ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР, 1965.
2. Wen-Hwa Chu. Fuel Sloshing in a Spherical Tank Filled to an Arlitrary Depth. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11 (Рус. перев.: «Ракетн. техн. и космонавтика, 1964, № 11.)
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
4. Dodge F. T., Kana D. D., Abramson H. N. Liquid Surface Oscillations in Longitudially. Excited Rigid Cylindrical Containers. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 4. (Рус. перев.: Ракетн. техн. и космонавтика, 1965, № 4, стр. 139).

ОБ УЧЕТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ В ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В U-ОБРАЗНОЙ КРУГЛОЙ ТРУБКЕ

Т. М. АБРАМОВИЧ, А. Е. КРАВЧЕНКО

(*Таганрог*)

Дан вывод уравнения свободных колебаний столба жидкости в U-образной круглой трубке с учетом силы поверхностного натяжения. Отмечено удовлетворительное согласие результатов теоретической оценки собственных частот колебаний с данными эксперимента.

В [1–3] изложена теория колебаний тяжелой вязкой жидкости в U-образной круглой трубке без учета поверхностных эффектов. Исследования Хюц [4, 5] по колебаниям ртутных столбов и данные наших экспериментов, выполненных с дистиллированной водой и растворами глицерина различной концентрации, указывают на необходимость внесения в уравнение колебаний добавочной силы, связанной с искривлением свободной поверхности столба жидкости при его движении.

Пусть r, θ, z — цилиндрические координаты любой точки столба жидкости; ось Oz совпадает с осью движения и осью трубки. Выделим в одном из вертикальных колен U-образной трубки внутреннего радиуса r_0 цилиндрический слой жидкости длиной L и радиусами r и $r + dr$. Обозначим через z координату отклонения свободной поверхности от равновесного положения.

При движении выделенного цилиндрического слоя жидкости, помимо гидростатической f_g и вязкой f_v сил

$$f_g = 2\rho g z 2\pi r\, dr, \qquad f_v = \eta \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

вследствие деформации свободной поверхности появляется дополнительная сила. Рассмотрим на свободной поверхности часть площади, «вырезаемую» цилиндрическим слоем dr. К каждому элементу длины окружностей r и $r + dr$ приложены силы поверхностного натяжения. Принимая кривизну поверхности мениска малой, имеем для z-компонент силы по периметру окружности радиуса r выражение

$$f_z^r = \alpha 2\pi r \sin\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\partial z}{\partial r} \right) \tag{1}$$

Приближенно можно считать, что

$$f_z^r \approx \alpha 2\pi r \frac{\partial z}{\partial r} \tag{2}$$

Подобным образом по периметру окружности $r + dr$ действует составляющая

$$f_z^{r+dr} = \alpha 2\pi (r + dr) \frac{\partial z}{\partial r}\Big|_{r+dr} = \alpha 2\pi (r + dr) \left(\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 r} d^r \right) \tag{3}$$

Вследствие несжимаемости жидкости можно считать сумму ординат менисков в коленах трубочки постоянной ($z_1 + z_2 = L$), т. е. фазы силы в коленах трубочки будут противоположны.

Учитывая (2), (3) и приведенное выше допущение, находим с точностью до членов второго порядка выражение для z-компоненты силы поверхностного натяжения

$$f_\alpha = 2\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial z}{\partial r} \right) 2\pi r\, dr \tag{4}$$

Таблица 1

			r_0	L	ω_s^2	Ω	β_1^2
$\rho = 0.988$	0%	+	0.389	24.2	81.0	35.8	0.03
$\nu = 0.0108$				225.2	8.7	3.8	0.03
$\alpha = 72.9$							
		+	2.39	30.3	64.5	4.9	0.005
				240.4	8.2	0.61	0.005
		—	1.01	29.2	67.1	28.9	0.03
				235.6	8.3	3.6	0.03
$\rho = 1.075$	31%	+	1.026	30.0	65.5	23.9	0.04
$\nu = 0.0224$				243.2	8.1	2.9	0.04
$\alpha = 70.0$		+	2.39	33.2	52.0	4.5	0.01
				237.5	8.2	0.63	0.01
$\rho = 1.140$	55%	+	1.026	24.5	81.0	26.4	0.15
$\nu = 0.0706$				243.0	8.1	2.6	0.15
$\alpha = 67$		—	1.01	46.8	42.0	14.5	0.20
				155.3	12.7	4.3	0.20
$\rho = 1.180$	≈70%	+	1.026	29.2	67.2	21.0	0.40
$\nu = 0.1997$				243.2	8.1	2.5	0.40
$\alpha = 66.0$							

Учитывая, что давление на торцах колен трубочки равно атмосферному (вследствие $p_1 - p_2 = 0$), запишем уравнение движения столба жидкости

$$-2\rho g z 2\pi r\,dr + \eta \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)2\pi L\,dr + 2\alpha \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)2\pi r\,dr = \rho L \frac{\partial v}{\partial t}2\pi r\,dr \tag{5}$$

Здесь v — скорость жидкости в рассматриваемом слое, z — координата отклонения свободной поверхности от равновесного положения, ρ — плотность, η — коэффициент динамической вязкости, α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, g — ускорение силы тяжести. После преобразований находим

$$\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial t}\right) + \frac{2\alpha}{\rho L}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{2g}{L}z \tag{6}$$

Решение уравнения (6) ищем в форме

$$z_n = R_n(r)T_n(t) \tag{7}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$z(r,\ 0) = A_0, \qquad \dot z(r,\ 0) = 0, \qquad \dot z(r_0,\ t) = 0 \tag{8}$$

Выполняя разделение переменных в уравнении (6), находим

$$\frac{1}{R}\left(\ddot R + \frac{1}{r}\dot R\right) = \frac{\ddot T + \omega_0^2 T}{\dot T + 2\alpha/\rho L T} = -R_n^2 \tag{9}$$

$$\ddot R + \frac{1}{r}\dot R + k_n^2 R = 0$$

$$\ddot T + \nu k_n^2 \dot T + (\omega_0^2 + \omega_s^2 r_0^2 k_n^2)\,T = 0 \tag{10}$$

Введем параметры

$$\omega_0^2 = \frac{2g}{L}, \qquad \omega_s^2 = \frac{2\alpha}{\rho L r_0^2} \tag{11}$$

Таблица 2

			r_0	L	T_1^0	T_1^α	T_+	T_-
$\rho = 0.998$, $\nu = 0.0108$, $\alpha = 72.9$	0%	+	0.989	24.2	0.67	0.58	0.58	0.65
				40.4	0.90	0.75	0.74	0.82
				76.9	1.25	1.04	1.08	1.07
				114.4	1.52	1.27	1.30	1.32
				151.8	1.74	1.46	1.66	1.50
				188.5	1.94	1.62	1.82	1.70
				225.2	2.13	1.78	2.22	2.08
		+	2.39	30.3	0.78	0.74	0.72	0.66
				54.9	1.05	1.01	0.99	0.90
				81.4	1.27	1.23	1.24	1.05
				129.0	1.61	1.56	1.48	1.22
				240.4	2.20	2.12	2.08	1.70
		−	1.01	29.2	0.75	0.64	0.68	0.53
				54.6	1.04	0.88	1.04	0.72
				81.7	1.28	1.07	1.25	0.91
				135.0	1.65	1.38	1.63	1.10
				190.2	1.96	1.64	1.92	1.30
				235.6	2.18	1.82	2.10	1.52
$\rho = 1.075$, $\nu = 0.0224$, $\alpha = 70.0$	31%	+	1.026	30.0	0.77	0.66	0.74	0.65
				40.3	0.90	0.77	0.91	0.70
				56.5	1.06	0.91	1.08	0.97
				81.7	1.28	1.10	1.28	1.18
				133.8	1.64	1.41	1.61	1.40
				243.2	2.21	1.90	2.17	1.83
		+	2.39	33.3	0.82	0.78	0.75	0.67
				50.9	1.01	0.98	0.90	0.83
				65.4	1.15	1.11	1.07	0.96
				81.2	1.27	1.24	1.20	1.08
				129.3	1.61	1.56	1.53	1.30
				237.6	2.18	2.12	2.13	1.75
$\rho = 1.140$, $\nu = 0.0706$, $\alpha = 67.0$	55%	+	1.026	24.5	0.70	0.61	0.70	0.65
				30.2	0.78	0.68	0.77	0.71
				39.1	0.88	0.77	0.87	0.81
				53.9	1.04	0.90	1.08	1.00
				80.1	1.27	1.10	1.30	1.15
				128.4	1.61	1.39	1.66	1.48
				243.0	2.20	1.93	2.28	1.96
		−	1.01	46.8	0.96	0.84	0.96	0.73
				66.0	1.15	0.99	1.15	0.89
				104.8	1.45	1.25	1.46	1.10
				155.3	1.76	1.53	1.83	1.36
$\rho = 1.180$, $\nu = 0.1997$, $\alpha = 66.0$	70%	+	1.026	29.2	0.76	0.67	0.77	0.66
				39.1	0.88	0.77	0.88	0.76
				53.5	1.01	0.90	1.05	0.99
				79.4	1.23	1.10	1.34	1.24
				130.7	1.62	1.41	1.72	1.64
				243.2	2.21	1.93	2.44	2.27

отвечающие характерным частотам колебаний. Уравнения (10) разрешаются в функциях Бесселя первого рода нулевого порядка. Имеем общее решение уравнения (6) в виде

$$z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n z) \exp^{-\beta_n t} [A_{n\,\mathrm{ch}}^{\ \cos} \omega_n t + B_{n\,\mathrm{sh}}^{\ \sin} \omega_n t] \qquad \left(\beta_n = \frac{\nu k_n^2}{2}\right) \tag{12}$$

Собственные частоты столба

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_S^2 r_0^2 k_n^2 - \beta_n^2} \qquad \left(k_n = \frac{x_n}{r_0}\right) \tag{13}$$

где x_n n-й корень уравнения $I_0(x_n) = 0$.

Из условий (8) находим выражения для коэффициентов разложения (12)

$$A_n = \frac{A_0 I_1}{I_2} = \frac{2A_0}{x_n J_1(x_n)} \tag{14}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{\omega_n} A_n, \quad I_1 = \int_0^{r_0} r J_0(k_n r)\, dr, \quad I_2 = \int_0^{r_0} [J_0(k_0 r)]^2\, dr \tag{15}$$

Расчеты показали, что добавочное слагаемое $\omega_s^2 r_0^2 k_n^2$ в формуле (13) того же порядка, что и собственная частота ω_0^2, а значения фактора затухания β_n^2 малы вследствие малых величин кинематической вязкости. При этом, как и в работах [2, 3], за период колебательного процесса принимали период первой гармоники ряда (12), т. е. $T_1 = 2\pi / \omega_1$.

Укажем размерности для приводимых ниже величин: $\rho[г/см^{-3}]$, $\nu[см^2 сек^{-1}]$, $\alpha\, [дн/см^{-1}]$, $r_0\, [см]$, $L\, [см]$, $T\, [сек]$.

В табл. 1 приведены значения величин ω_0^2, $\omega_s^2 r_0^2 k_1^2$, β_1^2 из формулы (13), рассчитанные для растворов глицерина различной концентрации в дистиллированной воде при разных длинах столбов исследуемых жидкостей.

В табл. 2 для тех же растворов приведены расчетные (T_1°, T_1^α) и экспериментальные значения периода колебаний (T_+ — начало колебаний, T_- — конец колебаний в *сек*). В таблицах приведены также физические и геометрические характеристики столбов жидкости; знаками плюс и минус обозначаются случаи смачивания и несмачивания соответственно

$$\omega_0^2 = 2g / L, \qquad \Omega^2 = \omega_s^2 r_0^2 k_1^2 = 2\alpha x_1^2 | \rho L r_0^2, \qquad \beta_1^2 = \nu x_1^2 / 2r_0^2$$

Как следует из работ [4, 5], влияние поверхностных сил для ртутных столбов особенно сказывается при средних и малых текущих амплитудах, т. е. в конце колебательного процесса. В проведенных экспериментах, выполненных с жидкостями, у которых α значительно меньше, чем у ртути, значения периода колебаний, вычисленные с учетом поверхностного натяжения (T_1^α), лучше совпадают с экспериментальными значениями периода конца колебаний для трубок $r_0 \approx 1$ *см* как для смачивающих, так и для несмачивающих жидкостей; для трубок $r_0 = 2.39$ *см* такое согласование имеет место на начальном участке колебаний.

Вместе с тем надлежит отметить заметные расхождения с экспериментальными данными при оценке параметров затухания, особенно в начале процесса. т. е. при значительных амплитудах колебаний: на этом участке происходит натекание и стекание жидкости со стенки трубы. Этот процесс налагается на колебания центрального столба, существенно ускоряя диссипацию энергии колебаний, поэтому второе граничное условие (8) в начальной фазе колебаний не будет отвечать реальной картине движения. Очевидно также влияние краевых углов и изменения формы свободной поверхности мениска при увеличении радиуса трубы на характер колебаний. Для более точного описания процесса необходим учет роли высших гармоник ряда (13).

Авторы благодарят А. Г. Смирнову за постановку задачи, замечания и советы.

Поступило 14 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Christopherson D. G., Gemant A. H. A., Hogg A., Southwell R. V. Oscillatory motion of a fluid along, a circular tube. Proc. Roy. Soc. London, 1938, vol. 168, pp. 351—378.
2. Valensi G. et Vogel Th. Le meuvement oscillatoire libre d'un liquide pesant et visqueux dans un tube en *U*. Publ. Sc. Tech. du Ministere de l'Air. 1948, No. 212.
3. Clarion C. Mouvement oscillatore avec viscosité et inertie. Publ. Sc. Tech. du Ministère de l'Air, 1955, No. 303.
4. Huetz A. et Huetz J. Oscillation du morsure dans un tube en *U*. Influence de la capillarité. C. R. Acad. Sci., Paris, 1954, vol. 238, No. 7, pp. 768—770.
5. Huetz A., Huetz J. Oscillation du mercure dans un tube en *U*. Examen des resultats experimentaux. C. R. Acad. Sci., 1954, vol. 239, No. 4, pp. 1587—1589.