

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. Развитие механики в СССР. М., «Наука», 1967.
4. Penney W. G., Tjornhill S. K. The dispersion, under gravity of a column of fluid supported on a rigid horizontal plane. pt. 3. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser A., 1952, vol. 244, No. 882, p. 285—311.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
6. Белыева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. I. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 6.
8. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 6.

### ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР ШАРА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ВЕСЬМА ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Л. С. ВОРОВИЧ (Ростов-на-Дону)

В работе [1] рассмотрена задача о горизонтальном гидродинамическом ударе шара, полупогруженного в жидкость конечной глубины. При этом на свободной поверхности выполняется граничное условие  $\varphi = 0$ , что соответствует числу Фруда, равному  $\infty$ .

На практике значительный интерес представляет задача в аналогичной постановке с условием на свободной поверхности  $\partial\varphi/\partial z = 0$ , что соответствует числу Фруда, равному нулю. Последняя рассмотрена в этой работе.

Результаты, полученные при решении этих предельных задач позволяют судить о гидродинамических характеристиках в случае горизонтального удара твердого тела, плавающего на поверхности тяжелой жидкости в промежуточных случаях, когда число Фруда отлично от нуля и бесконечности.

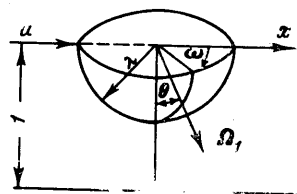
Задача сводится к решению бесконечной вполне регулярной системы алгебраических уравнений.

Изучено влияние дна на основные характеристики удара. Найдены коэффициенты присоединенных масс при ударе, распределение давлений по поверхности сферы. Результаты расчетов показывают, что при  $h_1 \geq 2,5a$  можно практически пренебречь влиянием дна на основные характеристики удара. При этом погрешность при определении присоединенной массы и давлений не превысит 3,5%. При  $h_1 < 2,5a$  влияние дна становится существенным и может быть учтено на основе данного решения.

Аналогичная задача для эллипсоида вращения в случае безграничной жидкости рассмотрена Э. Л. Блохом [2].

1. Поставленная механическая задача в безразмерных параметрах

$$x = \frac{x_1}{h_1}, \quad y = \frac{y_1}{h_1}, \quad z = \frac{z_1}{h_1}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1}{uh_1}, \quad \lambda = \frac{a}{h_1} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

сводится к отысканию гармонической в области  $\Omega_1$  функции  $\varphi$ , удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } |\theta| = 1/2\pi, \quad r > \lambda, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 1$$

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow 0, \quad \text{если } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \cos \omega \sin \theta, \quad \text{если } r = \lambda, \quad |\theta| \leq 1/2\pi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $h_1$  — глубина жидкости. Область  $\Omega_1$  есть слой  $0 \leq y \leq 1$ , из которого удален полушар  $|\theta| \leq 1/2\pi, 0 < r \leq \lambda$  (фиг. 1).

2. Для построения решения задачи используем метод отражений. При этом приходим к определению гармонической в области  $\Omega_2$  функции  $\varphi$ , удовлетворяющей на каждой сфере  $\omega_n$  граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_n} = \cos \omega \sqrt{1 - x_n^2}, \quad x_n = \frac{y - 2n}{r_n} \quad (2.1)$$

$$r_n = \sqrt{r^2 - 4rn \cos \Theta + 4n^2} = \sqrt{\rho^2 + (y - 2n)^2}$$

и исчезающей при  $\rho \rightarrow \infty$ . Здесь  $\Omega_2$  — внешность цепочки сфер  $\omega_n$  (фиг. 2).

3. Для отыскания  $\varphi$  введем систему функций  $\varphi_k$  посредством соотношений

$$\varphi_k = \cos \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_k^1(\cos \theta_n)}{r_n^{k+1}} \quad (3.1)$$

где  $P_k^1$  — присоединенная функция Лежандра первого рода, определяемая по формуле

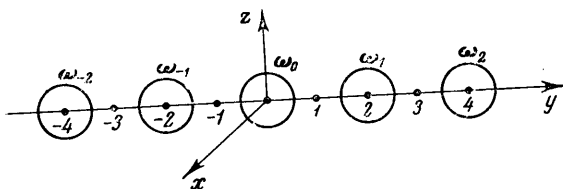
$$P_k^m = (-1)^m (1 - x^2)^{1/2m} \frac{d^m P_k}{dx^m} \quad (3.2)$$

Можно показать, что любую периодическую гармоническую в  $\Omega_2$  функцию можно представить в виде

$$\varphi = M_1 \varphi_1 + M_3 \varphi_3 + M_5 \varphi_5 + \dots \quad (3.3)$$

При этом будут удовлетворены все граничные условия (1.2), кроме последнего.

Доказательство этого факта рассмотрено в [3]. Значение  $M_k$  надо подобрать так, чтобы удовлетворилось последнее условие (1.2).



Фиг. 2

$$\sum_{k=1,3,\dots} M_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\psi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_k^1(x_n)}{r_n^{k+1}} \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) эквивалентно бесконечной системе относительно  $M_k$

$$\sum_{k=1,3,\dots} C_{pk} M_k = b_p \quad (p = 1, 3, \dots)$$

$$C_{pk} = \int_{-1}^1 \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} P_p^1(x) dx, \quad b_p = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} P_p^1(x) dx \quad (3.6)$$

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$$b_p = 0 \quad \text{при } p \neq 1, \quad b_1 = -4/3 \quad (3.7)$$

Исследование этой бесконечной системы можно произвести так же, как это сделано в [3]. Для вычисления  $C_{pk}$  разложим  $\Psi_k$  и  $\partial \Psi_k / \partial r$  по присоединенным функциям Лежандра первого рода.

Метод получения таких разложений указан в [3], поэтому приведем только окончательные результаты

$$\psi_k = \frac{P_k^1(x)}{r^{k+1}} + \sum_{s=1}^{\infty} P_{2s-1}^1(x) r^{2s-1} b_{k,2s-1} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} = -\frac{k+1}{\lambda^{k+2}} P_k^1(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) \lambda^{2s-2} b_{k,2s-1} P_{2s-1}^1(x) \quad (3.9)$$

Здесь  $b_{k, 2s-1}$  — числовой коэффициент при  $r^{2s-1}$  в разложении  $\Psi_k$  по присоединенным функциям Лежандра.

Ниже приведены разложения, которые будут использованы в дальнейшем

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{P_1^1(x)}{r^2} + {}^1/4 B_3 r P_1^1(x) + {}^1/16 B_5 r^3 P_3^1(x) + \dots \\ \psi_3 &= \frac{P_3^1(x)}{r^4} + {}^3/8 B_5 r P_1^1(x) + {}^{15}/64 B_7 r^3 P_3^1(x) + \dots \\ \psi_5 &= \frac{P_5^1(x)}{r^6} + {}^{15}/64 B_7 r P_1^1(x) + {}^{35}/128 B_9 r^3 P_3^1(x) + \dots\end{aligned}\quad (3.10)$$

Здесь  $B_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} - \zeta$  — функция Римана.

Подставляя разложения (3.9) в формулу (3.6) и принимая во внимание ортогональность функций Лежандра в интервале  $-1 < x < 1$ , получаем

$$C_{pk} = \frac{2(p+1)}{(2p+1)(p-1)!} \left( -\frac{p+1}{\lambda^{p+2}} \delta_{pk} + p\lambda^{p-1} b_{kp} \right) \quad (3.11)$$

$$p = 1, 3, \dots, \quad k = 1, 3, \dots, \quad \delta_{pk} = 0 (p \neq k), \quad \delta_{pp} = 1$$

На основе (3.11) систему (3.5) представим в виде

$$\begin{aligned}\sum_{k=1,3,\dots} M_k (b_{k1} - {}^2/3 \delta_{1k}) &= -1 \\ M_k \left( -\frac{p+1}{\lambda^{p+2}} \delta_{pk} + p\lambda^{p-1} b_{kp} \right) &= 0 \quad p = 3, 5, \dots\end{aligned}\quad (3.12)$$

Систему (3.12) решаем разложением  $M_k$  в ряды по степеням  $\lambda$ . Приведем окончательные формулы, дающие решение задачи до членов порядка  $\lambda^{15}$ .

$$\begin{aligned}M_1 &= {}^1/2 \lambda^3 + {}^1/4 b_{11} \lambda^6 + {}^1/8 b_{11}^2 \lambda^9 + {}^1/16 b_{11}^3 \lambda^{12} + {}^3/16 b_{31} b_{13} \lambda^{13} + {}^1/32 b_{11}^4 \lambda^{15} + \dots \\ M_3 &= {}^3/8 b_{13} \lambda^{10} + {}^3/16 b_{11} b_{13} \lambda^{13} + \dots \\ M_5 &= {}^5/12 b_{15} \lambda^{14} + \dots \quad M_7 = M_9 = \dots = 0\end{aligned}\quad (3.13)$$

Удержанное количество членов в разложениях (3.13) обеспечивает достаточную точность решения задачи. Условие на сфере будет выполнено с максимальной погрешностью в 1.5% для самого неблагоприятного случая  $\lambda = 0.9$ .

4. Используя разложения  $\Psi_k$ , представим формулу для вычисления импульсивных давлений в области, прилегающей к сфере, в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра

$$P_i = -{}^1/2 \rho u a \cos \left( P_1^1(x) + \sum_{k=1,3,\dots} P_k^1(x) l_k \right) \quad (4.1)$$

Здесь  $l_k$  — известные разложения по  $\lambda$ , вычисленные с указанной выше точностью

$$\begin{aligned}l_1 &= 1 + 1.5\lambda^3 (0.300514 + 0.0451543\lambda^3 + 0.00678475\lambda^6 + 0.0189003\lambda^7 + \\ &\quad + 0.00101945\lambda^9 + 0.00283992\lambda^{13} + 0.00300360\lambda^{14} + \dots) \\ l_3 &= 0.113414\lambda^5 + 0.0168851\lambda^8 + 0.00146319\lambda^{11} + 0.0114872\lambda^{12} + \\ &\quad + 0.000283992\lambda^{13} + 0.000219862\lambda^{14} + \dots \\ l_5 &= 0.0291122\lambda^7 + 0.00236961\lambda^{10} + 0.000355727\lambda^{13} + 0.000761922\lambda^{14} + \dots \\ l_7 &= 0.00734520\lambda^9 + 0.00882922\lambda^{12} + \dots \\ l_9 &= 0.0977042\lambda^{11} + 0.000146804\lambda^{14} + \dots \\ l_{11} &= 0.000244281\lambda^{13} + \dots\end{aligned}$$

Значения импульсивных давлений  $P_i^*$  на сфере приведены в таблице. Результаты расчета по формуле (4.1) приведены на фиг. 3, 4.

На фиг. 4 пунктирной линией изображен график давлений для случая бесконечной глубины. На фиг. 3, 4 видно, что уже при  $h_1 \geq 2.5a$  влияние дна мало существенно и не может изменить давление более чем на 3.5%.

5. Присоединенную массу при ударе можно найти по формуле

$$m_+ = -\rho u^{-2} \int_s \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \quad (5.1)$$

После вычисления интеграла получим

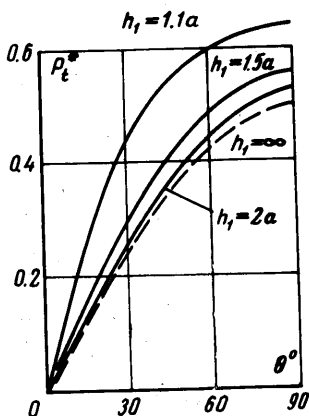
$$m_+ = 1/3 \rho a^3 \pi (l_1 + 1), \quad m_{+\infty} = 1/3 \rho^3 \pi \quad (5.2)$$

$\lambda$	$\theta = 20$	$\theta = 40$	$\theta = 60$	$\theta = 80$	$\theta = 90$
1.1	0.334073	0.512990	0.596735	0.635160	0.639508
1.5	0.211798	0.380714	0.494744	0.552465	0.559735
2.0	0.184390	0.337936	0.458238	0.518540	0.526215
2.5	0.177098	0.331848	0.445775	0.506040	0.513530
	0.171010	0.321394	0.433075	0.492405	0.500000

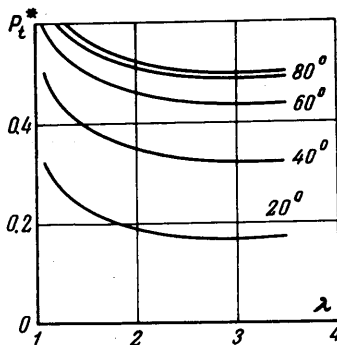
Численные значения отношений присоединенной массы для некоторых значений  $\lambda$  в случае конечной и бесконечной глубины даны ниже:

$\lambda = 0$	0.2	$2/7$	$1/3$	0.4	0.5	$2/3$	0.9
$\frac{m_+}{m_{+\infty}} = 1$	1.00361	1.01055	1.01676	1.02913	1.05743	1.14005	1.37546

6. Из изложенного можно сделать вывод: при горизонтальном ударе шара, до половины погруженного в слой тяжелой жидкости конечной глубины, можно практически пренебречь влиянием дна на основные характеристики удара и принять



Фиг. 3



Фиг. 4

$h_1 = \infty$ , если  $h_1 \geq 2.5a$ . При этом погрешность при определении присоединенной массы и давлений не превысит 3.5%. При  $h_1 < 2.5a$  влияние дна становится существенным и может быть учтено на основе данного решения.

Поступило 20 III 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воронич Л. С. Горизонтальный удар шара, полупогруженного в жидкость конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
2. Блох Э. Л. Об ударе эллипсоида вращения, плавающего на поверхности весьма тяжелой жидкости. ПММ, т. 18, вып. 5.
3. Воронич Л. С. Вертикальный удар шара, полупогруженного в жидкость конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.