

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К НЕЛИНЕЙНЫМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

Ф. Н. ЯСИНСКИЙ (Иваново)

Пусть состояние и движение среды описываются системой уравнений

$$F_\alpha(x, y, \psi_1, \dots, \psi_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Здесь F_α — произвольные операторы; x, y — координаты точек области Ω , занятой движущейся жидкостью; $\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)$ — функции, описывающие процесс. К уравнениям (1) присоединяются граничные условия

$$f_\beta(x, y, \psi_1, \dots, \psi_n)|_\tau = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

Здесь f_β — произвольные операторы, τ — граница Ω . Изучение течения сводится к отысканию функций ψ_1, \dots, ψ_n , удовлетворяющих уравнениям (1) всюду в Ω и условиям (2) на границе τ .

Ниже излагается методика приближенного решения этого класса задач, опирающаяся на метод Монте-Карло, и результаты ее испытаний.

Предположим, что удалось построить систему функций

$$\varphi_\omega(x, y, C_{\omega 1}, \dots, C_{\omega R_\omega}) \quad (\omega = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

относительно которой известно, что при соответствующем подборе параметров C с ее помощью можно равномерно аппроксимировать с требуемой точностью искомые функции ψ_1, \dots, ψ_n вместе со всеми производными, входящими в (1) и (2).

Если ψ_1, \dots, ψ_n отвечают известным требованиям непрерывности, то согласно теореме Вейерштрасса в качестве выражений (3) могут быть использованы степенные или тригонометрические полиномы. Однако эти выражения могут иметь и иной вид. Отметим, что выражения (3), вообще говоря, не удовлетворяют ни уравнениям (1), ни условиям (2).

Приближенное решение ищется на множестве функций (3). Вводится следующее определение меры близости. Пусть выбрано две системы точек

$$(x_\mu, y_\mu) \quad (\mu = 1, 2, \dots, N_\Omega), \quad (x_\nu, y_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \dots, N_\tau)$$

Первая в области Ω и вторая на границе τ .

Если подставить (3) в (1) и (2), то в каждой из указанных точек можно вычислить невязки

$$F_{\alpha\mu} = F_\alpha[x_\mu, y_\mu, \psi_1(x_\mu, y_\mu), \dots, \psi_n(x_\mu, y_\mu)] \\ f_{\beta\nu} = f_\beta[x_\nu, y_\nu, \psi_1(x_\nu, y_\nu), \dots, \psi_n(x_\nu, y_\nu)]$$

За меру близости приближенного решения к точному принимается величина

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\mu=1}^{N_\Omega} G_{\alpha\mu} F_{\alpha\mu}^2 + \sum_{\beta=1}^m \sum_{\nu=1}^{N_\tau} g_{\beta\nu} f_{\beta\nu}^2 \quad (4)$$

Здесь $G_{\alpha\mu} = G_\alpha(x_\mu, y_\mu) > 0$, $g_{\beta\nu} = g_\beta(x_\nu, y_\nu) > 0$ — некоторые весовые функции. За оптимальные принимаются такие значения параметров C , при которых величина Φ принимает наименьшее значение.

В нелинейных задачах для отыскания оптимальных C наиболее удобны способы минимизации, опирающиеся на метод Монте-Карло. К его достоинствам относятся слабая зависимость скорости сходимости от количества параметров C и сравнительная простота программ.

Ниже рассматриваются два таких способа: способ случайного поиска [1] и способ кратных интегралов.

Назовем набор параметров C точкой в пространстве поиска. Пусть C_1', \dots, C_N' соответствует Φ' . Эта точка условно принимается за первую «удачную» точку. Из ее окрестности при помощи набора псевдослучайных чисел $\zeta \in (-1, +1)$ выбирается случайная точка, координаты которой вычисляются по формулам¹

$$C_j = C_j' + \zeta \delta C_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

Величины δC_j определяют размеры окрестности. Значение Φ в новой точке сравнивается с Φ' . Если $\Phi < \Phi'$, то новая точка является следующей в последователь-

¹ Здесь и далее нумерация параметров C изменена.

ности удачных и очередное испытание делается из ее окрестности. Если $\Phi > \Phi'$, то испытание делается в окрестности последней удачной точки. Полученная таким образом последовательность удачных точек сходится к минимуму. На эффективность поиска сильно влияют размеры окрестности, т. е. набор величин δC_j . По мере приближения к минимуму все δC_j должны уменьшаться. В проведенных опытах их изменение производилось с пульта, в зависимости от результатов поиска, которые периодически выводились на печать.

Перейдем к рассмотрению способа кратных интегралов. Пусть некоторые величины C_j^* определяются следующим образом:

$$C_j^* = \frac{\int \dots \int C_j \lambda \{ \Phi(C_1, \dots, C_N) \} dC_1 \dots dC_N}{\int \dots \int \lambda \{ \Phi(C_1, \dots, C_N) \} dC_1 \dots dC_N}$$

Здесь интегрирование ведется по N -мерной области B пространства поиска, в которой функция $\Phi(C_1, \dots, C_N)$ имеет единственный минимум; λ — функция определяется условиями

$$\lambda \geq 0, \quad 0 < z < \infty, \quad 0 < \Delta z < \infty$$

$$\sigma = \int_z^{z+\Delta z} \lambda(\eta) d\eta \bigg/ \int_{z+\Delta z}^{\infty} \lambda(\eta) d\eta \gg 1 \quad (7)$$

Простейшим представителем таких функций является, например, степенная

$$\lambda = \eta^{-k^2}, \quad \sigma = -1 + (1 + \Delta z / z)^{k^2-1} \quad (8)$$

Очевидно, что при любых $0 < z < \infty$ и $0 < \Delta z < \infty$ можно подобрать такое k^2 , что условие (7) будет выполняться.

Переходя от переменных C_1, \dots, C_N к z_1, \dots, z_N и принимая $z_1 = \Phi$, при помощи теоремы о среднем и условия (7) можно (6) привести к виду

$$C_j^* = \frac{\int \dots \int C_j(z_1^*, z_2, \dots, z_N) |Q(z_1', z_2, \dots, z_N)| dz_2 \dots dz_N}{\int \dots \int |Q(z_1', z_2, \dots, z_N)| dz_2 \dots dz_N} \quad (9)$$

Здесь Q — якобиан преобразования

$$m' < z_1' < m' + \Delta z, \quad m' < z_1^* < m' + \Delta z$$

Интегрирование в (9) производится по площади S_N — замкнутой поверхности $N-1$ измерения

$$\Phi(C_1, \dots, C_N) = z_1' \quad (10)$$

охватывающей точку минимума $\Phi(C_1^{\circ}, \dots, C_N^{\circ}) = m'$.

Выражение (9) можно рассматривать, как усреднение C_j по замкнутой поверхности (10). Очевидно, что

$$C_j^- < C_j^* < C_j^+ \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь C_j^- и C_j^+ наименьшее и наибольшее значения параметра C_j на замкнутой поверхности $\Phi(C_1, \dots, C_N) = m' + \Delta z$.

Таким образом, при $\Delta z \rightarrow 0$

$$C_j^* \rightarrow C_j^{\circ} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

Здесь C_j° — координаты точки минимума.

Аналогично можно оценить величину разности $C_j^* - C_j^{\circ}$

$$(\Delta C_j)^2 = \frac{\int \dots \int (C_j - C_j^*)^2 \lambda \{ \Phi(C_1, \dots, C_N) \} dC_1 \dots dC_N}{\int \dots \int \lambda \{ \Phi(C_1, \dots, C_N) \} dC_1 \dots dC_N} \quad (12)$$

При помощи выражений (6), (12) строится вычислительный процесс по отысканию параметров $C_1^{\circ}, \dots, C_N^{\circ}$, минимизирующих Φ . Подбирается последовательность λ -функций с уменьшающимися значениями полосы пропускания Δz , т. е. с возрастающими показателями k^2 . При помощи первой λ -функции этой последовательности вычисляются все C_j^* и ΔC_j в первом приближении. Совокупность ΔC_j рассматривается как новая область интегрирования B_1 , находящаяся внутри области B . Вычислительный цикл повторяется с использованием следующей λ -функции и т. д.

Таким образом, отыскание параметров, минимизирующих Φ , сведено к вычислению кратных интегралов. Этот процесс удобен при реализации на вычислительных машинах при помощи метода Монте-Карло.

Если последовательность λ -функций выбрана удачно, то скорость сходимости будет лишь слабо зависеть от кратности интегралов, равной числу определяемых параметров C .

Ниже описываются задачи, на которых изложенная методика была испытана. Испытания проводились на ЦЭВМ «Урал-2» в вычислительной лаборатории Ивановского энергетического института. Машина работала в режиме с плавающей запятой, что обеспечивало среднюю скорость порядка 5000 операций в секунду.

В первой задаче исследовался процесс поперечного обтекания одиночного цилиндра потенциальным воздушным потоком. На значительном удалении от цилиндра было принято $M_\infty = 0.40$. В этом случае вблизи цилиндра имело место околосвучное течение: $M_{max} = 0.95$. Процесс описывается дифференциальным уравнением

$$F = (a^2 - \varphi, r^2) \varphi, r, r + r^{-2} (\alpha^2 - r^{-2} \varphi, \alpha^2) \varphi, \alpha \alpha - 2r^{-2} \varphi, r \varphi, \alpha \varphi, r \alpha + r^{-3} \varphi, \alpha \varphi, r^2 + r^{-1} a^2 \varphi, r = 0$$

$$a^2 = 1/2 (k - 1) (U^2 - \varphi, r^2 - r^{-2} \varphi, \alpha^2) \quad (k = 1.407)$$

Здесь r, α — полярные координаты, φ — потенциал скорости, a — местная скорость звука, U^2 — постоянная, зависящая от M_∞ .

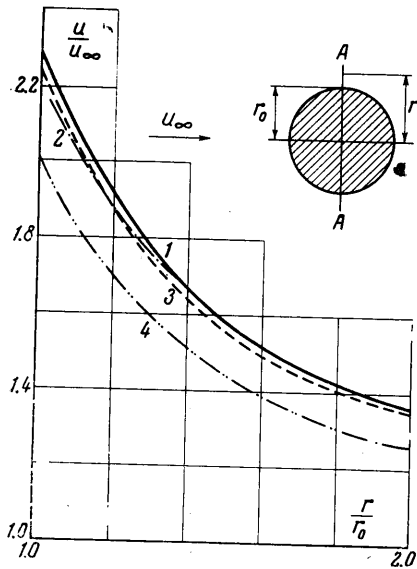
Все очевидные в данном случае граничные условия можно удовлетворить, если, согласно [2], искать приближенное решение в виде

$$\varphi = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha + \sum_{\gamma} \sum_{\theta} C_{\gamma\theta} R_{\gamma} \cos \theta \alpha, \quad R_{\gamma} = \frac{1}{\gamma} r^{-\gamma} - \frac{1}{\gamma + 2} r^{-(\gamma+2)}$$

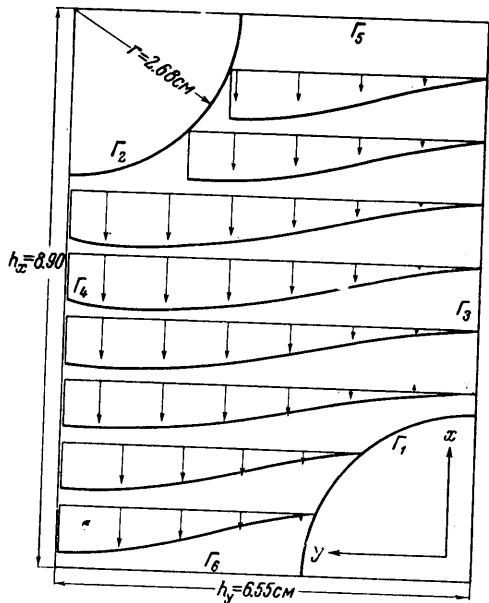
причем γ и θ должны принимать только нечетные значения. При испытании было взято шесть коэффициентов

$$C_{1,1}, C_{1,3}, C_{1,5}, C_{3,1}, C_{3,3}, C_{5,1}$$

Поток симметричен относительно двух осей, поэтому достаточно рассмотреть течение в первом квадранте $\alpha \in (0; 1/2\pi)$, где на пяти радиусах в интервале $r \in (1; 2)$ было размещено 25 контрольных точек.



Фиг. 1. Распределения скорости в сечении А — А, полученные: 1 — по методу Релея — Янсена ($K = 1.400$); 2 — экспериментально ($K = 1.407$); 3 — по методу кратных интегралов ($K = 1.407$); 4 — для несжимаемой, невязкой среды



Фиг. 2. Распределения функции тока в восьми поперечных к потоку сечениях. Стрелками показаны значения, полученные после 70 случайных испытаний. Сплошные кривые изображают распределение, найденное по методу сеток

Для определения оптимальных C использовался метод кратных интегралов, причем λ -функция была взята в виде (8). Область интегрирования сужалась пять раз. Каждый этап занимал около 12 мин. По полученным значениям C_{ν} было построено поле скоростей. Найденное распределение скорости в наиболее «интересном» сечении $A-A$ представлено на фиг. 1. Для сравнения рядом приведена кривая, полученная по методу Релея — Янсена [2].

Во второй задаче изучалось обтекание бесконечной системы цилиндров, расставленных в шахматном порядке, потоком вязкой несжимаемой жидкости. Чтобы исследовать течение во всей бесконечной области, достаточно рассмотреть распределение функции тока в области, показанной на фиг. 2 [3].

Этот процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$F = \nu \Delta^2 \psi - \psi_{,x} \Delta \psi_{,y} + \psi_{,y} \Delta \psi_{,x} = 0$$

Здесь ψ — функция тока; Δ , Δ^2 — гармонический и бигармонический операторы; ν — коэффициент кинематической вязкости. К этому уравнению присоединяются граничные условия

$$\begin{aligned} \psi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi_{,x}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi_{,y}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_3} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_4} = \psi_{\max} \\ \psi|_{\Gamma_2} = \psi_{\max}, \quad \psi_{,x}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \psi_{,y}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \psi(y)|_{\Gamma_5} = \psi(h_y - y)|_{\Gamma_5} \end{aligned}$$

Затруднительно сконструировать решение так, чтобы удовлетворились все граничные условия.

Решение отыскивалось в виде

$$\psi = uy + \sum_{k=1}^s \left[C_k' + \sum_{s=1}^3 C_{ks}'' \sin(p_s' x + C_{ks}''') \right] \sin p_k'' y \quad (13)$$

Здесь u — средняя скорость потока, определялась по числу Рейнольдса R , принятому в данной задаче равным 50;

$$u = \frac{\nu}{2r} R \quad (r \text{ — радиус цилиндров})$$

Последнее граничное условие удается удовлетворить, если величины p_s' и p_k'' вычислять по формулам

$$p_s' = \pi s / h_x, \quad p_k'' = \pi k / h_y$$

где s и k — целые числа. Было принято $s, k = 1, 2, 3$. Таким образом, в выражении (13) содержался 21 подложный определению коэффициент.

Функция ψ имела вид (4). В потоке было размещено 40 контрольных точек и на границах еще 30. На одно испытание некоторого случайного набора параметров C затрачивалось около 45 сек. Поиск начинался с положения, когда все C равны нулю. На фиг. 2 стрелками показано распределение функции тока, полученное после 70 испытаний (50 мин поиска). Сплошными линиями для сравнения показано распределение, полученное по методу сеток [2].

В третьей задаче рассматривается трансзвуковое течение через лопаточную решетку [4].

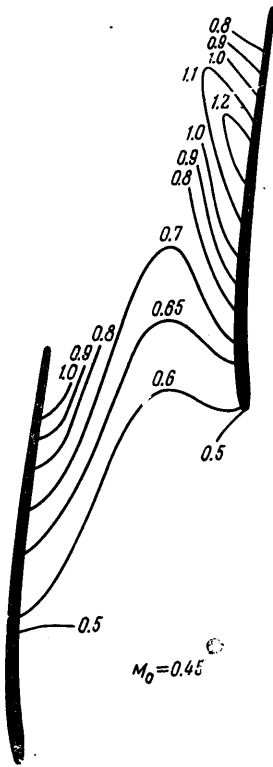
Процесс описывается уравнением

$$\begin{aligned} F = \left(1 - \frac{u_x^2}{a^2} \right) \psi_{,xx} - 2 \frac{u_x u_y}{a^2} \psi_{,xy} + \\ + \left(1 - \frac{u_y^2}{a^2} \right) \psi_{,yy} = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь ψ — функция потока; x, y — декартовы координаты.

Отношения составляющих скорости к местной скорости звука вычисляются по формулам

$$\frac{u_x}{a} = M_0 q^{-3} \psi_{,y}, \quad \frac{u_y}{a} = -M_0 q^{-3} \psi_{,x} \quad (15)$$



Фиг. 3. Распределение в межлопаточном пространстве линий $M = \text{const}$. Число Маха на входе 0.45

Здесь M_0 — число Маха в потоке перед решеткой, q — корень уравнения

$$q^6 - (1 + 1/3 M_0^2) q^5 + 1/3 M_0^2 (\psi_{,x^2} + \psi_{,y^2}) = 0 \quad (16)$$

При выводе (15) и (16) показатель адиабаты был принят равным $7/5$. Уравнение (16) имеет два корня. Один соответствует дозвуковому, а другой сверхзвуковому режиму течения.

Для упрощения вычислений была принята гипотеза об отсутствии в потоке ударных волн.

Приближенное решение отыскивалось в виде

$$\psi = \frac{gY}{g + C_1(1 + C_2|x|)(1 + C_3y)}$$

$$Y = C_4 + a_1x + a_2y + C_5(y - a_3x - a_4)^2 + C_6(y - a_3x - a_4)^3 + \frac{C_7a_5}{x^2 + y^2 + a_5}$$

$$g = -1 + (2x - a_6)^2 + (a_7 + a_8|x|)(y + a_9x^2)^2$$

Функция $g(x, y)$ обращается в нуль на контуре лопатки, т. е. уравнение $g = 0$ является уравнением профиля. Вне контура $g > 0$ и растет по мере удаления от лопатки.

Постоянные a_1, \dots, a_9 определяются типом лопаточной решетки и ее установкой в потоке. Параметры C , напротив, заранее не определены. Варьируя их, можно получить поля скорости самого различного вида. Задача состоит в отыскании таких значений этих параметров, при которых достигается наилучшая аппроксимация течения. Отметим, что обращение g в нуль на контуре лопатки автоматически обеспечивает равенство нулю нормальной к профилю составляющей скорости.

Выделив в потоке две средние линии тока над и под лопаткой, отстоящие друг от друга на расстоянии равном шагу решетки, потребуем, чтобы на этих линиях всюду была мала величина

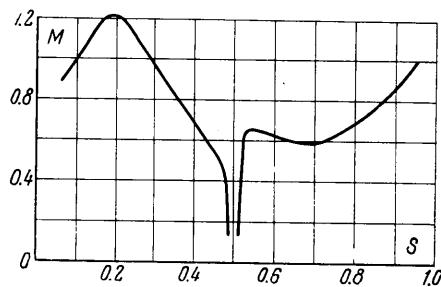
$$f = 1 - \frac{g(x, y)}{g(x, y) + C_1(1 + C_2|x|)(1 + C_3y)} \quad (17)$$

Только в этом случае поток будет удовлетворять условию периодичности, т. е. будет изображать течение именно в решетке, а не обтекание единичного профиля.

Уравнения указанных линий имеют вид

$$Y = \psi^+, \quad Y = \psi^- \quad (18)$$

Здесь ψ^+ и ψ^- — значения функции тока на этих линиях. Разность $\psi^+ - \psi^-$ равняется расходу через единичный канал. Величина Φ взята в виде (4). В нее входят невязки дифференциального уравнения (14) и граничного условия (17). В потоке размещено 40 контрольных точек и еще 20 на средних линиях тока (18). Минимизация выполнялась методом случайного поиска, на испытание некоторого случайного набора параметров C затрачивалось около 16 сек. Весь поиск продолжался около 45 мин. На фиг. 3, 4 приведено найденное распределение в межлопаточном пространстве линий $M = \text{const}$ и чисел M по контуру лопатки. Характер этих кривых типичен для распределений, получаемых при аэродинамических испытаниях трансзвуковых решеток [5, 6].



Фиг. 4. Распределение чисел M по контуру лопатки. Число Маха на входе 0,45

Поступило 26 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Растрингин Л. А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. Рига, «Зинатне», 1965.
2. Chi-Teh Wang. Variational method in the theory of compressible fluid. J. Aeronaut. Sci., 1948, vol. 15, No. 11, pp. 675—685.
3. Thom A., Apelt O. I. Field computations in engineering and physics. D. Van Nostrand, London, 1961.
4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
5. Алексеева Р. Н. Обтекание периферийных сечений длинных лопаток при дозвуковых скоростях на входе. Теплоэнергетика, 1966, № 5.
6. Жуковский М. И., Скнар Н. А., Гукасова Е. А., Михайлова В. А., Новикова О. И. Аэродинамические характеристики профилей лопаток последних ступеней турбины типа К-300-240 ЛМЗ. Энергомашиностроение, 1962, № 10.