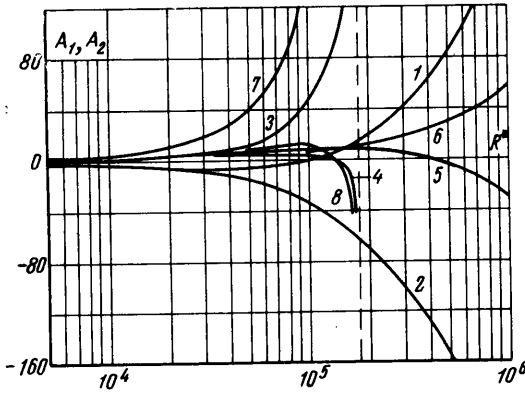
В качестве приближающих функций для осесимметричной свободной конвекции возьмем (3.1). При турбулентном режиме течения функции $u_m^{(1)}$ должны отражать факт наличия большого градиента скорости у стенки. При подборе m учтем форму опытных профилей скорости. В сумме, входящей в (2.5), ограничимся двумя слагаемыми.

Имея в виду получение наилучшего приближения только с двумя приближающими функциями, положим $m_1 = 15$, а m_2 будем менять с таким расчетом, чтобы невязка решения (в указанном ниже смысле) была наименьшей при $0 \leq R^* \leq 5 \cdot 10^5$, $100 \leq R_* \leq 500$. Вычисления дают: $m_2 = 45$. Коэффициенты A_1 и A_2 были определены с помощью (2.6) при значениях параметров: $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$, $a = 0$. Интегралы, входящие в (2.6), были вычислены путем численного интегрирования с учетом (4.1) и (4.2)

$$A_1 = \frac{R^* [R^* (10^{-6} \cdot 1.154748 - 10^{-7} \cdot 0.37321Q_*) - 0.307695 + 10^{-2} \cdot 2.1667Q_*]}{R^{*2} 10^{-9} \cdot 1.494510 + R^* 10^{-3} \cdot 9.541272 + 10^3 \cdot 1.413760} \quad (4.11)$$

$$A_2 = \frac{R^* [R^* (-10^{-6} \cdot 1.164849 + 10^{-7} \cdot 0.39291Q_*) - 0.129371 + 10^{-2} \cdot 0.3278Q_*]}{R^{*2} 10^{-9} \cdot 1.494510 + R^* 10^{-3} \cdot 9.541272 + 10^3 \cdot 1.413760}$$

Коэффициенты A_1 и A_2 были также определены с учетом эффекта возмущения или стабилизации пристеночного слоя. Поправка к турбулентной вязкости, связанная с названным эффектом, была взята согласно (4.3). A_1 и A_2 были определены с использованием (4.1) — (4.3) при $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$, $b = 1.4$ и различных конкретных a . При этом зависимость a от R^* принималась согласно фиг. 2. На фиг. 3 построены графики вычисленных A_1 и A_2 при следующих значениях параметров: 1, 2 — соответственно A_1 и A_2 при $R^* > 0$, $Q_* = 0$;



Фиг. 3

при $R^* < 0$, $Q_* = 0$; 3, 4 — при $R^* < 0$, $Q_* = 0$; 5, 6 — при $R^* > 0$, $Q_* = R_*/10$; 7, 8 — при $R^* < 0$, $Q_* = -R_*/10$.

При большой положительной плотности внутренних источников тепла (например, $Q_* = R_*/10$) в средней части канала жидкость будет теплее, чем у стенки, и поэтому при $\beta > 0$ свободная конвекция в средней части канала направлена вверх, а у стенки — вниз, независимо от знака числа Рейлея. Если при этом вынужденное течение жидкости направлено вверх ($\langle v \rangle > 0$), то у стенки потоки будут в протivotоке. Поэтому в этом случае $a > 0$ независимо от знака R^* . Так что на фиг. 3 $a < 0$ только для кривых 1, 2.

На фиг. 4 построена зависимость критического числа Рейлея R_0^* от параметра R_* . Кривая 1 (штриховая) — при $a = 0$, 2 — при $a = +4.3$, 3 — при $a = -4.4$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют осесимметричному движению. Вычисления выполнены при $P = 1$, $P_t = 1$.

Для решения системы уравнений (2.3) при $k = 1$ (антисимметричное течение) представим скорость в виде полинома, в который входят только нечетные степени ξ

$$F_1 = (1 - \xi^{30}) (A_1 \xi + A_2 \xi^3 + \dots) \quad (4.12)$$

Рассмотрим лишь первые два приближения. Функция (4.12) удовлетворяет указанному в п. 2 требованиям. При выборе степени 30 в (4.12) учтены соображения, приведенные выше для осесимметричной турбулентной свободной конвекции. Подставив (4.12) во второе из уравнений (2.3), решим его совместно с (1.2) и граничными условиями (1.3). Турбулентная вязкость вблизи стенки изобразится трансцендентной функцией (4.1). Предполагая решение второго из уравнений (2.3) в виде обобщенных степенных рядов, заменим функцию (4.4) в пристеночном и промежуточном слоях многочленами. Эти многочлены должны удовлетворять ряду требований. Будем решать второе из уравнений (2.3) отдельно в ядре потока, промежуточном и пристеночном слоях и на стыках слоев потребуем непрерывности ϕ_1 . Функция ϕ_1 должна быть конечной при $\xi = 0$ (на оси канала).

Подставив (4.2) во второе из уравнений (2.3), найдем радиус сходимости рядов

$$\xi = \pm (1/4 \pm 1/4 \sqrt{1 + 8(15R_*^{-1} P_1^{-1} + 1)})^{1/2} \quad (4.13)$$

Поскольку границы между слоями условны, возьмем за границу между ядром и промежуточным слоем точку $\xi = 0.65$, где ряды сходятся при всех значениях параметров R_* , P_1 .

Вблизи стенки турбулентная вязкость зависит от безразмерного расстояния от стенки y_* в третьей степени, а в непосредственной близости от стенки — даже в четвертой степени. Но в этом случае ряды, служащие решением для второго из уравнений (2.3), имеют радиус сходимости, меньший единицы. Возьмем поэтому в пристеночном слое ν_t / ν в виде

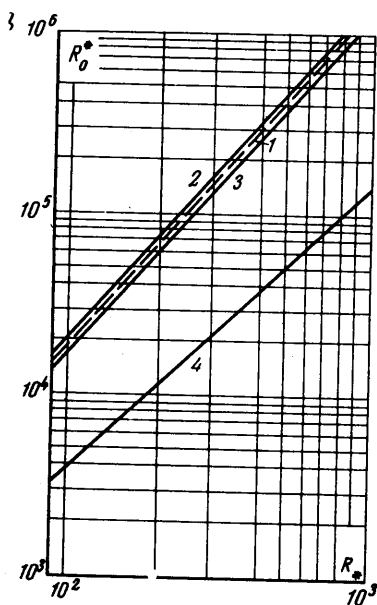
$$\nu_t / \nu = (1/11 y_*)^2 = (1/11 R_*)^2 (1 - \xi)^2 \quad (4.14)$$

Тогда радиус сходимости рядов будет больше единицы. Будем выражать турбулентную вязкость функций (4.14) в интервале $11 \geq y_* \geq 0$. На фиг. 4 кривая 5 (штриховая) представляет (4.14) в указанном интервале. Граница между пристеночным и промежуточным слоями $y_* = 11$ зависит от динамической скорости ϕ_1 , а значит, и градиента давления.

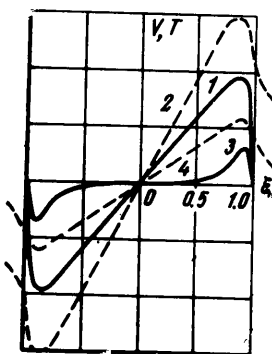
В промежуточном слое будем выражать турбулентную вязкость функцией

$$\nu_t / \nu = D_1 + D_2 R_* (1 - \xi^6) \quad (4.15)$$

Коэффициенты D_1 и D_2 должны быть выбраны так, чтобы в точке $\xi = 0.65$ функция (4.15) давала одинаковые значения с (4.2), а в точке $y_* = 11$ — одинаковые значения с (4.14). Таким образом, получаем непрерывную кривую для турбулентной вязкости в интервале $0 \leq \xi \leq 1$. Функции (4.14) и (4.15) выбраны таким образом, чтобы хотя бы приблизительно учесть возрастание турбулентной вязкости в пристеночном и промежуточном слоях при $R_* < 0$, при которых возникает антисимметричный режим течения.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 1 кривая 6 (штриховая) представляет (4.15) в указанном выше интервале при $R_* = 314.25$.

Функция (4.2) должна обеспечивать сходимость рядов, представляющих решение ϕ_1 от $\xi = 0$ до $\xi = 0.65$; (4.15) — от $\xi = 0$ до $y_* = 11$ и (4.14) — от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, включая граничные точки. Функции (4.2), (4.14) и (4.15) удовлетворяют этим требованиям.

На фиг. 5 в произвольном масштабе изображены первые две функции для скорости согласно (4.12) (кривые 1 и 3) и соответствующие им вычисленные температуры (штриховые кривые 2 и 4) при $P = 1$, $P_t = 1$, $\kappa / \kappa_0 = 1$, $R_* = 314.25$.

Подставим теперь скорость согласно (4.12) и найденную температуру ϕ_1 в первое из уравнений (2.3), умножим его на каждую функцию $u_i^{(1)}$ и проинтегрируем по сечению канала. Полученная однородная система алгебраических уравнений определяет критическое число Рейля как функцию от R_* и κ / κ_0 .

На фиг. 4 кривая 4 представляет зависимость критического числа Рейля R_0^* от R_* в случае антисимметричного режима течения при $\kappa / \kappa_0 = 1$.

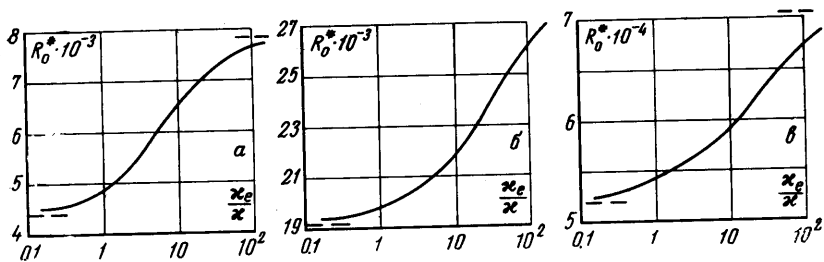
Как видно из сравнения кривых, антисимметричное течение возникает при значениях числа Рэлея меньших, чем значения, при которых амплитуда осесимметричной свободной конвекции обращается в бесконечность.

На фиг. 6 отображена зависимость критического числа Рэлея R_0^* от относительной теплопроводности массива κ_0^*/κ при $R_* = 110$ (а), $R_* = 314.25$ (б) и $R_* = 550$ (в).

Уравнения (1.1) относятся к типу слабо-нелинейных. Нелинейность вносится коэффициентами турбулентного переноса. Принцип суперпозиции решений однородного и неоднородного уравнений, или свободной и вынужденной конвекции, применим к ним только с некоторой оговоркой. Этот принцип используется при решении поставленной задачи. Тем самым в решение вносится некоторая малая погрешность. Попробуем оценить эту погрешность. Для этого подставим скорость, определенную в данной работе согласно (4.6), (3.1), (4.11), и отношение τ/ρ_0 , определенное согласно (2.3) из [1], в зависимость

$$\frac{\tau}{\rho_0} = -\frac{v}{r_0} \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{dv}{d\xi} \quad (4.16)$$

и найдем $(1 + v_t/v)$. Сравнивая найденные значения $(1 + v_t/v)$ с исходными значениями согласно фиг. 1, определим невязку. Вычисления были выполнены при $R_* =$



Фиг. 6

$= 314.25$, $P = 1$, $P_t = 1$, $a = 0$, $0 \leq R_* \leq 5 \cdot 10^5$, при этом ξ менялось в интервале $0 \leq \xi \leq 1$, за исключением значений, лежащих в непосредственной близости от точек, где $dv/d\xi = 0$. В этих точках вычисления неточны. Для большинства значений R_* и ξ невязка не превосходит $\pm 5\%$, лишь для некоторых значений R_* и ξ она достигает 15% . Вклад в эту невязку дают нелинейность уравнений (1.1), приближенный выбор функций (3.1), погрешность за счет численного интегрирования и неточность равенства (2.7). Сравнительно небольшая невязка свидетельствует о том, что эти погрешности невелики.

Поступило 8 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэр Л. Э. О турбулентной конвекции в вертикальной трубе. ПМТФ, 1967, № 4.
2. Жуховицкий Е. М. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М., Гостехиздат, 1952.
4. Hallman T. M. Combined forced and free-laminar heat transfer in vertical tubes with uniform internal heat generation. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 8.
5. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. Z. angew. Math. und Mech., 1951, Bd. 31, S. 208.
6. Петухов Б. С., Нольде Л. Д. Теплообмен при вязкостно-гравитационном течении жидкости в трубах. Теплоэнергетика, 1959, № 1.
7. Eckert F. R. G., Diaguila A. I. Convective heat transfer for mixed, free and forced flow through tubes. Trans. ASME, 1954, vol. 76, No. 4.
8. Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
9. Филоненко Г. К. Гидравлическое сопротивление трубопроводов. Теплоэнергетика, 1954, № 4.