

## О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМСЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ

В. И. ЯКУШИН (Пермь)

Известно [1], что движение жидкости, заполняющей пространство между двумя вращающимися сферическими поверхностями, не может быть определено аналитически в замкнутом виде. Для приближенного решения этой задачи, представляющей интерес с точки зрения теории гидродинамической устойчивости [2], ранее был использован метод Галеркина с базисом из 12 собственных функций задачи о возмущениях равновесия жидкости в шаровом слое. Так было найдено стационарное течение, возникающее в случае, когда одна из сфер (внутренняя [3] или внешняя [4]) вращается, а другая покоится. Ниже этим же методом рассмотрено стационарное движение жидкости в шаровом слое, когда обе сферы вращаются с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг общей оси

$$\Omega_1 = -\Omega_2 = n\Omega \quad (n^2 = 1)$$

Полученное стационарное движение исследуется на устойчивость по отношению к малым возмущениям. Вычисления проводились для двух отношений радиусов сфер  $r_2/r_1 = 2; 1.7$ .

**1. Стационарное течение.** Выберем в качестве единиц длины и скорости радиус внутренней сферы  $r_1$  и  $\Omega r_1$ . Тогда уравнения стационарного движения и граничные условия примут вид

$$\mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U} + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{U} + \nabla p = 0, \quad \text{div } \mathbf{U} = 0 \quad (R = \Omega \cdot r_1^2 / \nu) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{U}|_{s_1} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{U}|_{s_2} = -a\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0 \quad (r_0^2 = 1) \quad (1.2)$$

Здесь  $R$  — число Рейнольдса и  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

Следуя методу, изложенному в [3, 4], будем искать решение краевой задачи (1.1), (1.2) в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{W} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{a^3 - 1} \left( 2 \frac{a^3}{r^3} - a^3 - 1 \right) \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{l=0}^1 \sum_{i=1}^3 C_{2l+1}^i \mathbf{u}_{2l+1}^i + \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^5 C_{2l}^i \mathbf{v}_{2l}^i \quad (1.4)$$

Функция  $\mathbf{V}$  удовлетворяет неоднородным граничным условиям (1.2) и является решением сформулированной выше краевой задачи при  $R \rightarrow 0$  [1]. Базисные функции  $\mathbf{u}(r, \nu)$  и  $\mathbf{v}(r, \nu)$  есть собственные функции задачи о возмущениях равновесия жидкости в неподвижном шаровом слое [5, 6].

Решение задачи сводится к вычислению коэффициентов  $C_n^m(R)$ . Для нахождения  $C_n^m$  метод Бубнова — Галеркина приводит к системе 12 нелинейных алгебраических уравнений, которая решалась итерационным методом. Используемый метод позволил получить сходящиеся решения в интервале чисел Рейнольдса  $0 < R < 33$  для  $a = 2$  и  $0 < R < 81$  для  $a = 1.7$ .

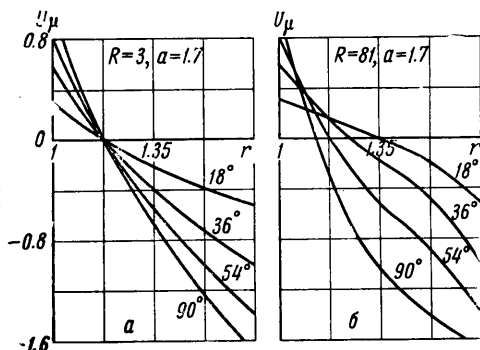
Стационарное течение  $\mathbf{U}$  можно представить в виде суммы «азимутальной»  $\mathbf{U}_n$  и «меридиональной»  $\mathbf{U}_m$  частей.

При малых числах Рейнольдса движение жидкости в меридиональной плоскости происходит примерно так же, как при вращении одной внешней сферы [4], т. е. вблизи плоскости экватора жидкость движется от внешней сферы к внутренней, а вблизи полюсов — от внутренней к внешней. По сравнению с [4], линии тока несколько сдвинуты к внешней сфере. С ростом  $R$  это смещение увеличивается, около полюсов образуется застойная область, в которой у поверхности внутренней сферы зарождается второй вихрь с направлением вращения, противоположным первому. Смещение первого вихря к внешней сфере и образованию застойной области можно дать следующее качественное объяснение: при вращении внутренней сферы возникают направленные от оси вращения центробежные силы, которые «отжимают» линии тока к внешней сфере.

Следует заметить, что образование второго вихря является результатом развития основного стационарного движения и не может рассматриваться как возникновение нового стационарного течения, т. е. в точке  $R_0 = 79$  не происходит смены устойчивости. Как будет показано ниже, основное движение устойчиво во всем исследованном интервале чисел Рейнольдса.

Для отношения радиусов  $a = 2$  линии тока слабо деформируются с увеличением  $R$  и образованием второго вихря при  $R < 33$  не происходит.

На фиг. 1, а, б представлены графики скорости азимутального движения  $U_\mu$  при фиксированных значениях угла  $\nu$ . При всех числах Рейнольдса для  $U_\mu$



Фиг. 1

имеется узловая поверхность. Для малых  $R$  это поверхность сферы  $r = \text{const}$ , при больших  $R$  — поверхность эллипсоида вращения.

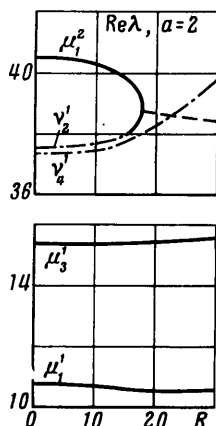
**2. Устойчивость стационарного движения.** Исследуем устойчивость полученного течения по отношению к малым возмущениям скорости  $u$  и давления  $p$ . Выберем единицы длины  $r_1$ , скорости  $\nu/r_1$  и времени  $r_1^2/\nu$ . Положив,  $u, p \sim \exp(-\lambda t)$ , получим для амплитуд нормальных возмущений стационарного течения  $U(R)$  уравнения [2]

$$-\lambda u + \nabla p + \text{rot rot } u + (\nabla \nabla) u + (u \nabla) U = 0 \quad (2.1)$$

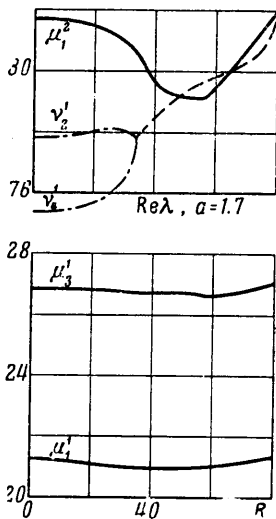
$$\text{div } u = 0 \quad u|_{s_1, s_2} = 0$$

Исследование устойчивости сводится к вычислению декрементов  $\lambda$ . Стационарное движение устойчиво, если  $\text{Re } \lambda > 0$ .

Рассмотрим устойчивость движения (1.3) по отношению к возмущениям, симметричным относительно плоскости экватора, т. е. той же симметрии, что и стационарное течение. Потеря устойчивости по отношению к несимметричным возмущениям связана с перетеканием жидкости через плоскость экватора, что маловероятно при тех сравнительно небольших числах Рейнольдса, для которых известно



Фиг. 2



Фиг. 3

стационарное течение. Краевую задачу (2.1) можно решать методом Бубнова — Галеркина. Положим

$$u = \sum_{l=0}^i \sum_{i=1}^3 \alpha_{2l+1}^i \mu_{2l+1}^i + \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^3 \beta_{2l}^i \nu_{2l}^i \quad (2.2)$$

Задача (2.1) сводится к решению системы 12 линейных однородных алгебраических уравнений. Декременты  $\lambda$  определяются как собственные значения вещественной матрицы

$$\lambda_n^{(0)} \delta_m^n + H(R)_{m^n} \quad (2.3)$$

Здесь  $\lambda_n^{(0)}$  — декременты возмущений неподвижной жидкости [6], а  $H_m^n$  выражаются через интегралы, которые были вычислены при решении задачи (1.1) нахождения стационарного движения (1.3).

Для вычисления собственных значений матрицы применялся ортогонально-степенной метод [7], использованный ранее [8] для нахождения спектра возмущений плоско-параллельного течения Куэтта. Спектры нижних декрементов для  $a = 2$ ; 1.7 представлены соответственно на фиг. 2 и 3. Как видно из графиков, в данной задаче возмущения, осциллирующие с частотой  $\omega = \text{Im}(\lambda)$ . Образованию колебательных возмущений предшествует слияние при некотором  $R = R_*$  двух вещественных декрементов, переходящих при  $R > R_*$  в пару комплексно-сопряженных. Для  $a = 2$  комплексные пары образуются при слиянии декрементов разного ( $\mu$ ) и ( $\nu$ ) типов, а для  $a = 1.7$  при слиянии декрементов одного ( $\nu$ ) типа. Как для  $a = 2$ , так и для  $a = 1.7$  ни один из декрементов не пересекает ось  $\text{Re } \lambda = 0$ , т. е. монотонные и колебательные возмущения затухают, так что стационарное движение (1.3) в рассмотренном интервале чисел Рейнольдса устойчиво.

Учет несимметричных возмущений не приводит к изменению спектра декрементов, так как матрица (2.3) в этом случае факторизуется и, следовательно, несимметричные возмущения можно рассматривать отдельно.

Автор благодарит М. И. Шлиомиса за обсуждение результатов.

Поступило 10 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
2. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критического числа Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
3. Якушин В. И. О стационарном движении вязкой жидкости в шаровом слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, вып. 2.
4. Якушин В. И. О стационарном движении вязкой жидкости между двумя сферическими поверхностями. Уч. зап. Пермского ун-та, сб. «Гидродинамика», 1968.
5. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Якушин В. И. О спектре малых возмущений движения жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
7. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
8. Бирх Р. В. О спектре малых возмущений плоско-параллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.

### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

В. С. ГОНТКЕВИЧ, Л. А. ИЩЕНКО

(Харьков)

Собственные линейные колебания идеальной жидкости в сферическом сосуде исследованы в ряде работ [1, 2], причем удалось получить приближенное решение в основном для первой антисимметричной формы. В данной работе при помощи метода Ритца исследована наиболее интересная для практических приложений низкочастотная часть спектра собственных колебаний идеальной жидкости в сферическом сосуде при произвольном уровне заполнения. Применение метода Ритца является обычным при исследовании колебаний идеальной жидкости в сосудах и подробно описано в ряде работ [4], поэтому здесь целесообразно изложить только результаты исследования.

*Случай мелкого сосуда.* Отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния ищется в виде разложения в ряд по собственным функциям параболического сосуда [3]

$$\eta_M(r, \theta) = \sum_j A_j \xi_j(r, \theta) \quad (1)$$

Для симметричных форм колебаний  $j = 2, 3, 4, \dots$

$$\xi_j(r) = A_0 \left\{ 1 - j \frac{(j-1)}{1^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - \frac{(j+1)(j-1)(j-2)}{1^2 \cdot 2^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 - \dots \right\} \quad (2)$$