

ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Е. БИШИМОВ, В. П. КОРОБЕЙНИКОВ, В. А. ЛЕВИН, Г. Г. ЧЕРНЫЙ

(Москва)

В исследовании детонационных волн за последнее десятилетие можно особо выделить два результата.

Во-первых, были теоретически обнаружены и исследованы [1-6] случаи неустойчивости детонационных волн, рассматриваемых как одномерные стационарные структуры, состоящие из скачка уплотнения и сопровождающей его зоны горения (модель Зельдовича — Неймана — Деринга). Во-вторых, во многих случаях экспериментально была установлена [6] сложная неоднородная нестационарная структура волн детонации.

Эти результаты вновь ставят вопрос о самом понятии волны детонации.

Обычно при теоретическом решении задач волну детонации определяют как скачок уплотнения с выделением тепловой энергии вследствие сгорания газа.

Главное, что постулируется в распространенных определениях волны детонации, — это ее одномерная структура и возможность продолжительного существования узких зон за ударной волной, в которых в основном происходит тепловыделение, и, следовательно, возможность замены этих зон вместе с ударной волной при решении газодинамических задач поверхностями разрыва, на которых должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии.

На основе предположения о существовании волн детонации, как поверхностей разрыва, были получены решения многих интересных и важных газодинамических задач, относящихся главным образом к одномерным нестационарным и двумерным стационарным движениям. Так, в работах [7, 8] была решена задача о движении газа за расходящейся сферической волной детонации, распространяющейся от точечного источника поджигания в однородной среде, причем было показано, что такая волна будет волной Чепмена — Жуге (ЧЖ). В книге [9] рассмотрены движения газа за расходящейся сферической волной детонации в неоднородной среде с переменной по радиусу начальной плотностью; при этом было найдено, что возможны случаи, когда скорость волны превышает скорость волны ЧЖ.

В работе [10] была решена задача о стационарном обтекании конуса потоком детонирующего газа. Интересной особенностью этого течения является то, что волна разрежения, примыкающая к стационарной волне ЧЖ, замыкается скачком уплотнения, сопровождаемым течением сжатия. Нестационарная аналогия такого движения, т. е. движение за детонационной волной с расширяющимся из центра поршнем была рассмотрена в работе [11]. В работе [12] были найдены асимптотические законы поведения сильных детонационных волн при удалении от источника инициирования, когда они, ослабляясь, переходят в волну ЧЖ.

Распространение детонационных волн, вызванных точечным взрывом в горючей смеси, рассматривалось в работах [11, 13-16]. Были изучены начальная стадия сильного взрыва и выход пересжатой детонационной волны на режим ЧЖ.

Все эти решения, конечно, могут рассматриваться лишь как асимптотические для масштабов времени и расстояния, больших по сравнению с масштабами, характерными для протекания химической реакции. Поэтому остается открытым вопрос о возможности получения таких асимптотических решений из различных физически осуществимых начальных состояний при учете конечных скоростей химических реакций. Особый интерес представляет этот вопрос в случае так называемых «самоподдерживающихся» волн детонации. Однако до настоящего времени ответа на него нет даже для наиболее простых автоматических одномерных задач о распределении детонационной волны по покоящемуся газу от неподвижного плоского, линейного или точечного источника поджигания. Главная трудность при решении этого вопроса состоит в том, что если учесть отмеченные выше два результата теоретического и экспериментального исследования волн детонации, то следует полагать, что простые одномерные течения с бесконечно тонкими волнами детонации могут служить асимптотикой сложных существенно неоднородных течений.

возникающих на той стадии развития процесса, когда из-за конечной скорости химических реакций еще нельзя пренебрегать толщиной детонационного фронта.

В настоящее время не представляется возможным решение газодинамических задач о распространении детонационных фронтов со сложной пространственной нестационарной структурой и выяснение асимптотики таких решений. В предлагаемой работе рассмотрены только значительно более простые задачи об одномерных течениях, причем устойчивость этих течений также не изучена.

Напомним некоторые результаты теории, полезные для дальнейшего изложения.

Простейшим точным решением задач о течениях газа с волнами детонации является задача о распространении по покоящемуся однородному газу плоской волны детонации с постоянной скоростью. При этом, если скорость волны превосходит скорость волны ЧЖ или равна ей, то поток за волной однороден и движется поступательно. Такое течение газа можно считать возникшим из состояния покоя при начинающемся сразу с постоянной скоростью движения плоского поршня. При этом скорость поршня должна быть больше или равна скорости газа за волной ЧЖ. Если скорость волны детонации постоянна и равна скорости волны ЧЖ, то для течения за ней волна будет характеристикой; поэтому за волной ЧЖ течение определяется неоднозначно и может быть произвольной волной Римана. В частности, такие течения можно считать возникшими в случае, когда в покоящемся газе начинает двигаться поршень, скорость которого в первый момент равна скорости газа за волной ЧЖ, а затем убывает. Можно считать также, что поршень сразу начинает двигаться с меньшей скоростью; тогда за волной ЧЖ возникает центрированная волна разрежения. В предельном случае поршень вообще может быть неподвижен, но от него отходит волна ЧЖ, сопровождаемая центрированной волной разрежения, в которой скорость газа падает до нуля. Этот случай можно трактовать как распространение детонационной волны от плоского «поджигающего» источника (при этом, однако энергией поджигания пренебрегается).

В случае цилиндрических и сферических волн детонации, распространяющихся по покоящемуся однородному газу, также известны решения для постоянной скорости волны, имеющей вначале нулевой радиус. Если скорость волны больше скорости волны ЧЖ, то течение за волной представляет собой течение сжатия, и его можно трактовать как течение от цилиндрического или сферического поршня, начинающего расширяться с постоянной скоростью от нулевого радиуса. Если скорость волны равна скорости волны ЧЖ, то, как было показано ранее [10], для течения за волной она не будет характеристикой, а служит оггибающей характеристик, и решение в окрестности волны двузачно. Первое из них соответствует течению сжатия и непрерывным образом продолжается до поршня. Второе соответствует центрированной цилиндрической или сферической волне разрежения. Центрированная волна разрежения может быть непрерывным образом продолжена до границы с покоящимся однородным ядром. Это решение соответствует распространению детонационной волны от линейного или точечного поджигающего источника [7]. Центрированная волна может замыкаться скачком уплотнения, не догоняющим волны ЧЖ. В случае автомодельных течений скачок уплотнения движется с постоянной скоростью и возникающее за ним цилиндрическое или сферическое течение сжатия может быть продолжено до поршня, расширяющегося со скоростью, меньшей той, которая соответствует течению сжатия за волной ЧЖ [10].

Асимптотический характер описанного решения задачи о поршне с образованием пересечной волны детонации для одномерных течений с конечной скоростью реакции не может вызывать особые сомнения, по крайней мере для столь больших скоростей расширения поршня, для которых совершаемая поршнем работа значительно превосходит энергию, выделяющуюся при химической реакции.

С другой стороны, режимы течения с волнами детонации ЧЖ, сопровождаемые примыкающими к ним волнами разрежения, в действительности могут не быть предельными для одномерных течений с конечной скоростью протекания реакций или могут требовать для своего осуществления специальных условий предельного перехода при скорости реакции, стремящейся к бесконечности.

В настоящее время даже эти вопросы существования предельных режимов для одномерных течений исследованы лишь в очень ограниченной мере.

В общем виде рассматриваемый вопрос может быть сформулирован следующим образом. Возможно ли при определенных физически реализуемых условиях инициирования химических реакций, идущих с конечной скоростью, такое развитие процесса, которое асимптотически приводило бы к возникновению «самоподдерживающихся» волн детонации. При этом ограничиваемся только случаем инициирования реакции при прохождении ударных волн (которые могут генерироваться поршнем, при распаде на-

чального разрыва, при концентрированном подводе энергии и т. п.) в идеальной среде, т. е. без учета процессов переноса. Естественно, что пренебрежение процессами переноса может сделать неполным ответ на сформулированный вопрос, так как в ряде случаев именно процессы переноса могут играть определяющую роль в формировании самоподдерживающихся волн детонации.

Кроме того, подчеркнем еще раз, что рассмотрение асимптотического поведения течения в предположении о его одномерном характере во многих случаях может оказаться недостаточным вследствие неустойчивости такого течения.

Перечислим несколько задач, решение которых было бы полезным для выяснения сформулированного вопроса.

1) *Задача о поршне.* Поршень (плоский, цилиндрический, сферический) начинает расширяться в покоящейся газе с достаточно большой скоростью, вызывая образование ударной волны. Затем скорость поршня уменьшается, достигая значений, меньших скорости, соответствующей в предельном случае (при бесконечной скорости химической реакции) детонации ЧЖ.

Вариантом этой задачи является задача, в которой поршень с самого начала движется со скоростью, меньшей той, которая соответствует детонации ЧЖ.

2) *Задача о распаде начального разрыва.* Ядро (в виде плоского слоя, круглого цилиндра, сферы) состоит в начальный момент из покоящегося газа с давлением более высоким, чем в окружающей ядро горючей смеси. В следующий момент времени по смеси начнет распространяться ударная волна, инициирующая реакцию.

3) *Задача о сосредоточенном взрыве.* В начальный момент на плоскости, на линии или в точке выделяется энергия. Эта задача может рассматриваться как предельный вариант предыдущей.

Вариантом задачи о распаде начального разрыва в случае плоских волн является задача о движении, возникающем при соприкосновении двух полупространств, занятых покоящимися газами, причем в полупространстве с меньшим давлением находится горючая смесь. Интерес представляет случай, когда начальная скорость контактного разрыва меньше скорости поршня, соответствующего детонации ЧЖ.

Все перечисленные задачи при учете конечной скорости химических реакций неавтомодельны. Более того, даже для случая бесконечной скорости реакции почти все эти задачи неавтомодельны (исключение составляют задача о поршне, движущемся с постоянной скоростью, и задача о распаде начального плоского разрыва, отделяющего два полупространства (см., например, [9-11]).

Из результатов работы [12] следует, что при бесконечной скорости реакции в задачах 1-3 в условиях, когда вначале образуется пересжатая волна детонации, эта волна, ослабевая, переходит в волну ЧЖ. Такой переход для плоских волн происходит в бесконечности, а для цилиндрических и сферических волн может происходить на конечном расстоянии.

В связи с неавтомодельным характером перечисленных задач при конечной скорости реакций их решения до настоящего времени были получены только в нескольких частных случаях.

В работе [17] рассмотрена задача, которую можно трактовать следующим образом. Плоский поршень начинает двигаться в покоящейся горючей среде, чтобы ударная волна распространялась по газу с постоянной скоростью, большей скорости Чепмена — Жуге. Для этого при наличии тепловыделения за волной скорость поршня должна постепенно уменьшаться; по окончании реакции скорость поршня в течение некоторого времени остается постоянной, а затем мгновенно падает до величины, меньшей той, которая соответствует волне ЧЖ. Таким образом, на ста-

дионарную (в системе координат, связанной с волной) структуру пересжатой волны детонации падает сзади ослабляющая ее центрированная волна разрежения.

В результате расчетов методом характеристик трех примеров, авторы работы [17] установили, что при сильной температурной зависимости скорости реакции интенсивность ударной волны падает до значений, меньших той, которая соответствует волне ЧЖ. В примере, в котором скорость реакции не зависела от температуры, результаты расчета не позволили сделать определенного вывода: для рассчитанного промежутка времени интенсивность волны падала, но продолжала оставаться большей интенсивности волны ЧЖ. Отметим, что в рассмотренных примерах центр волны разрежения находился от заднего фронта волны детонации на расстоянии порядка немногих толщин зоны химической реакции, а время от начала взаимодействия волны разрежения со структурой детонационной волны, для которого производились расчеты, было лишь в несколько раз больше времени химической реакции.

В работе [16] рассмотрено взаимодействие плоской детонационной волны, имеющей двухфронтную структуру (ударная волна — адиабатическое течение, соответствующее времени индукции — фронт тепловыделения) с подходящей к ней сзади волной разрежения. В ней удалось установить критерий, при выполнении которого волна не выходит асимптотически на режим ЧЖ. Этот критерий имеет вид следующего неравенства:

$$\frac{E}{RT_1} > 1 - m + \frac{2\gamma}{3\gamma - 1}$$

где E — энергия активации, m — порядок реакции, остальные обозначения общеприняты.

Отметим, что численные результаты работы [17] находятся в согласии с этим критерием.

В работе [15] рассмотрена та же задача о поршне, что и в работе [17], но, в отличие от последней, в работе [19] после достижения постоянной скорости, соответствующей пересжатой волне детонации, скорость поршня уменьшалась постепенно до нового постоянного значения, также соответствующего пересжатой волне. При этом расчеты проводились для большего интервала времени, превосходившего время реакции в несколько десятков раз. В результате расчетов обнаружилось, что при изменении скорости поршня от большего значения к меньшему при некоторых значениях определяющих параметров после переходного процесса устанавливается течение с ударной волной меньшей интенсивности и структура волны детонации преобразуется к стационарной структуре, соответствующей новому значению скорости поршня. Однако так происходит не всегда. При других комбинациях определяющих параметров уменьшение скорости поршня приводит к установлению периодических колебательных режимов распространения ударной волны и следующей за ней зоны горения. Эти колебания могут быть весьма интенсивными; так в рассчитанных примерах колебания давления за ударной волной составляли более половины его значения, соответствующего стационарному распространению волны. При этом переход к новой стационарной структуре наблюдался в тех случаях, в которых согласно работам [1-3] эта структура устойчива в линейном приближении по отношению к продольным возмущениям; колебательные же режимы развивались в случаях, когда новая структура в линейном приближении неустойчива.

Описанные результаты в основном исчерпывают решения, относящиеся к перечисленному выше списку задач. Как видно, все эти результаты касаются только случая плоских волн и позволяют сделать лишь некоторые частные выводы.

Можно утверждать, что если поршень движется так, что вначале вызывает образование сильной ударной волны, а затем скорость его убывает до нуля (или до достаточно малой величины), то интенсивность ударной волны может падать до значений, меньших тех, которые соответствуют волне ЧЖ и установление асимптотического состояния с волной ЧЖ и следующей за ней волной разрежения окажется не всегда возможным.

Можно также утверждать, что замедление поршня (даже до скорости, соответствующей пересжатой волне детонации) может привести к потере устойчивости и вызвать колебательные режимы движения газа.

Рассмотрим теперь некоторые новые решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с химическими реакциями.

1. Основные уравнения и условия автомодельности движения газа. Уравнения, описывающие движения газа, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{(v-1)\rho v}{r} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \beta Q \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + u \frac{\partial \beta}{\partial r} = -k \beta^m p^n \rho^e \exp \left(- \frac{E_+ + p}{p} \right)$$

Здесь h, p, ρ, v — соответственно энтальпия, давление, плотность и скорость среды, E_+ и Q — энергия активации и полное тепловыделение в единице массы газа, β — массовая концентрация непрореагировавших молекул, γ — показатель адиабаты, $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоских, цилиндрических и сферических волн.

Считая распространяющуюся ударную волну сильной, запишем соотношения на ней

$$v_* = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad \rho_* = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad p_* = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2, \quad \beta_* = 1 \quad (1.2)$$

Здесь D — скорость ударной волны, ρ_0 — плотность газа перед волной. Заметим, что при постоянных Q и E_+ и при $l = 0, n = m - 1$ система (1.1) использовалась в [20] для исследования структуры детонационной волны.

Приведем также интегральные законы сохранения массы и энергии. Закон сохранения массы, заключенной в области за ударной волной, при распространении ударной волны от центра имеет вид

$$\int_0^{r_*} \rho_0 r^{\nu-1} dr = \int_{r_0}^{r_*} \rho r^{\nu-1} dr$$

где r_* — радиус ударной волны, r_0 — радиус внутренней границы газа, ρ_0 — начальная плотность.

Для полной энергии движущегося газа E_2 и начальной энергии E_1 имеем формулы

$$E_1 = \eta_\nu \int_0^{r_*} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + Q \right) \rho_0 r^{\nu-1} dr$$

$$E_2 = \eta_\nu \int_{r_0}^{r_*} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \beta Q \right) r^{\nu-1} dr$$

$$\eta_\nu = 2(\nu - 1)\pi + (\nu - 2)(\nu - 3)$$

Рассмотрим автомодельные решения системы (1.1). Для определенности возьмем зависимость энергии активации и полного тепловыделения от параметров течения (и от r и t) в виде

$$E_+ = E_{+0} p^{\alpha_1} \rho^{\alpha_2} t^{\alpha_3}, \quad Q = Q_0 p^{\alpha_1} \rho^{\alpha_2} t^{\alpha_3}. \quad (1.3)$$

При сделанных предположениях система (1.1) имеет решения, описывающие автомодельные течения в случае переменной начальной плотности газа, а именно, когда $\rho_0 = A r^{-s}$. Единственной независимой переменной будет $\lambda = r/r_* = r/bt^\theta$, где b и θ — некоторые постоянные. Вводя новые безразмерные переменные $v = v_* V, p = p_* P, \rho = \rho_* R$, получим для их определения вместо (1.1) систему

$$\left(\frac{2V}{\gamma + 1} - \lambda \right) \frac{dR}{d\lambda} + \frac{2}{\gamma + 1} R \frac{dV}{d\lambda} - sR + \frac{2(\nu - 1)RV}{(\gamma + 1)\lambda} = 0$$

$$R \left[\frac{\theta - 1}{\theta} V + \left(\frac{2V}{\gamma + 1} - \lambda \right) \frac{dV}{d\lambda} \right] + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{dP}{d\lambda} = 0 \quad (1.4)$$

$$\left[2 \frac{\theta - 1}{\theta} + s(\gamma - 1) \right] P + \left(\frac{2V}{\gamma + 1} - \lambda \right) \left(\frac{dP}{d\lambda} - \frac{\gamma P}{R} \frac{dP}{d\lambda} \right) =$$

$$= -\sigma_2 R \left[2 \frac{\theta - 1}{\theta} \beta \lambda^{\alpha_1} P^{\alpha_1} R^{\alpha_2} + \left(\frac{2V}{\gamma + 1} - \lambda \right) \frac{d\lambda^{\alpha_3} \beta P^{\alpha_1} R^{\alpha_2}}{d\lambda} \right]$$

$$\left(\frac{2V}{\gamma + 1} - \lambda \right) \frac{d\beta}{d\lambda} = -\sigma_0 P^n R^l \beta^m \exp(-\sigma_1 P^{\omega_1 - 1} R^{\omega_2 + 1} \lambda^{\omega_3})$$

Здесь введены обозначения

$$\sigma_0 = k A^{n+l} \theta^{2n-1} 2^n (\gamma + 1)^{l-n} b^{(2n-1)/\theta} (\gamma - 1)^{-l}$$

$$\sigma_1 = E_{+0} 2^{\omega_1 - 1} \theta^{2(\omega_1 - 1)} A^{\omega_1 + \omega_2} b^{(2\omega_1 - 2 - \omega_2)/\theta} (\gamma + 1)^{\omega_2 - \omega_1 + 2} (\gamma - 1)^{-\omega_2 - 1}$$

$$\sigma_2 = Q_0 2^{\alpha_1 - 1} \theta^{2(\alpha_1 - 1)} A^{\alpha_1 + \alpha_2} b^{(2\alpha_1 - 2 - \alpha_2)/\theta} (\gamma + 1)^{\alpha_2 - \alpha_1 + 2} (\gamma - 1)^{-\alpha_2} \quad (1.5)$$

Решение системы (1.4) должно удовлетворять граничным условиям

$$V = P = R = \beta = 1 \quad \text{при } \lambda = 1, \quad V = V_0 \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 \quad (1.6)$$

При этом должны выполняться следующие условия автомодельности:

$$s = \frac{1}{n+l} + \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{2n - 1}{n+l} \quad (1.7)$$

$$\left(2 \frac{\theta - 1}{\theta} - s \right) \alpha_1 + \alpha_3 + s \alpha_2 + \frac{\alpha_4}{\theta} = 2 \frac{\theta - 1}{\theta}$$

$$\left(2 \frac{\theta - 1}{\theta} - s \right) \omega_1 + \omega_3 - s \omega_2 + \frac{\omega_4}{\theta} = 2 \frac{\theta - 1}{\theta}$$

Система уравнений (1.4) в отличие от аналогичной системы автомодельных уравнений для обычной газовой динамики в общем случае не может быть сведена к исследованию только одного обыкновенного уравнения и не имеет классических интегралов [9].

Рассмотрим теперь задачи, которые можно решать, используя систему (1.4) и условия (1.6), (1.7). По аналогии с обычной газовой динамикой можно отметить следующие автомодельные задачи.

а) *Задача о движении плоского, цилиндрического и сферического поршня в газе со скоростью $u = ct^{\theta-1}$ ($c = \text{const}$). В этом случае на поршне имеем условие $u = v$, или в безразмерных переменных*

$$V = \delta \lambda_0 \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 \quad (\delta = \text{const})$$

Если скорость поршня постоянна, то $\theta = 1$ и имеем на поршне условие

$$V = 1/2(\gamma + 1)\lambda_0$$

б) *Задача о распространении самоподдерживающейся ударной волны, включающей механизм химической реакции, — аналог задачи о самоподдерживающейся волне детонации. В этом случае должно выполняться условие $V(0) = 0$.*

в) *Задача о сильном точечном взрыве в химически активном газе. Для этой задачи $\theta = 2 / (\gamma + 2 - s)$.*

2. Частное точное решение системы уравнений для автомодельных движений. Система (1.4) с граничными условиями (1.6) имеет простое точное решение

$$V = \lambda, \quad P = \lambda^{2+[2v-s(\gamma+1)]/(\gamma-1)}, \quad R = \lambda^{[2v-s(\gamma+1)]/(\gamma-1)}$$

$$\beta = \lambda^d \left(d = \frac{[2v-s(\gamma+1)](n+l)+2n(\gamma-1)}{(\gamma-1)(1-m)} \right) \quad (2.1)$$

При этом, кроме условий (1.7), должны выполняться дополнительные условия

$$\frac{2v-s(\gamma+1)}{\gamma-1} + \frac{\theta-1}{\theta} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + 1 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{[2v-s(\gamma+1)](n+l)+2n(\gamma-1)}{(\gamma-1)(1-m)} + \alpha_3 + 2\alpha_1 + \frac{2v-s(\gamma+1)}{\gamma-1}(\alpha_1 + \alpha_2) - 2 = 0$$

$$\frac{2v-s(\gamma+1)}{\gamma-1}(\omega_1 + \omega_2) + 2(\omega_1 - 1) + \omega_3 = 0$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sigma_0 l^{-\sigma_1} = \frac{[2v-s(\gamma+1)](n+l)+2n(\gamma-1)}{(\gamma-1)(1-m)}$$

$$\sigma_2 = \left[(\gamma-1) \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{\theta-1}{\theta} \right] \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{\theta-1}{\theta} \right)^{-1}$$

Если энергия активации равна нулю ($\sigma_1 = 0$), то в (1.7), (2.2) условия, содержащие ω_i , будут несущественными.

Условие положительности величины σ_2 налагает ограничение на показатель неравномерности начальной плотности s

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(2 - v \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \right) < s < \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(2 + \frac{2v}{\gamma-1} \right) \quad (2.3)$$

Легко однако видеть, что условия (2.2–2.3) оставляют достаточно свободы для выбора констант, определяющих течение.

3. Движение поршня с постоянной скоростью. Задача о движении сферического поршня в горючей газовой смеси с постоянной скоростью была решена численно для ряда значений безразмерных параметров σ_0 , σ_1 , σ_2 при значениях

$$s = 1, \quad m = 2, \quad \gamma = 5/3, \quad l = 0, \quad n = 1, \quad \alpha_i = \omega_i = 0$$

Система автомодельных уравнений интегрировалась численно от фронта ударной волны до поршня, т. е. до таких значений λ , при которых выполняется граничное условие на поршне $V = 4/3\lambda$. Рассматривался случай постоянных значений энергии активации и полного тепловыделения, т. е. $E_+ = \text{const}$ и $Q = \text{const}$. Для значений параметра σ_2 имеем формулу

$$\sigma_2 = \frac{(\gamma+1)^2 Q}{2D^2} \quad (D - \text{скорость волны}) \quad (3.1)$$

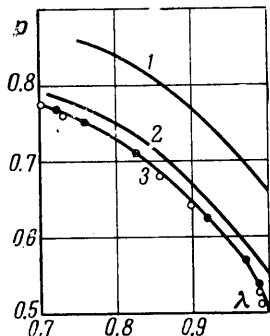
Если скорость волны равняется скорости волны ЧЖ $D = D_J$, то $\sigma_2 = 0.25(\gamma+1)/(\gamma-1)$ и при $\gamma = 5/3$ имеем $\sigma_2 = 1$.

Для того чтобы проследить за поведением решения задачи о поршне, были рассмотрены случаи $\sigma_2 < 1$, соответствующие пересжатым детонационным волнам, и случаи $\sigma_2 > 1$, соответствующие волнам, распространяющимся по газу со скоростью, меньшей скорости волны ЧЖ. Во всех рассчитанных случаях предполагалась реакция второго порядка, т. е. $m = 2$. На основании анализа результатов расчетов были выявлены следующие основные особенности в поведении решения.

1. Для пересжатых волн при приближении σ_2 к единице и одновременном увеличении скорости химической реакции за счет увеличения предэкспоненциального множителя σ_0 от 10^{10} до 10^{16} (при фиксированной энер-

гии активации $\sigma_1 \sim 1$) решение задачи стремится к решению задачи о поршне для случая идеальной (бесконечно тонкой) детонационной волны, рассмотренной в [9.11].

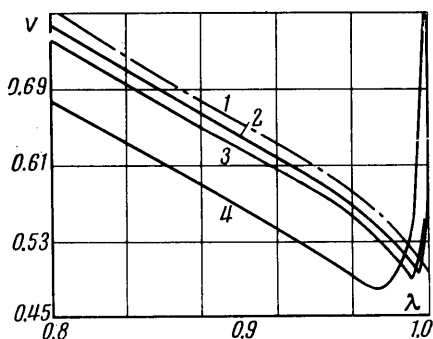
Для случая $\nu = 3$, $\sigma_1 = 1$ эти результаты отражены на фиг. 1. Здесь кривые 1, 2, 3 соответствуют $\sigma_0 = 5 \cdot 10^6$ и значениям $\sigma_2 = 0.9$; 0.99; 0.9999. Черными кружками обозначена кривая, соответствующая $\sigma_0 = 10^{14}$, $\sigma_2 = 0.9999$, а светлыми кружками кривая, соответствующая распространению величин ЧЖ, поддерживаемой движущимся поршнем. Интересно отметить, что при описанном предельном переходе не получается самоподдерживающаяся детонационная волна, распространяющаяся со скоростью ЧЖ.



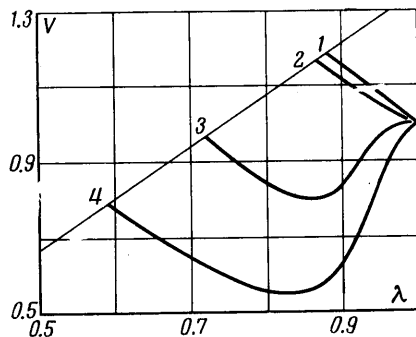
Фиг. 1

2. В случае ударных волн, распространяющихся со скоростью, меньшей скорости, соответствующей волне ЧЖ ($\sigma_2 > 1$), оказалось, что для любой фиксированной скорости волны существует наибольшее значение величины предэкспоненциального множителя σ_0^* (при фиксированной энергии активации), которому соответствуют некоторые предельные распределения параметром течения, отличных, конечно, от распределений параметров в случае идеальной детонации. При $\sigma_0 > \sigma_0^*$ решения не существует. При стремлении σ_2 к единице сверху предельное значение предэкспоненциального множителя неограниченно возрастает и предельные распределения параметром течения стремятся к распределению параметров в случае идеальной детонации ЧЖ, поддерживаемой поршнем (фиг. 2), т. е. и при таком предельном переходе не получается самоподдерживающаяся детонационная волна ЧЖ.

Фиг. 2 относится к случаю $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$, $\sigma_1 = 1$. Здесь кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\sigma_2 = 1$, $\sigma_0 = \infty$; $\sigma_2 = 1.005$, $\sigma_0 = 3.59 \cdot 10^5$; $\sigma_2 = 1.01$, $\sigma_0 = 1.0175 \cdot 10^5$; $\sigma_2 = 1.05$, $\sigma_0 = 5.82 \cdot 10^3$.



Фиг. 2



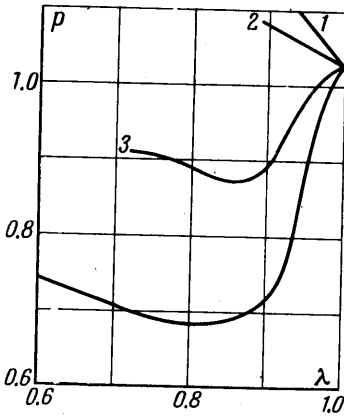
Фиг. 3

3. При больших значениях энергии активации, т. е. при больших значениях σ_1 , течение газа близко к течению при отсутствии химических реакций — величина β весьма мало отличается от единицы (при фиксированных σ_2 и σ_0). С уменьшением энергии активации поведение кривых резко меняется. Профили скорости, давления и плотности носят резко немонотонный характер. Так, скорость газа сначала убывает, а затем возрастает до значения скорости на поршне. Результаты расчета для $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$, $\sigma_1 > 7$ и $\sigma_2 = 3$, $\sigma_0 = 1500$ показаны на фиг. 3—5, где кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям $\sigma_1 = 100, 9.8, 7.5, 7.2372$.

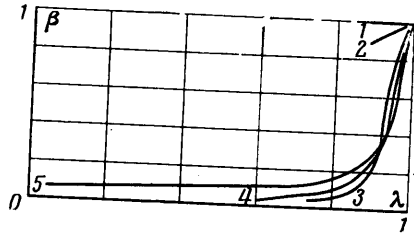
4. Распространение самоподдерживающейся ударной волны, поджигающей горючую смесь. Рассмотрим задачу о движении горючей смеси газа с ударной волной без дополнительного подвода энергии к газу, например, при помощи поршня или взрыва. При этом предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ возникла ударная волна, причем энергией, затраченной на ее создание, можно пренебречь. Аналогичные задачи с бесконечно тонкой детонационной волной детально исследованы в упомянутых выше работах [7-9].

В полученных решениях задач о распространении самоподдерживающейся идеальной детонации скорость распространения волны в точности равна скорости волны ЧЖ, если показатель неоднородности плотности среды удовлетворяет неравенству $0 \leq s \leq \gamma(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Характерные свойства этих течений газа с волной ЧЖ заключаются в следующем.

При постоянной начальной плотности около центра симметрии образуется зона покоя, где плотность и давление постоянны. При перемен-



Фиг. 4



Фиг. 5

ной начальной плотности скорость газа за волной детонации монотонно убывает и обращается в нуль только в центре при $r = 0$. Давление тоже монотонно убывает до некоторого значения в центре. Градиенты давления, плотности и скорости бесконечны за фронтом сферической и цилиндрической детонационной волны ЧЖ.

Энергия движущегося газа равна начальной энергии покоящегося газа. В общем случае при $\beta \neq 0$ это условие имеет вид

$$\int_0^r \left[\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} - Q(1 - \beta)\rho \right] r^{\nu-1} dr = \int_0^r \frac{P_0}{\gamma - 1} r^{\nu-1} dr$$

В случае сильной детонации, т. е. при $p_0 = 0$, и для автомодельных движений имеем

$$J = \int_0^1 [RV^2 + P - \sigma_2 R^{\alpha_2+1} P^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_3} (1 - \beta)] \lambda^{\nu-1} d\lambda = 0 \quad (4.1)$$

Условие (4.1) означает, что к газу не подводится дополнительно никакой энергии извне.

Наличие бесконечных градиентов за фронтом детонационной волны заставляет с осторожностью подходить к использованию упомянутых решений для описания реальной картины течения газа в окрестности фронта ударной волны, поджигающей газ. Представляет интерес выяснение того, является ли течение газа за бесконечно тонкой самоподдерживающейся детонационной волной пределом течений газа с учетом химических реакций при стремлении скорости реакции к бесконечности, т. е. в рассматриваемом случае при возрастании σ_0 до бесконечности.

Ввиду большой сложности исходной системы уравнений не удалось провести аналитическое исследование этого вопроса. Численный же анализ показал, что для случая $\theta = s = 1$, $Q = \text{const}$, $E_+ = \text{const}$ и при одновременном стремлении $\sigma_0 \rightarrow \infty$ и $\sigma_2 \rightarrow 1 - 0$ решение задачи стремится к решению для идеальной детонации ЧЖ с поршнем (это уже отмечалось выше). При стремлении $\sigma_2 \rightarrow 1 + 0$ также не удалось получить предельным переходом решение, удовлетворяющее условию (4.1) при $\beta = 0$, т. е. самоподдерживающуюся детонационную волну ЧЖ. Однако из этого результата нельзя сделать окончательный вывод о том, что течение за сферической самоподдерживающейся бесконечно тонкой детонационной волной ЧЖ не будет пределом одномерных решений с учетом химических реакций при неограниченном возрастании скорости реакции. Для этого нужны дополнительные более детальные исследования поведения решения при изменении величин σ_0 , σ_1 , σ_2 .

Кроме отмеченного выше вопроса о предельных свойствах решений, имеют значение новые решения системы автомодельных уравнений, удовлетворяющих условию (4.1) при $\beta \neq 0$.

Эти решения будут описывать течение с ударной волной, включающей химическую реакцию за своим фронтом (ударная волна включения), которое поддерживается за счет выделения энергии в потоке газа. Решение этого типа имеется среди всевозможных точных решений (2.1). Оно имеет вид

$$V = P = \lambda, \quad R = 1/\lambda, \quad \beta = \lambda^2 \quad (4.2)$$

Легко проверить, что для этого решения выполнено условие (4.1), т. е. оно описывает течение газа за самоподдерживающейся ударной волной, распространяющейся с постоянной скоростью по газу. Для течения за сферической ударной волной и $\gamma = 5/3$ распределение начальной плотности будет иметь вид $\rho_0 = A/r^{2.5}$.

Считая полное тепловыделение постоянным ($\alpha_1 = 0$) из (2.2) получим $\sigma_2 = 2$, а из соотношения (3.1) находим скорость распространения ударной волны (при $\nu = 3$)

$$D = b = 1/2(\gamma + 1)\sqrt{Q_0}, \quad D = D_J[(\gamma + 1)/8(\gamma - 1)]^{1/2} \quad (4.3)$$

(D_J — скорость волны ЧЖ).

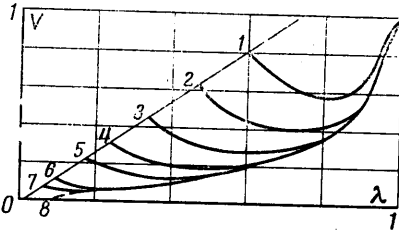
При $\gamma > 9/7$ скорость распространения ударной волны меньше скорости волны ЧЖ, а при $1 < \gamma < 9/7$ — больше скорости волны ЧЖ. В обоих случаях скорость скачка по частицам за фронтом дозвуковая.

Интересно сравнить решение (4.2) с решением, полученным в приближении бесконечно тонкой волны детонации для такого же распределения начальной плотности и $\gamma = 5/3$ [9]. Сравнение показывает, что учет химических реакций совершенно меняет характер решения. В случае бесконечно тонкой волны скорость ее превышает скорость волны ЧЖ, а в центре образуется пустота. При учете химической реакции при сохранении всех остальных величин скорость ударной волны в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости волны ЧЖ и в центре пустота не образуется. При этом уравнение, описывающее протекание химической реакции, будет

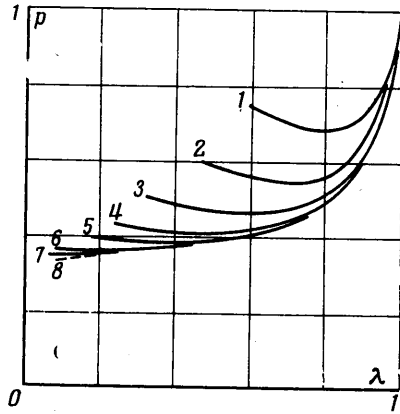
$$\frac{d\beta}{dt} = -k\beta^m p^{9/5} \rho^{m-4/5} \exp \left[-\frac{E_+ \rho^2 / \epsilon^{3/2} r^{3/2}}{(RT)^{3/10 \alpha_3}} \right] \quad (4.4)$$

Решение с пренебрежимо малой величиной дополнительной подводимой энергии было получено численно для случая сферической симметрии при $\gamma = 5/3$, $\sigma_2 = 3$ и $\sigma_0 = 1500$.

На фиг. 6 и 7 представлены для этого случая распределения скорости и давления при разных значениях σ_1 . Здесь номера кривых 1—8 соответствуют следующим значениям σ_1 : 7.5, 7.3, 7.25, 7.24, 7.238, 7.23725, 7.23720, 7.23715. При $\sigma_1 = 7.23720$ эти распределения продолжаются до центра, причем интеграл (4.1) при таком σ_1 близок к нулю. Значе-



Фиг. 6



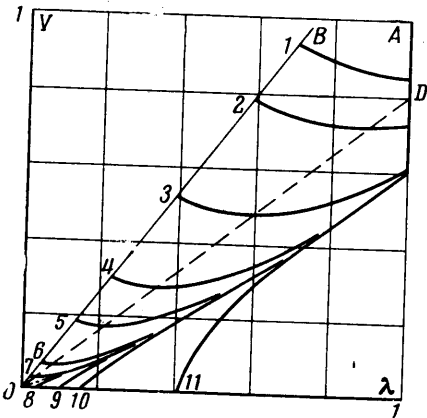
Фиг. 7

ния интегралов энергии и масс в зависимости от σ_1 для рассматриваемого случая приводятся ниже.

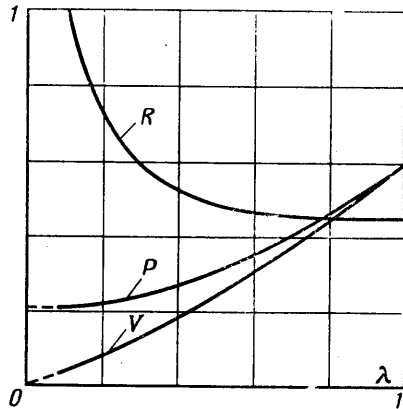
σ_1	J_1	J_2	σ_1	J_1	J_2
7.3	0.12491	0.77595	7.238	0.124995	$2.9762 \cdot 10^{-3}$
7.25	0.12496	$2.5763 \cdot 10^{-2}$	7.23725	0.125009	$4.4982 \cdot 10^{-4}$
7.24	0.12498	$8.1824 \cdot 10^{-3}$	7.23720	0.125012	$2.4256 \cdot 10^{-4}$

Вблизи центра симметрии величина β почти не меняется, т. е. реакция прекращается (кривая для β при $\sigma_1 = 7.23720$ приведена на фиг. 5). Было также получено решение задачи о движении газа за инициирующей ударной волной для цилиндрическо-симметричного течения при $s = \theta = 1$, $\gamma = 5/3$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_0 = 10^9$ и разных σ_2 .

На фиг. 8 показано поведение решения для функции $V(\lambda)$. Здесь кривым 1—11 соответствуют следующие значения σ_2 : 0.5, 0.8, 0.95, 0.96,



Фиг. 8



Фиг. 9

0.96055, 0.96066, 0.960669, 0.96067, 0.96068, 0.9607, 0.961. Графики функций для предельного решения при $\sigma_2 = 0.960667$ изображены на фиг. 9. Оказа-

лось, что вне некоторой (чрезвычайно малой) окрестности ударной волны это решение близко к соответствующему решению для пересжатой бесконечно тонкой детонационной волны [9], которое имеет место для случая $\gamma = 5/3, s = 1$.

5. Точечный взрыв в горючей смеси газов и его приложения к вопросам обтекания тел. Рассмотрим задачу о сильном точечном взрыве в газе, в котором могут протекать реакции. Пусть E_0 — энергия взрыва в сферическом случае, или энергия, рассчитанная на единицу площади или длины, соответственно в плоском и цилиндрическом случаях. Для сильного взрыва имеем в случае автомодельных решений

$$\theta = \frac{2}{5-s}, \quad r^* = \left(\frac{E_0}{\alpha_* A} \right)^{0/2} t^{\theta}$$

где α_* — величина, зависящая от безразмерных параметров. (Постановка автомодельных задач о взрыве была рассмотрена также в работе [16].)

Нужно найти решение системы уравнений (1.4) с граничными условиями на ударной волне (1.6) и условием равенства нулю скорости газа в центре взрыва $V(0) = 0$.

Интегральный закон сохранения энергии дает формулу для вычисления α_* :

$$\alpha_* = \eta v \frac{8}{(v+2-s)^2} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \int_0^1 [R^{\nu} + P - \sigma_2 R^{\alpha_2+1} P^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_3} (1-\beta)] \lambda^{\nu-1} d\lambda \quad (5.1)$$

В дальнейшем рассмотрим лишь случаи, когда $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$. Из условий автомодельности при $s = 0$ (случай постоянной начальной плотности) имеем $n = (v+2)/2v$. Были подробно рассмотрены случаи $\alpha_1 = \omega_1 = 1$, т. е. тепловыделение Q и энергия активации E_+ предполагались пропорциональными давлению. При расчете принималось также $l = 1/2$. Решение исследовалось для значений $0 < \sigma_2 < 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_0 = 10^6$ и $\sigma_0 = 10^9$. Расчеты проводились в основном для значений $\gamma = 1.4$ и $\gamma = 1.2$, $\sigma_2 = 0.01, 0.1$. Для контроля точности вычислений использовался интегральный закон сохранения масс, который в принятых безразмерных переменных будет иметь вид

$$\int_0^1 R \lambda^{\nu-1} d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{v-s} \quad (5.2)$$

Результаты расчета для взрыва в газе с постоянной плотностью ($v = 2$, $\gamma = 1.4$, $\sigma_2 = 0.1$) приведены на фиг. 10. Пунктиром здесь указаны кривые для автомодельного решения в газе при $\sigma_2 = 0$, т. е. при тепловыделении, равном нулю.

Решение задачи показывает, что в окрестности центра взрыва образуется зона покоя с весьма низкой плотностью и постоянным давлением. Размеры зоны покоя растут при возрастании σ_2 , величина α_* при этом убывает. При $\sigma_0 \sim 10^6 \div 10^9$ величина β принимает значения порядка 10^{-6} при значениях λ в пределах $0.99 < \lambda < 1$. Точность расчетов была такова, что интегральный закон сохранения масс выполнялся с точностью до четырех значащих цифр.

Другим интересным случаем будет случай, когда $s = v - 1$. Этот случай соответствует точечному взрыву или распространению детонационной волны в потоке газа, происходящем в плоском клиновидном ($v = 2$) или коническом ($v = 3$) диффузоре [21]. В случае взрыва между ω_2 и ω_1 имеется связь $\omega_2 = v - s - v\omega_1$, и можно принять $\alpha_3 = \alpha_4 = \omega_3 = \omega_4 = 0$.

По известной аналогии [22] между обтеканием затупленного цилиндра (плоскости) и цилиндрическим (плоским) взрывом полученные результаты можно использовать для выяснения качественной картины гиперзвукового обтекания затупленных тел горючей смесью газов. Так, в случае обтекания цилиндра

сверхзвуковым потоком газа, в котором Q и E_+ пропорциональны давлению, в некоторой области, примыкающей к телу скорости направлены вдоль образующей, плотность в этой зоне весьма незначительна и газ практически сгорает в узкой зоне за фронтом ударной волны.

Заметим также, что из формул (2.1) можно получить известные решения задачи о сильном точечном взрыве в газе переменной плотности, если тепловыделение равно нулю. В этом случае из (2.2) находим

$$s = [3v - 2 - \gamma(v - 2)] / (\gamma + 1),$$

а из последнего условия (2.2) получаем $\sigma_2 = 0$. Из решения (2.1) получаем

$$V = \lambda, \quad R = \lambda^{\nu-2}, \quad P = \lambda^{\nu}$$

Это решение совпадает с известным решением для случая не реагирующего газа [9].

Следует отметить, что рассмотренный выше круг задач можно обобщить и на случаи многих химических реакций, которые могут протекать как одновременно, так и последовательно.

Поступило 16 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

- Erpenbeck I. I. Stability of idealized one — reaction detonations. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, No. 5, p. 684.
- Erpenbeck I. I. Stability of idealized one — reaction detonations, Zero activation energy. *Phys. Fluids*, 1965, vol. 8, No. 6, p. 1192.
- Erpenbeck I. I. Detonation stability for disturbances of small transverse wavelength. *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, No. 7, p. 1293.
- Strehlow R. A., Fernandes F. D. Transverse waves in Detonations. *Combustion and Flame*, 1965, vol. 9, No. 2, p. 109.
- Barthel H. O., Strehlow R. A. Wave propagation in one — dimensional reactive flows. *Phys. of fluids*, 1966, vol. 9, No. 10, p. 1896.
- Войцеховский Б. В., Митрофанов В. В., Топчийн М. Е. Структура фронта детонации в газах. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1963.
- Зельдович Я. Б. О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности, при сферическом распространении детонационной волны. *ЖЭТФ*, 1942, т. 12, вып. 9, стр. 389.
- Taylor G. L. The dynamics of the combustion on products behind plane and spherical detonation fronts in explosives. *Proc. Roy. Soc., A* 200, 235 (1950).
- Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 4-е. М., Гостехиздат, 1957.
- Квашнина С. С., Черный Г. Г. Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа. *ПММ*, 1959, т. 23, вып. 1.
- Lee I. H. The propagation of shocks and blast waves in a detonating gas. Rept. 65—4, McGill University, Montreal, 1965.
- Левин В. А., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн. *ИММ*, 1967, т. 31, вып. 3.
- Левин В. А. Приближенное решение задачи о сильном точечном взрыве в горючей смеси. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1967, № 1.
- Коробейников В. П. Точечный взрыв в детонирующем газе. *Докл. АН СССР*, 1967, т. 177, № 2.
- Бишимов Е. Численное решение задачи о сильном точечном взрыве в детонирующем газе. Сб. «Дифференциальные уравнения и их применение», Алма-Ата, «Наука» АН Казах. ССР, 1968.
- Коробейников В. П. Задача о точечном взрыве в детонирующем газе. Тр. Брюссельского Международного коллоквиума по газодинамике взрывов, Acta Astronautica, 1968 (в печати).
- Strehlow R. A., Hartung W. E. On the Early Relaxation of an overdriven Detonation wave. *Combustion and Flame*, 1965, vol. 9, No. 4, p. 423.
- Левин В. А. О переходе плоской пересжатой детонационной волны к режиму Чемпена — Жуге. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 2.
- Fickett W., Wood W. W. Flow calculations for Pulsating One — Dimensional Detonations. *Phys. of Fluids*, 1966, vol. 9, No. 5, p. 903.
- Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.
- Mirels H., Mullen I. F. Aerodynamic Blast Simulations in Hypersonic Tunnels. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, No. 11.
- Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.