

Для вычисления собственных значений матрицы применялся ортогонально-степенной метод [7], использованный ранее [8] для нахождения спектра возмущений плоско-параллельного течения Куэтта. Спектры нижних декрементов для  $a = 2$ ; 1.7 представлены соответственно на фиг. 2 и 3. Как видно из графиков, в данной задаче возможны как монотонные (с вещественными декрементами), так и колебательные возмущения, осциллирующие с частотой  $\omega = \text{Im}(\lambda)$ . Образованию колебательных возмущений предшествует слияние при некотором  $R = R_*$  двух вещественных декрементов, переходящих при  $R > R_*$  в пару комплексно-сопряженных. Для  $a = 2$  комплексные пары образуются при слиянии декрементов разного ( $\mu$ ) и ( $\nu$ ) типов, а для  $a = 1.7$  при слиянии декрементов одного ( $\nu$ ) типа. Как для  $a = 2$ , так и для  $a = 1.7$  ни один из декрементов не пересекает ось  $\text{Re} \lambda = 0$ , т. е. монотонные и колебательные возмущения затухают, так что стационарное движение (1.3) в рассмотренном интервале чисел Рейнольдса устойчиво.

Учет несимметричных возмущений не приводит к изменению спектра декрементов, так как матрица (2.3) в этом случае факторизуется и, следовательно, несимметричные возмущения можно рассматривать отдельно.

Автор благодарит М. И. Шлиомиса за обсуждение результатов.

Поступило 10 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
2. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критического числа Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
3. Якушин В. И. О стационарном движении вязкой жидкости в шаровом слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, вып. 2.
4. Якушин В. И. О стационарном движении вязкой жидкости между двумя сферическими поверхностями. Уч. зап. Пермского ун-та, сб. «Гидродинамика», 1968.
5. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Якушин В. И. О спектре малых возмущений движения жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
7. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
8. Бирх Р. В. О спектре малых возмущений плоско-параллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.

### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

В. С. ГОНТКЕВИЧ, Л. А. ИЩЕНКО

(Харьков)

Собственные линейные колебания идеальной жидкости в сферическом сосуде исследованы в ряде работ [1, 2], причем удалось получить приближенное решение в основном для первой антисимметричной формы. В данной работе при помощи метода Ритца исследована наиболее интересная для практических приложений низкочастотная часть спектра собственных колебаний идеальной жидкости в сферическом сосуде при произвольном уровне заполнения. Применение метода Ритца является обычным при исследовании колебаний идеальной жидкости в сосудах и подробно описано в ряде работ [4], поэтому здесь целесообразно изложить только результаты исследования.

*Случай мелкого сосуда.* Отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния ищется в виде разложения в ряд по собственным функциям параболического сосуда [3]

$$\eta_m(r, \theta) = \sum_j A_j \xi_j(r, \theta) \quad (1)$$

Для симметричных форм колебаний  $j = 2, 3, 4, \dots$

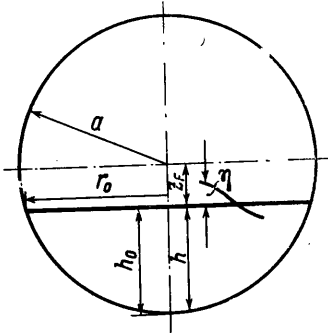
$$\xi_j(r) = A_0 \left\{ 1 - j \frac{(j-1)}{1^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{(j+1)(j-1)(j-2)}{1^2 \cdot 2^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^4 - \dots \right\} \quad (2)$$

Для несимметричных форм колебаний  $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\xi_j(r, \theta) = \xi_j(r) \cos n\theta \tag{3}$$

$$\xi_j(r) = A_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \left\{ 1 - \frac{(j-1)(n+j)}{n+1} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{(j-2)(j-1)(n+j)(n+j+1)}{2(n+1)(n+2)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 - \dots \right\}$$

Здесь  $j-1 = 1, 2, 3, \dots$  — номер формы колебаний (число узловых окружностей),  $r_0$  — радиус свободной поверхности,  $A_j$  — амплитудные коэффициенты,  $n$  — число узловых диаметров. Расчет был выполнен на ЭВМ «Урал-2», причем к ряду (1) учитывалось пять членов.



Фиг. 1

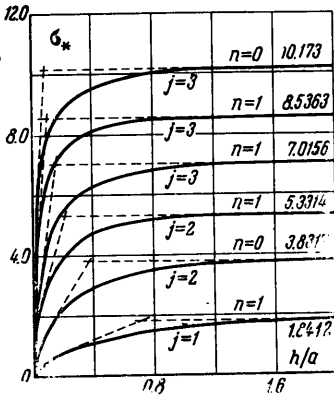
В результате вычислений были определены частотные параметры  $\sigma^* = \sigma^2 r_0 / g$ ,  $\sigma_* = \sigma \sqrt{a} / g$  и коэффициенты  $A_j$ , причем  $\sigma$  — частота колебаний,  $g$ ;  $a$  — радиус сферы;  $g$  — ускорение земного тяготения;  $z_F = a - h_0$ ,  $z = z_F / a$  (фиг. 1–5).

При учете одного члена ряда (1) нетрудно получить формулы для непосредственного расчета упомянутых параметров. Для симметричных колебаний при  $j = 2$

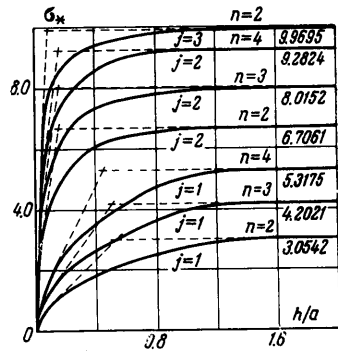
$$\sigma^* = 24 \frac{h_0}{r_0} \left\{ 1 + \frac{a}{h_0} \left\{ \left[ \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} + \frac{2}{15} \right] \left( \frac{2a^2}{r_0^2} - 1 \right) \right\} \right\}$$

при  $j = 3$

$$\sigma^* = \frac{120 h_0}{r_0} \left\{ 1 + \frac{a}{h_0} \left[ \frac{4}{9} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{7} \left( 12 - 4 \frac{r_0^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} + \frac{1}{5} \left( 12 - 8 \frac{r_0^2}{a^2} + \frac{r_0^4}{a^4} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{3} \left( 4 - 4 \frac{r_0^2}{a^2} + \frac{r_0^4}{a^4} \right) \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} + \frac{64}{315} - \frac{32 r_0^2}{105 a^2} + \frac{2 r_0^4}{15 a^4} \right] 12 \left( \frac{a}{r_0} \right)^8 - 1 \right\} \tag{4}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Для несимметричных колебаний при  $n = 1, j = 1$

$$\sigma^* = 4 \frac{h_0}{r_0} \left\{ 1 - \frac{a}{h_0} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} \right\} - 1 \right] \right\}$$

при  $j = 2$

$$\sigma^* = 56 \frac{h_0}{r_0} \left\{ 1 + \frac{a}{h_0} \left\{ \frac{4}{7} \left( \frac{a}{r_0} \right)^6 \left\{ - \frac{45}{14} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{7/2} + \left( 9 - \frac{12 r_0^2}{5 a^2} \right) \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left( - \frac{15}{2} + 4 \frac{r_0^2}{a^2} - \frac{2 r_0^4}{3 a^4} \right) \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^3 + \frac{12}{7} - \frac{8 r_0^2}{5 a^2} + \frac{2 r_0^4}{3 a^4} \right\} - 1 \right\} \right\}$$

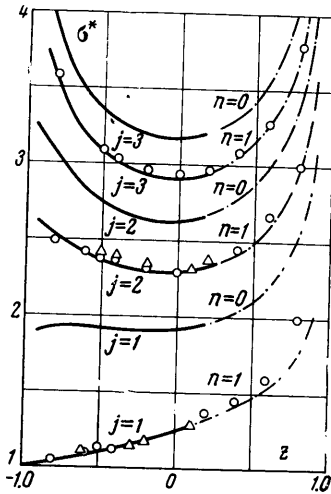
при  $n = 2, j = 1$

$$\sigma^* = 12 \frac{h_0}{r_0} \left\{ 1 + \frac{a}{h_0} \left[ 4 \frac{a^4}{r_0^4} \left( \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{5/2} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} + \frac{2}{15} \right) - 1 \right] \right\}$$

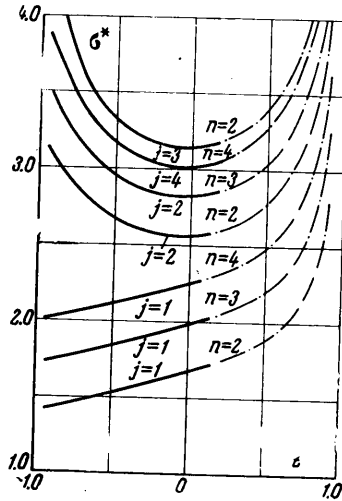
при  $n = 3, j = 1$

$$\sigma^* = 24 \frac{h_0}{r_0} \left\{ 1 - \frac{a}{h_0} \left[ 6 \frac{a^6}{r_0^6} \left\{ -\frac{1}{7} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{7/2} + \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{5/2} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{3/2} + \frac{8}{105} \right\} - 1 \right] \right\} \quad (5)$$

Здесь  $h_0$  — наибольшая глубина жидкости. Из сравнения данных фиг. 2—5 и формул (4), (5) видно, что процесс вычисления сходится быстро.



Фиг. 4



Фиг. 5

*Случай глубокого сосуда.* В качестве координатных функций в этом случае целесообразно использовать собственные функции глубокого кругового цилиндрического сосуда

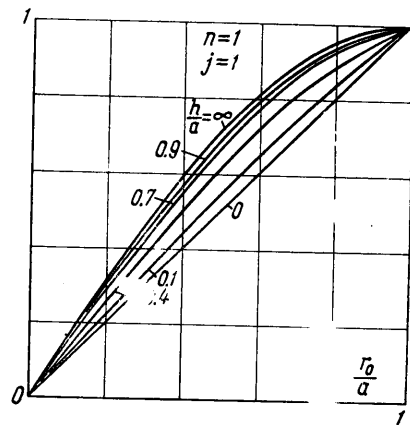
$$\eta_r(r, \theta) = J_n(k_j r) \cos n\theta$$

Здесь  $k_j r_0$  — корень уравнения  $J_n'(k_j r_0) = 0$ , представляющего собой условие равенства нулю компоненты скорости, нормальной стенке. Для сферического сосуда это уравнение становится неверным, когда заполнение сосуда близко к полному, однако, как видно из фиг. 4—5, его можно приближенно использовать даже при отношении глубины заполнения к диаметру сосуда, равном 0.9. Таким образом, для глубокого сферического сосуда

$$\sigma^* = k_j r_0$$

*Случай произвольной глубины.* Форму колебаний здесь целесообразно представить в виде комбинации форм колебаний для глубокой и мелкой воды

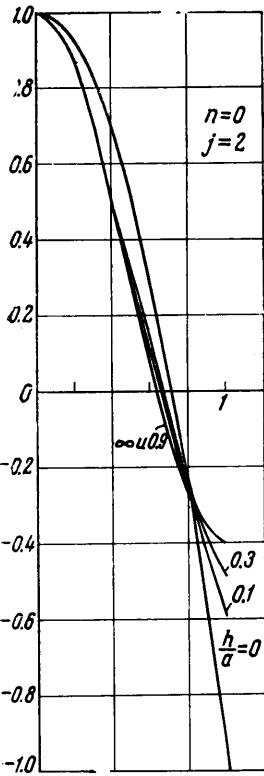
$$\eta(r, \theta) = A\eta_M(r, \theta) + B\eta_r(r, \theta)$$



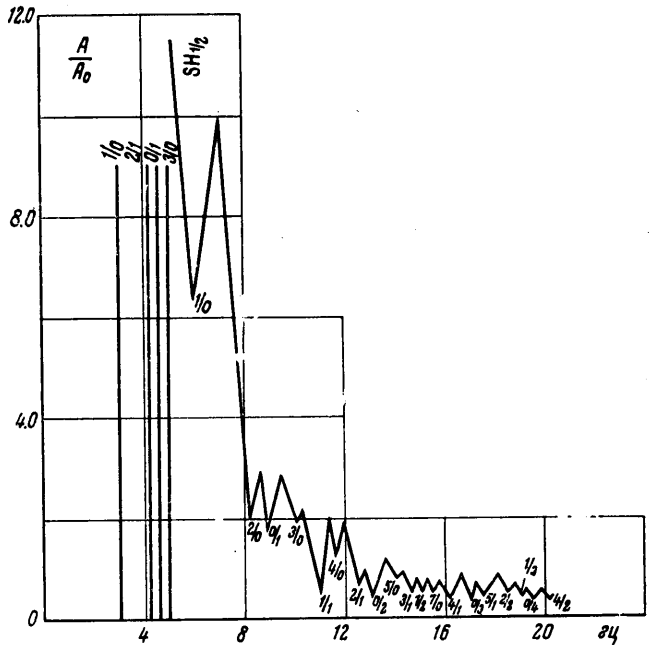
Фиг. 6

Результаты вычисления частотных параметров  $\sigma^*$ ,  $\sigma_*$  на ЭВМ «Урал-2» вместе с данными для глубокого и мелкого сосуда приведены для нескольких форм на-

Фиг. 2—5. В процессе расчета в каждом случае вычислялась также форма колебаний свободной поверхности жидкости. Эволюция двух низших (симметричной и антисимметричной) форм колебаний жидкости при изменении глубины заполнения показана в качестве примера на фиг. 6 и 7.

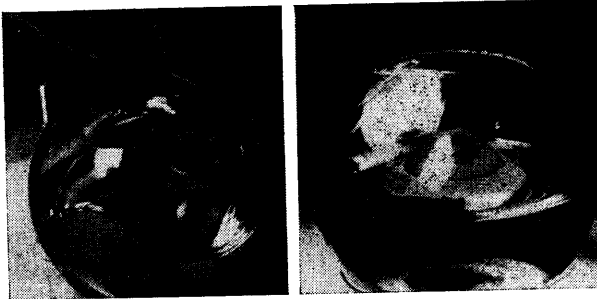


Фиг. 7



Фиг. 8

ной возмущающей силы в сферическом сосуде диаметром  $2a = 83$  мм. При этом, разумеется, прежде всего были получены сильные субгармонические колебания жидкости, происходящие с половинной частотой. Границы областей неустойчивости



Фиг. 9

для колебаний этого вида приведены на фиг. 8 (формы обозначены отношением  $n/j - 1$ ). Были обнаружены также более слабые гармонические колебания. Соответствующие им резонансы отмечены на фиг. 8 линиями. Для иллюстрации явления приведены фотографии низших форм колебаний жидкости (0/1 и 2/0) (фиг. 9). Теоретические значения частоты хорошо совпадают с экспериментальными, как легко видеть из сравнения данных, приведенных на фиг. 2—5, 8. Весьма показательным

является также совпадение теоретических значений частотного параметра  $\sigma_*$  с экспериментальными данными, заимствованными из работы [2] (обозначены точками на фиг. 4).

Поступило 13 I 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР, 1965.
2. Wen-Hwa Chu. Fuel Sloshing in a Spherical Tank Filled to an Arbitrary Depth. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11 (Рус. перев.: «Ракетн. техн. и космонавтика», 1964, № 11.)
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
4. Dodge F. T., Kana D. D., Abramson H. N. Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 4. (Рус. перев.: Ракетн. техн. и космонавтика, 1965, № 4, стр. 139).

### ОБ УЧЕТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ В ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В U-ОБРАЗНОЙ КРУГЛОЙ ТРУБКЕ

Т. М. АБРАМОВИЧ, А. Е. КРАВЧЕНКО

(Таганрог)

Дан вывод уравнения свободных колебаний столба жидкости в U-образной круглой трубке с учетом силы поверхностного натяжения. Отмечено удовлетворительное согласие результатов теоретической оценки собственных частот колебаний с данными эксперимента.

В [1-3] изложена теория колебаний тяжелой вязкой жидкости в U-образной круглой трубке без учета поверхностных эффектов. Исследования Хюэ [4, 5] по колебаниям ртутных столбов и данные наших экспериментов, выполненных с дистиллированной водой и растворами глицерина различной концентрации, указывают на необходимость внесения в уравнение колебаний добавочной силы, связанной с искривлением свободной поверхности столба жидкости при его движении.

Пусть  $r, \theta, z$  — цилиндрические координаты любой точки столба жидкости; ось  $Oz$  совпадает с осью движения и осью трубки. Выделим в одном из вертикальных колен U-образной трубки внутреннего радиуса  $r_0$  цилиндрический слой жидкости длиной  $L$  и радиусами  $r$  и  $r + dr$ . Обозначим через  $z$  координату отклонения свободной поверхности от равновесного положения.

При движении выделенного цилиндрического слоя жидкости, помимо гидростатической  $f_g$  и вязкой  $f_v$  сил

$$f_g = 2\rho g z 2\pi r dr, \quad f_v = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

вследствие деформации свободной поверхности появляется дополнительная сила. Рассмотрим на свободной поверхности часть площади, «вырезаемую» цилиндрическим слоем  $dr$ . К каждому элементу длины окружностей  $r$  и  $r + dr$  приложены силы поверхностного натяжения. Принимая кривизну поверхности мениска малой, имеем для  $z$ -компонент силы по периметру окружности радиуса  $r$  выражение

$$f_z r = \alpha 2\pi r \sin \left( \arctg \frac{\partial z}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Приближенно можно считать, что

$$f_z r \approx \alpha 2\pi r \frac{\partial z}{\partial r} \quad (2)$$

Подобным образом по периметру окружности  $r + dr$  действует составляющая

$$f_z^{r+dr} = \alpha 2\pi (r + dr) \frac{\partial z}{\partial r} \Big|_{r+dr} = \alpha 2\pi (r + dr) \left( \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr \right) \quad (3)$$

Вследствие несжимаемости жидкости можно считать сумму ординат менисков в коленах трубочки постоянной ( $z_1 + z_2 = L$ ), т. е. фазы силы в коленах трубочки будут противоположны.

Учитывая (2), (3) и приведенное выше допущение, находим с точностью до членов второго порядка выражение для  $z$ -компоненты силы поверхностного натяжения

$$f_a = 2\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial z}{\partial r} \right) 2\pi r dr \quad (4)$$