

ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В КОНИЧЕСКОМ БАКЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ МАЛОЙ ВЕСОМОСТИ К ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ

В. М. ШАШИН (*Москва*)

При включении двигателя в условиях малой весомости в топливных баках возникает нестационарное движение жидкости, сопровождающееся значительными искажениями свободной поверхности. В зависимости от направления приложенного ускорения может наблюдаться интенсивный всплеск жидкости в центре бака или растекание ее по стенкам бака. В обоих случаях могут возникнуть большие динамические нагрузки.

1. В работе рассматривается осесимметричное движение жидкости в коническом баке, образованном круговым конусом с углом полураствора α и сферой единичного радиуса (фиг. 1), которое вызвано приложенным к баку осевым ускорением, характеризующимся величиной перегрузки $n(t)$. Объем жидкости задается ординатой h плоскости уровня, соответствующей поверхности жидкости при отсутствии поверхностного натяжения. Будем считать жидкость идеальной, а движение безвихревым. Это позволяет ввести в рассмотрение потенциал скорости φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (1.1)$$

На свободной границе $r = f(\vartheta, t)$ должны соблюдаться динамическое и кинематическое условия. Динамическое условие представляет собой интеграл Коши — Лагранжа, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] + n(t) g f \cos \vartheta + \frac{p_0}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} 2H = \psi(t) \quad (1.2)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, p_0 — давление газа, $2H$ — средняя кривизна поверхности [1], g — ускорение силы тяжести.

Функцию $\psi(t)$ определим из условия, что при $\varphi = \text{const}$ и $\sigma = 0$, уровень жидкости должен быть равен заданной величине

$$\psi(t) = p_0 / \rho + n(t) g h \quad (1.3)$$

Кинематическое условие на свободной поверхности имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.4)$$

На твердых стенках должны выполняться условия непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{при } \vartheta = \alpha, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (1.5)$$

Из условия симметрии следует:

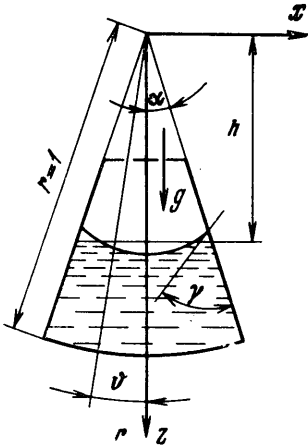
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (1.6)$$

На контуре смачивания краевой угол должен в процессе движения иметь постоянную заданную величину γ [2], что означает

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\alpha} = -\text{ctg } \gamma \quad (1.7)$$

Начальные условия

$$r = f(\vartheta, 0), \quad \varphi(r, \vartheta, 0) = \text{const} \quad \text{при } t = 0 \quad (1.8)$$



Фиг. 1

Введем безразмерные величины

$$r = lr^\circ, \quad \varphi = \left[\frac{(1+B)\sigma l}{\rho} \right]^{1/2} \varphi^\circ, \quad t = \left[\frac{\rho l^3}{\sigma(1+B)} \right]^{1/2} t^\circ, \quad B = \frac{\rho g l^2}{\sigma} \quad (1.9)$$

Здесь B — число Бонда, l — характерный размер. Динамическое условие на свободной поверхности (1.2) с учетом (1.3) примет вид

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t^\circ} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi^\circ)^2 + n(t) \frac{B}{1+B} (f^\circ \cos \vartheta - h^\circ) - \frac{1}{1+B} 2H^\circ = 0 \quad (1.10)$$

Остальные условия задачи в безразмерной форме сохраняют прежний вид. Поэтому в дальнейшем все величины будем подразумевать безразмерными, не оговаривая этого специальным образом.

Если число Бонда много больше единицы, то поверхностное натяжение не оказывает заметного влияния на динамику жидкости. В этом случае последнее слагаемое в (1.10) можно опустить. Это приводит к понижению порядка системы относительно $f(\vartheta, t)$, вследствие чего условие (1.7) становится лишним. Кинематическое условие (1.4) становится квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка. Характеристиками этого уравнения будут

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \quad (1.11)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением именно случая $B \gg 1$.

Таким образом, задача свелась к решению дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестной подвижной границей и нелинейными условиями на ней. Математические вопросы решения подобных задач к настоящему времени изучены еще недостаточно полно [3]. Одной из первых работ в этом направлении явилась работа Пеннея и Торнхилла [4], связанная с исследованием разрушения водяного столба, образующегося после ядерного надводного взрыва.

2. Применим метод Фурье и будем искать решение (1.1) в виде

$$\varphi(r, \vartheta, t) = \tau(t) R(r) \theta(\vartheta) \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.1) приводит к уравнению Эйлера и уравнению Лежандра

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \kappa R, \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right) = -\kappa \theta \quad (2.2)$$

с граничными условиями соответственно

$$dR/dr = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad d\theta/d\vartheta = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \vartheta = \alpha \quad (2.3)$$

Здесь κ — собственное число задачи.

Решение уравнения Лежандра можно записать в виде

$$\theta = C_1 P_\nu(\cos \vartheta) + C_2 Q_\nu(\cos \vartheta) \quad (\kappa = \nu(\nu + 1)) \quad (2.4)$$

Здесь P_ν и Q_ν — функции Лежандра первого и второго рода

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{dQ_\nu}{d(\cos \vartheta)} \sin \vartheta = \infty, \quad \text{поэтому } C_2 = 0.$$

Итак с точностью до постоянного множителя

$$\begin{aligned} \theta &= P_\nu(\cos \vartheta) = P_\nu(\xi) = F \left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1 - \xi}{2} \right) = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)(\nu + 1) \dots (-\nu + k)(\nu + 1)(\nu + 2) \dots (\nu + k + 1)}{[(k + 1)! 2^{k+1}]} (1 - \xi)^{k+1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь F — гипергеометрическая функция, $\xi = \cos \vartheta$. Значения ν найдем из второго условия (2.3), а именно

$$\left. \frac{dP_\nu(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi = \cos \alpha} = 0 \quad (2.6)$$

Присвоим корням этого уравнения индекс $s = 1, 2, \dots$, т. е. $\nu = \nu(s)$.

Общее решение уравнения Эйлера запишем в виде

$$R(r) = C_3 r^\nu + C_4 r^{-\nu-1} \quad (2.7)$$

Используя граничное условие (2.3), найдем с точностью до постоянного множителя

$$R(r) = r^\nu + \frac{\nu}{\nu+1} r^{-\nu-1} \quad (2.8)$$

Окончательно запишем искомый потенциал φ в виде

$$\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_{v(s)}(t) \left[r^{v(s)} + \frac{v(s)}{v(s)+1} r^{-v(s)-1} \right] P_{v(s)}(\cos \vartheta) \quad (2.9)$$

Рассмотрим динамическое условие на свободной поверхности (1.10). Введем обозначения

$$\Psi_{v(s)}(r, \vartheta, t) = P_{v(s)}(\cos \vartheta) \left[r^{v(s)} + \frac{v(s)}{v(s)+1} r^{-v(s)-1} \right] \quad (2.10)$$

$$F(r, \vartheta, t) = n(t)[h - f(\vartheta, t)] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right]$$

Тогда динамическое условие (1.10) примет вид

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tau_{v(s)} \Psi_{v(s)}(r, \vartheta, t) = F(r, \vartheta, t) \quad (2.11)$$

Из (2.11) необходимо получить систему уравнений для $\tau_{v(s)}$.

Произведем ортогонализацию $\{\Psi_{v(s)}\}$.

Построим следующий ряд ортогональных функций Φ_i таких, что

$$\int_0^{\alpha} \Phi_i \Phi_k \sin \vartheta \, d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases}$$

$$\Phi_1 = \Psi_{v(1)} \left(\int_0^{\alpha} \Psi_{v(2)}^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \right)^{-1/2} \dots \Phi_s = \frac{1}{b_{v(s)s}} \left[\Psi_{v(s)} - \sum_{i=1}^{s-1} b_{v(s)i} \Phi_i \right] \quad (2.12)$$

Здесь

$$b_{v(s)i} = \int_0^{\alpha} \Psi_{v(s)} \Phi_i \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad b_{v(s)s} = \left\{ \int_0^{\alpha} \left[\Psi_{v(s)} - \sum_{i=1}^{s-1} b_{v(s)i} \Phi_i \right]^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \right\}^{1/2}$$

Из написанных выше равенств очевидно, что Φ_s образуют ортонормальную систему, причем $b_{v(s)i} = 0$, если $i > s$.

Разложим $\Psi_{v(s)}$ в ряд по Φ_m . Получим

$$\Psi_{v(s)} = b_{v(s)1} \Phi_1 + b_{v(s)2} \Phi_2 + b_{v(s)3} \Phi_3 + \dots$$

Тогда (2.11) примет вид

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tau_{v(s)}(t) \sum_{m=1}^{\infty} b_{v(s)m} \Phi_m = F(r, \vartheta, t) \quad (2.13)$$

Умножив обе части последнего равенства на $\Phi_k \sin \vartheta$ и проинтегрировав от 0 до α , в силу ортогональности, получим систему уравнений для $\tau_{v(s)}$

$$\sum_{s=k}^{\infty} \tau_{v(s)}(t) b_{v(s)k} = \int_0^{\alpha} F(r, \vartheta, t) \Phi_k(r, \vartheta, t) \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (2.14)$$

Условие (2.14) вместе с (1.11) образуют бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений для определения функций $\tau_{v(s)}$ и координат свободной поверхности. Полагая ряды быстроходящимися, ограничимся первыми n членами. Кроме того, выберем m контрольных точек на начальной свободной поверхности и будем следить за их движением, имея в виду теорему Лагранжа [5], гласящую, что частица жидкости, однажды попавшая на свободную поверхность, будет находиться на ней в течение всего последующего движения. При сделанных допущениях получаем сле-

дующую, уже конечную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{v(1)} b_{v(1)1} + \dot{\tau}_{v(2)} b_{v(2)1} + \dots + \dot{\tau}_{v(n)} b_{v(n)1} &= I_1 \\ \dot{\tau}_{v(2)} b_{v(2)2} + \dots + \dot{\tau}_{v(n)} b_{v(n)2} &= I_2 \\ &\dots \\ \dot{\tau}_{v(n)} b_{v(n)n} &= I_n \end{aligned}$$

$$\frac{dr_m}{dt} = \sum_{s=1}^n \tau_{v(s)} v(s) (r^{v(s)-1} - r^{-v(s)-2}) P_{v(s)}(\cos \theta)$$

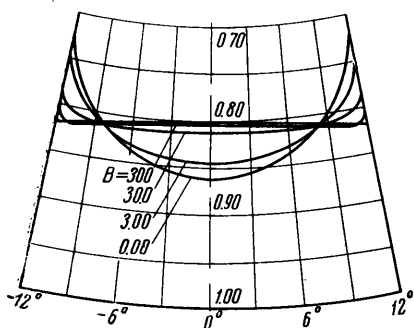
$$\frac{d\theta_m}{dt} = - \sum_{s=1}^n \tau_{v(s)} \left(r^{v(s)-2} + \frac{v(s)}{v(s)+1} r^{-v(s)-3} \right) \frac{dP_{v(s)}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \sin \theta$$

$$I_k = \int_0^\alpha F(r, \theta, t) \Phi_k(r, \theta, t) \sin \theta d\theta \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

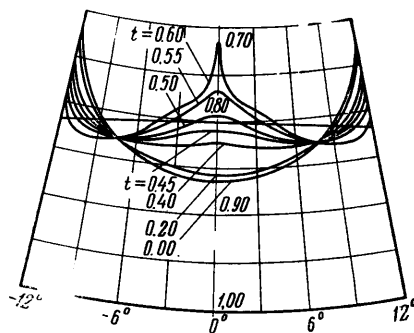
с начальными условиями:

$$\tau_{v(s)}(0) = 0, \quad r_m = f(\theta_m, 0) \quad \text{при } t = 0$$

Система уравнений решалась численно на ЭЦВМ М-20. Алгоритм решения следующий: при помощи начальных данных из последних двух уравнений определяют



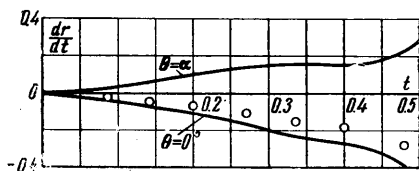
Фиг. 2



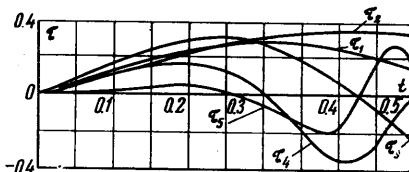
Фиг. 3

ся координаты свободной поверхности в следующий момент времени. При известной форме области течения из первых n уравнений находятся $\tau_{v(s)}$ и далее процесс вычислений повторяется.

Оценка точности счета производилась по точности соблюдения постоянства энергии и постоянства объема жидкости. Проверка показала, что результаты вычислений



Фиг. 4



Фиг. 5

практически совпадают при $n = 5$ и $n = 12$. Число точек m доходило до 100. Однако $m = 30$ дает уже практически неотличимые значения от $m = 100$. При этом постоянство объема жидкости соблюдается с точностью до 10^{-4} .

Конец счета осуществлялся в тот момент, когда свободная поверхность теряла устойчивость. Полный цикл вычислений занимает в среднем 15—20 мин машинного времени.

3. Характер движения жидкости в значительной мере определяется начальной формой свободной поверхности. Если в (1.2) положить $\partial\varphi/\partial t = 0$ и $\nabla\varphi = 0$, то получим условие для нахождения $f(\vartheta, 0)$

$$f'' = \frac{(\lambda + Bf \cos \vartheta) (f'^2 + f^2)^{3/2}}{f} + f + \frac{2f'^2}{f} + \frac{(f' \cos \vartheta + f \sin \vartheta) (f'^2 + f^2)}{f^2 \sin \vartheta} \quad (3.1)$$

Здесь λ — некоторая константа, а в качестве характерного размера следует брать радиус зеркала свободной поверхности, т. е. $l = h \operatorname{tg} \alpha$.

Интегрирование уравнения (3.1) должно выполняться при следующих условиях [6]:

1) На контуре смачивания $df/d\vartheta = -\operatorname{ctg} \gamma$

2) $df/d\vartheta = 0$ при $\vartheta = 0$;

3) Объем жидкости должен быть равен заданной величине.

При $B = 0$ получаем поверхности постоянной средней кривизны. При больших значениях числа Бонда получаются решения типа пограничного слоя, поскольку при старшей производной присутствует малый параметр [7, 8]. Уравнение (3.1) интегрировалось методом Рунге — Кутты путем подбора константы λ .

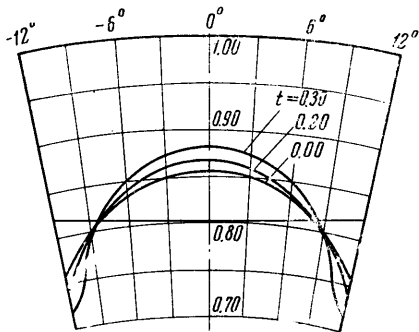
На фиг. 2 указаны типичные равновесные формы свободной поверхности ($\alpha = 12^\circ, \gamma = 5^\circ$).

4. Динамика жидкости исследовалась для различных значений углов смачивания, уровня заливки жидкости, закона изменения перегрузки, углов полураствора конуса. Типичные формы свободной поверхности при постоянной по времени отрицательной перегрузке показаны на фиг. 3. ($B = 1, \alpha = 12^\circ, \gamma = 5^\circ, n = -0.5$). Для этого же варианта расчета на фиг. 4 показаны скорости частиц, расположенных на оси и на стенках бака, а на фиг. 5 показаны первые пять функций $\tau_{V(s)}$. Каждая функция $\tau_{V(s)}$ умножена на масштабный коэффициент $10^2, 10^3, 10^5, 10^7, 10^9$ соответственно. Как видим, сходимость рядов достаточно быстрая, так как каждая последующая функция $\tau_{V(s)}$ на один-два порядка меньше предыдущей. Эта же закономерность сохраняется и при более высоких номерах функций.

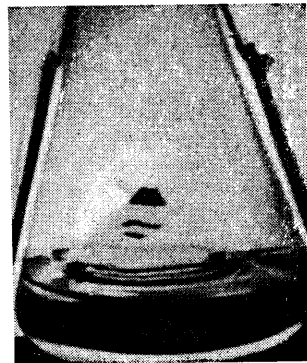
Расчеты подтвердили, что высота всплеска и скорость движения жидкости увеличиваются при уменьшении начального числа Бонда, т. е. при большем искривлении начальной поверхности.

На фиг. 6 показаны последовательные формы свободной поверхности жидкости при постоянной по времени положительной перегрузке. ($B = 0, \alpha = 12^\circ, \gamma = 30^\circ, n = 1$).

5. Изучение динамики жидкости в указанных выше условиях проводилось также и экспериментальными методами. Конические сосуды, частично заполненные жидкостью, сбрасывались с большой высоты. После достижения значительного искривления свободной поверхности включалась перегрузка. Движение жидкости фиксировалось на пленку скоростной кинокамеры с частотой около 300 кадров в секунду. Типичная фотография одного из многочисленных экспериментов, выполненных с участием Э. Л. Калязина и Г. А. Меднова, показана на фиг. 7. Условия опыта соответствуют расчетным данным, приведенным на фиг. 3. Скорость движения жидкости на оси, найденная в результате обработки киноплёнки, указана кружочками на фиг. 4. Как видим, соответствие расчетных и экспериментальных данных удовлетворительное.



Фиг. 6



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. Развитие механики в СССР. М., «Наука», 1967.
4. Penney W. G., Tjornhill S. K. The dispersion, under gravity of a column of fluid supported on a rigid horizontal plane. pt. 3. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser A., 1952, vol. 244, No. 882, p. 285—311.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
6. Белыева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. I. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 6.
8. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 6.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР ШАРА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ВЕСЬМА ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Л. С. ВОРОВИЧ (Ростов-на-Дону)

В работе [1] рассмотрена задача о горизонтальном гидродинамическом ударе шара, полупогруженного в жидкость конечной глубины. При этом на свободной поверхности выполняется граничное условие $\varphi = 0$, что соответствует числу Фруда, равному ∞ .

На практике значительный интерес представляет задача в аналогичной постановке с условием на свободной поверхности $\partial\varphi/\partial z = 0$, что соответствует числу Фруда, равному нулю. Последняя рассмотрена в этой работе.

Результаты, полученные при решении этих предельных задач позволяют судить о гидродинамических характеристиках в случае горизонтального удара твердого тела, плавающего на поверхности тяжелой жидкости в промежуточных случаях, когда число Фруда отлично от нуля и бесконечности.

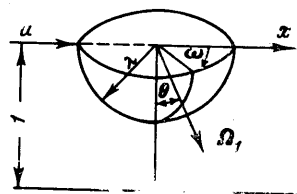
Задача сводится к решению бесконечной вполне регулярной системы алгебраических уравнений.

Изучено влияние дна на основные характеристики удара. Найдены коэффициенты присоединенных масс при ударе, распределение давлений по поверхности сферы. Результаты расчетов показывают, что при $h_1 \geq 2,5a$ можно практически пренебречь влиянием дна на основные характеристики удара. При этом погрешность при определении присоединенной массы и давлений не превысит 3,5%. При $h_1 < 2,5a$ влияние дна становится существенным и может быть учтено на основе данного решения.

Аналогичная задача для эллипсоида вращения в случае безграничной жидкости рассмотрена Э. Л. Блохом [2].

1. Поставленная механическая задача в безразмерных параметрах

$$x = \frac{x_1}{h_1}, \quad y = \frac{y_1}{h_1}, \quad z = \frac{z_1}{h_1}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1}{uh_1}, \quad \lambda = \frac{a}{h_1} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

сводится к отысканию гармонической в области Ω_1 функции φ , удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } |\theta| = 1/2\pi, \quad r > \lambda, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 1$$

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow 0, \quad & \text{если } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \cos \omega \sin \theta, \quad & \text{если } r = \lambda, \quad |\theta| \leq 1/2\pi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь h_1 — глубина жидкости. Область Ω_1 есть слой $0 \leq y \leq 1$, из которого удален полушар $|\theta| \leq 1/2\pi, 0 < r \leq \lambda$ (фиг. 1).