

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ

Е. Л. ТАРУНИН (Пермь)

Нестационарная конвекция в замкнутой полости рассматривалась ранее в работах [1, 2] при помощи метода малого параметра, основанного на разложении решения по степеням числа Грассхофа. Полученные аналитические результаты справедливы лишь в области малых значений числа Грассхофа. Исследования нестационарной конвекции при больших числах Грассхофа в условиях образования пограничного слоя, когда нелинейные явления становятся определяющими, возможны, по-видимому, лишь численными методами на ЭВМ. В работах [3, 4] численный метод был успешно применен для исследования нестационарной конвекции в замкнутой полости, подогреваемой сбоку.

В данной работе методом конечных разностей исследовано нестационарное конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости, возникающее в полости квадратного сечения при внезапном разогреве границы. Нелинейные нестационарные уравнения плоского конвективного движения решены на ЭВМ. Получены распределения скорости и температуры жидкости, а также интегральные характеристики движения в различные моменты времени в интервале значений числа Грассхофа $0 < G < 300 \cdot 10^3$ при значении числа Прандтля $P = 5$.

1. Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, заполняющую полость квадратного сечения (фиг. 1). До некоторого момента времени жидкость покоится, а ее температура во всех точках одинакова и совпадает с температурой границ области (эта температура далее принимается за начало отсчета). В момент $t = 0$ температура границ области внезапно повышается до значения θ , одинакового вдоль всей границы. При $t > 0$ в полости возникает конвекция и начинается прогрев жидкости, обусловленный теплопроводностью и конвективным движением.

Уравнения плоского нестационарного конвективного движения запишем в безразмерном виде, выбрав в качестве единиц расстояния, времени, температуры и функции тока соответственно: a (сторона квадрата), a^2/χ , θ , χ (температуропроводность жидкости):

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{P} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \Delta \varphi + GP \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\left(G = \frac{g\beta\theta a^3}{\nu^2}, P = \frac{\nu}{\chi} \right)$$

$$\varphi = (\text{rot } \mathbf{v})_z = -\Delta \Psi \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \Delta T \quad (1.3) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x, -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y \right)$$

Здесь T — температура жидкости, φ — вихрь скорости, ψ — функция тока, x_x, v_y — компоненты скорости, G — число Грассхофа, P — число Прандтля.

Начальные и граничные условия таковы

$$T = \psi = 0 \quad (t \leq 0); \quad \psi|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad T|_{\Gamma} = 1 \quad (t > 0) \quad (1.4)$$

(Γ — граница области, n — нормаль к границе)

Уравнения (1.1)–(1.3) решались при помощи явной конечно-разностной схемы, описанной в работе [5]. Погрешность аппроксимации схемы есть $O(\Delta t + h^2)$.

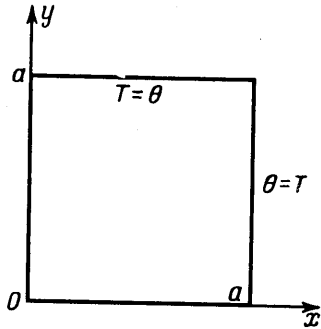
Для записи начальных и граничных условий в конечно-разностной форме используем обозначения

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, J, \quad J = 1/h$$

$$y_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad K = J$$

$$f(x_i, y_k, t_n) = f^n_{i,k}, \quad t_n = \Delta t_0 + \Delta t_1 + \dots + \Delta t_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N, N+1, \dots)$$

Заметим, что решение задачи симметрично относительно вертикали, проходящей через центр области ($x = 0.5$). Это обстоятельство позволило вести вычисления толь-



Фиг. 1

ко для половины полости ($0 \leq x \leq 0.5$, $0 \leq y \leq 1$). При этом на границе $x = 0.5$ ставятся условия симметрии: температура по обе стороны от этой линии имеет одинаковые значения, а функция тока и вихрь — значения, отличающиеся знаком. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^{\circ} = T_{ik}^{\circ} = 0 \quad \psi_{0k}^n = \psi_{i0}^n = \psi_{i,K}^n = 0, \quad T_{0k}^n = T_{i0}^n = T_{i,K}^n = 1 \\ \varphi_{0k}^n = -2h^{-2}\psi_{1k}^n, \quad \varphi_{20}^n = -2h^{-2}\psi_{i1}^n, \quad \varphi_{iK}^n = -2h^{-2}\psi_{i,(K-1)}^n \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$T_{1/2(J-1),K}^n = T_{1/2(J+1),K}^n, \quad \psi_{1/2(J-1),K}^n = -\psi_{1/2(J+1),K}^n, \quad \varphi_{1/2(J+1),K}^n = \varphi_{1/2(J-1),K}^n$$

Граничные условия для вихря φ получены разложением функции тока ψ в ряд Тейлора в приграничной точке с удержанием членов порядка h^2 (см. [6]).

Уравнение Пуассона (1.2) на каждом шаге по времени итерировалось по формуле

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^{n,s+1} = \psi_{ik}^{n,s} + \omega_0 \left[\frac{1}{4} (\psi_{i+1,k}^{n,s} + \psi_{i-1,k}^{n,s} + \psi_{i,k+1}^{n,s} + \psi_{i,k-1}^{n,s} + h^2 \varphi_{ik}^{n+1}) - \psi_{ik}^{n,s} \right], \\ \left(\omega_0 = \frac{2}{1 + \sin \pi h} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь s — номер итерации, а ω_0 — параметр релаксации, улучшающий сходимость (определен по формуле работы [7]).

Шаг по времени вычислялся по формуле

$$\Delta t_n = \min \left[\frac{h^2}{2(2P + \delta\psi)}, \frac{h^2}{2(\delta\psi)^2} \right], \quad \delta\psi \equiv \max_{i,k} [(\psi_{i+1,k}^n - \psi_{ik}^n), (\psi_{i,k+1}^n - \psi_{ik}^n)] \quad (1.7)$$

Формула для шага по времени (1.7) получена методом Фурье из требования устойчивости модельного уравнения с постоянными коэффициентами ($\partial\psi/\partial x$) и ($\partial\psi/\partial y$). Основные результаты получены на сетке 26×26 ($K = 25$, $h = 0.04$). Число Прандтля было фиксированным: $P = 5$. Числа Грассхофа изменялись в пределах $0 < G < 300 \cdot 10^3$, что соответствует интервалу значений числа Рэлея $0 < R < 1.5 \cdot 10^6$. Все расчеты проведены на ЭВМ «Арагац».

2. В результате вычислений находились значения температуры и функции тока в узлах пространственной сетки при заданном значении числа Грассхофа в различные моменты времени. Вычислялись также интегральные характеристики конвекции — экстремальное значение функции тока во всей области ψ_m , полный тепловой поток, входящий в полость (число Нуссельта N) и минимальная температура жидкости в полости T_{\min} .

Рассмотрим сначала интегральные характеристики нестационарной конвекции. При $t > 0$ в полости образуются два вихря с различным направлением вращения. В левой половине области вращения происходит по часовой стрелке и функция тока отрицательна; в правой половине жидкость вращается против часовой стрелки и $\psi_m > 0$. Экстремальные значения функции тока ψ_m достигаются в точках, симметрично расположенных относительно вертикали $x = 0.5$. Величина ψ_m , как легко видеть, дает расход жидкости через сечение, проходящее от центра вихря до границы полости, и поэтому является мерой интенсивности конвективного движения в данный момент времени.

Другой интегральной характеристикой является полный тепловой поток, входящий в полость за единицу времени (на единицу длины вдоль оси z)

$$Q = -\kappa \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} dl \quad (2.1)$$

Здесь T — размерная температура, Γ — полный контур квадратного сечения, κ — коэффициент теплопроводности. Безразмерный тепловой поток — число Нуссельта — определен следующим образом:

$$N \equiv \frac{Q}{\kappa\theta} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} dl \quad (2.2)$$

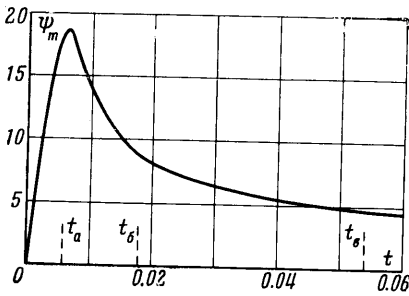
где теперь T и l — безразмерные.

Наглядное представление о степени прогресса жидкости дает минимальное значение температуры в полости T_{\min} . Эта величина в начальный момент равна нулю, а далее, с увеличением t , возрастает, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к единице.

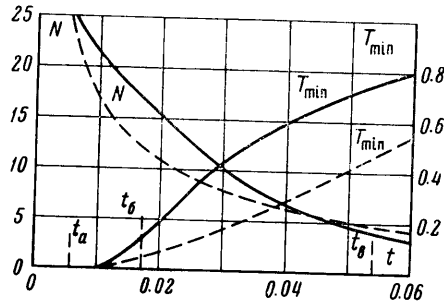
Рассмотрим теперь результаты, полученные для фиксированного числа Грассхофа $G = 20 \cdot 10^3$. На фиг. 2 представлена зависимость модуля экстремального значения функции тока ψ_m от времени. Экстремальное значение ψ_m сначала возрастает, достигает максимального значения при $t = 0.0062$ и затем монотонно убывает. Это

означает, что при включении подогрева большие градиенты температуры у вертикальных границ приводят к формированию конвективного пограничного слоя; интенсивность конвекции на этом этапе увеличивается и достигает максимума (стадия «разгона» движения). По мере выравнивания разностей температур интенсивность движения постепенно уменьшается со временем (стадия затухания движения). Заметим, что зависимость от времени максимального значения скорости $v_m(t)$ оказывается аналогичной.

На фиг. 3 сплошными линиями изображены зависимости числа Нуссельта $N(t)$ и минимальной температуры $T_{min}(t)$. Значение N монотонно убывает со временем, что является следствием постепенного уменьшения разности температур между границей и жидкостью. Весьма показательное поведение $T_{min}(t)$. Вначале на протяжении



Фиг. 2



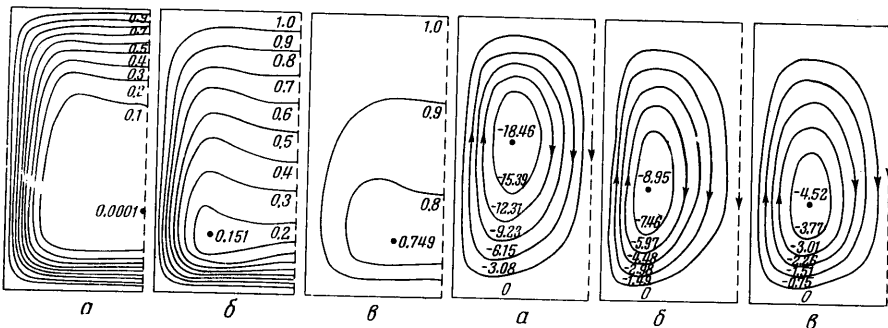
Фиг. 3

довольно значительного промежутка времени (до $t \approx 0,0100$) величина T_{min} остается практически равной нулю — к этому времени ни теплопроводный, ни конвективный механизмы еще не успели прогреть центральную часть области. В дальнейшем величина T_{min} возрастает, стремясь к пределу: $T_{min} \rightarrow 1$. При $t = 0,0600$ значение T_{min} близко к 0,8, что свидетельствует о значительном прогреве жидкости.

Для сравнения на фиг. 3 (пунктирная линия) приведены результаты, относящиеся к случаю чисто теплопроводного разогрева квадратной области (неподвижная среда, конвекция отсутствует). В этом случае процесс прогревания определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \tag{2.3}$$

с условиями $T_{i, \kappa^0} = 0$ и $T_{i, \kappa^n}|_{\Gamma} = 1$. Из сравнения изображенных на фиг. 3 зависимостей для $G = 20 \cdot 10^3$ (сплошная линия) и для случая разогрева неподвижной среды (пунктир) видно, в частности, что конвективное движение приводит к более быстрому прогреванию жидкости.



Фиг. 4

Фиг. 5

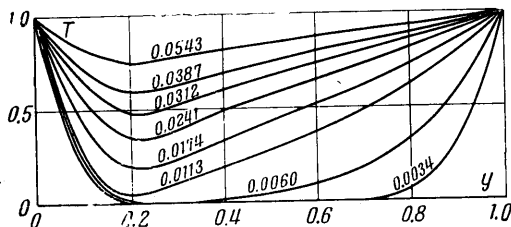
Более полное представление о характере развития конвекции со временем при фиксированном значении числа Грассхофа дают мгновенные распределения скорости и температуры. Такие распределения для $G = 20 \cdot 10^3$ были получены для многих моментов времени. Наиболее типичны моменты t_a, t_6, t_b , отмеченные на оси t фиг. 2 и 3 ($t_a = 0,0057, t_6 = 0,0174, t_b = 0,0543$). Разрез t_a соответствует моменту максимальной интенсивности движения; разрезы t_6 и t_b соответствуют различным моментам затухания конвективного движения жидкости.

Карты изотерм и линий тока, соответствующие этим моментам времени, представлены на фиг. 4 и 5 (изотермы и линии тока приведены лишь для левой половины области). На начальной стадии процесса (фиг. 4, а, и 5, а, относящиеся к моменту t_a) имеется отчетливо выраженный температурный пограничный слой. Основная часть жидкости не прогрета; значительный объем занимает жидкость с температурой $T < 0.1$. Заметно образование спускающейся книзу нагретой области; «полюс холода» (отмеченный на фигурах точкой) также смещается вниз.

На фиг. 4, б и 5, б, соответствующих моменту $t_6 = 0.0174$, видно, что спускающийся вниз поток нагретой жидкости приводит к сглаживанию вертикальных градиентов температуры в верхней части полости. Температурный пограничный слой еще отчетливо выражен на нижней границе и на нижней части боковой стенки. Спускающаяся по центру нагретая струя расчленила холодную жидкость на две зоны, образовалось два симметрично расположенных полюса холода.

Фиг. 4, в и 5, в, соответствуют позднему этапу процесса прогрева (момент t_b). Пограничный слой практически отсутствует; остались лишь изотермы $T = 0.8$ и $T = 0.9$.

Распределения температуры вдоль вертикальной осевой линии $x = 0.5$ для различных моментов времени при $G = 20 \cdot 10^3$ представлены на фиг. 6. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что после сформирования нагретой области в верхней части полости распределение температуры в ней по вертикали близко к линейному.



Фиг. 6

на фиг. 7 ($G = 20 \cdot 10^3$). Отметим, что при рассматриваемом значении числа Прандтля $P = 5$ скоростной пограничный слой выражен нечетко, поэтому величины вертикальных скоростей у стенки и на оси полости сопоставимы. Наиболее отчетливо скоростной пограничный слой выражен в самом начале процесса, когда градиенты температуры сосредоточены вблизи границ ($t < 0.001$).

3. Обсужденные результаты относились к фиксированному значению числа Грассхофа $G = 20 \cdot 10^3$. Аналогичные численные исследования были проведены для следующих значений числа Грассхофа: $G = 5 \cdot 10^3, 10 \cdot 10^3, 30 \cdot 10^3, 40 \cdot 10^3, 50 \cdot 10^3, 80 \cdot 10^3, 142 \cdot 10^3, 163 \cdot 10^3, 284 \cdot 10^3$.

Ввиду недостатка машинного времени не во всех случаях удалось проследить за развитием нестационарного процесса до стадии значительного прогрева. В особенности это относится к очень большим значениям числа Грассхофа. При больших разностях температур (большие G) возникают значительные скорости и шаг по времени (см. формулу (1.7)) резко уменьшается, что приводит к большим затратам машинного времени.

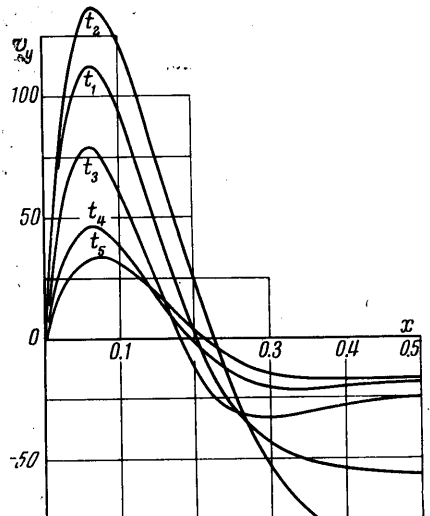
Были осуществлены вычисления с более крупным шагом

$$\Delta t_n = \frac{h^2}{2(2P + r\delta\psi)} \quad (3.1)$$

где r — коэффициент, подбираемый опытным путем ($1 < r < 5$). Эти численные эксперименты позволили оценить погрешность, зависящую от величины шага по времени. Так, например, оказалось, что при $G = 20 \cdot 10^3$ увеличение шага по времени в среднем в 2–3 раза изменяет численные характеристики ψ_m, N, T_{\min} менее чем на 2% ($0 < t \leq 0.05$). Однако при использовании крупного шага по времени при больших числах G процесс счета становится неустойчивым.

Распределения вертикальной компоненты скорости в горизонтальном сечении, проходящем через центр вихря, приведены для моментов времени

$$t_1 = 0.0034, \quad t_2 = 0.0057, \quad t_3 = 0.0174, \\ t_4 = 0.0387, \quad t_5 = 0.0543$$

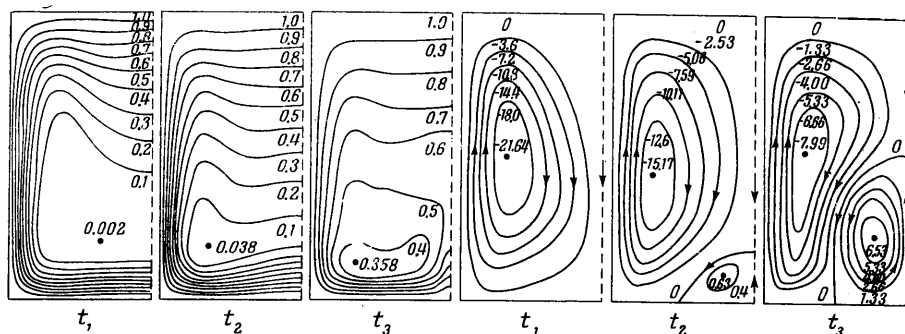


Фиг. 7

на фиг. 7 ($G = 20 \cdot 10^3$). Отметим, что при рассматриваемом значении числа Прандтля $P = 5$ скоростной пограничный слой выражен нечетко, поэтому величины вертикальных скоростей у стенки и на оси полости сопоставимы. Наиболее отчетливо скоростной пограничный слой выражен в самом начале процесса, когда градиенты температуры сосредоточены вблизи границ ($t < 0.001$).

Для оценки погрешности, возникающей за счет конечности пространственного шага $h = 1/25$, были проведены вычисления для $G = 20 \cdot 10^3$ с более грубым шагом $h = 1/15$. Различие основных характеристик процесса ψ_m и N на стадии разгона конвективного движения не превышает 9%.

Численные результаты, полученные для указанных выше значений числа Грассхофа, позволяют сделать определенные выводы о развитии со временем конвекции при разных G . Как оказывается, подробно обсужденные в п. 2 особенности нестационарной картины движения при $G = 20 \cdot 10^3$ имеют место и при других значениях G . Для примера на фиг. 8 и 9 изображены изотермы и линии тока при $G = 50 \cdot 10^3$ для трех моментов времени: $t_1 = 0.0060$, $t_2 = 0.0103$ и $t_3 = 0.01984$. В этом случае заметно более быстрое формирование нагретой области в верхней части полости. Отметим



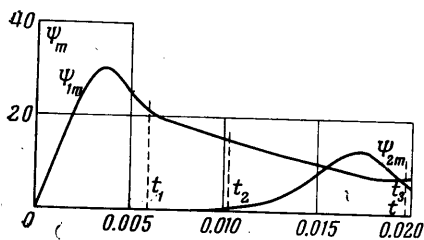
Фиг. 8

Фиг. 9

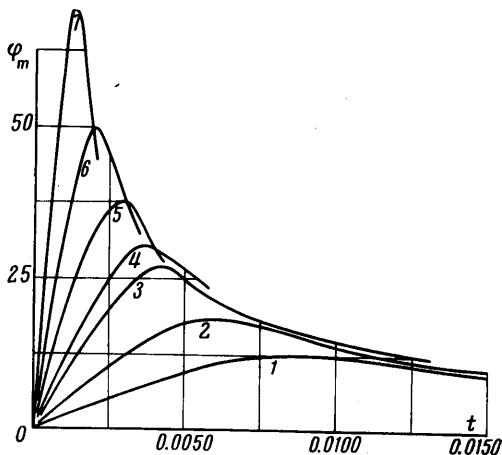
также образование в нижней части полости двух дополнительных вихрей противоположного знака. Возникновение дополнительных вихрей связано с более быстрым, чем при $G = 20 \cdot 10^3$, отсесением полюсов холода в стороны от вертикальной оси полости. Зарождение этих вихрей происходит для $G = 50 \cdot 10^3$ при $t \approx 0.0082$. Затем интенсивность вихрей увеличивается, достигает максимального значения и при $t > 0.0173$ начинает уменьшаться.

На фиг. 10 представлено поведение экстремальных значений функции тока ψ_{1m} и ψ_{2m} , относящихся соответственно к основному и дополнительному вихрям. Как видно, интенсивность дополнительных вихрей в некоторый промежуток времени может даже превосходить интенсивность основных вихрей. Взаимодействие дополнительных вихрей с основными может привести к временному нарушению монотонного уменьшения ψ_{1m} (фиг. 10).

Интенсивность конвекции в стадии разгона движения и в начальной стадии процесса затухания при всех рассмотренных значениях числа Грассхофа изменяется со временем качественно одинаково. Эти зависимости приведены на фиг. 11; кривые 1, ..., 7 соответствуют значениям числа Грассхофа $G \cdot 10^{-3} = 10, 20, 40, 50, 80, 142, 284$. Во всех случаях на начальном этапе интенсивность возрастает и в момент $t = \tau_*$ («время разгона») функция ψ_{1m} достигает наибольше-



Фиг. 10



Фиг. 11

го (при данном G) значения ψ_* . Как видно из фиг. 11, с увеличением G время разгона τ_* уменьшается, а максимальная интенсивность увеличивается. Обработка результатов, полученных для разных G , приводит к зависимостям

$$\psi_* = 0.20G^{0.47}, \quad \tau_* = 1.8G^{-0.57} \quad (3.2)$$

справедливым при больших G (практически при $G > 40 \cdot 10^3$).

Таким образом, результаты численного решения позволяют установить асимптотические зависимости характеристик нестационарной конвекции — времени разгона и максимальной интенсивности конвекции от числа Грассхофа.

Автор благодарен Е. М. Жуховицкому и Г. З. Гершуни за постоянное внимание к работе и помощь.

Поступило 26 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Севрук И. Г. О нестационарной тепловой конвекции в шаровом слое. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
2. Пустовойт С. П. О нестационарной тепловой конвекции в сферической полости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
3. Wilkes I. O., Churchill S. W. The finite — difference computation of natural convection in a rectangular enclosure. A. I. Ch. E. Journal, 1966, vol. 12, No. 1.
4. Barakat H. Z., Clark I. A. Analytical and experimental study of the transient laminar natural convection flows in partially filled liquid containers. Proc. 3rd Int. Heat Transf. Conf., 1966, vol. 2.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
6. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и в физике. М., «Энергия», 1964.
7. Russell D. D. On obtaining solutions to the Navier — Stokes equations with Automatic digital computers. Aeronaut. Res. Council Repts. and Mem., 1963, No. 3331.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О КОМБИНИРОВАННОЙ (ВЫНУЖДЕННОЙ И СВОБОДНОЙ) ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КРУГОВОМ КАНАЛЕ В ОДНОРОДНОМ МАССИВЕ

Л. Э. БЭР (Пермь)

Рассмотрена установившаяся комбинированная (вынужденная и свободная) турбулентная конвекция в вертикальном круговом канале в однородном твердом массиве в случае, если в массиве вдали от канала поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры. Определено распределение скорости и температуры, вычислены критические значения числа Рэлея при осесимметричном и антисимметричном движениях жидкости. Задача решается методом Галеркина.

Обозначения

$v^{(0)}$ — скорость вынужденной конвекции,	p_0 — осредненное давление, соответствующее постоянной температуре жидкости,
$v^{(1)}$ — скорость свободной конвекции,	z — координата вдоль оси канала, направленная вверх,
v — скорость при наложении вынужденной и свободной конвекции,	Q — количество тепла, выделяемое внутренними источниками в единице объема жидкости в единицу времени,
$\langle v \rangle$ — средняя по сечению канала скорость,	κ — коэффициент теплопроводности жидкости, (χ — массива),
T — температура при наложении вынужденной и свободной конвекции,	R — число Рейнольдса,
T_w — температура стенки канала,	R^* — число Рэлея,
y — расстояние от стенки канала,	P — число Прандтля,
y_* — безразмерное расстояние от стенки,	\mathcal{G} — число Грассхофа,
r_0 — радиус канала;	v_* — динамическая скорость, определяемая из равенства
r — расстояние от оси,	
ν_t — турбулентная вязкость,	
χ_t — турбулентная температуропроводность,	

$$\frac{2\rho_0\nu_*^2}{r_0} = -\rho_0g - \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad u^{(0)} \equiv \frac{v^{(0)}}{\nu_*}, \quad u^{(1)} \equiv \frac{v^{(1)}}{\nu_*}, \quad u \equiv u^{(0)} + u^{(1)}, \quad \theta \equiv \frac{T}{A r_0}, \quad v \equiv v^{(0)} + v^{(1)},$$