

4. Вероятно, следует выделить промежуточную область толщин слоя, заключающуюся в интервале $0.12 < \delta \leq 0.19$. В этой области критическое число Рейнольдса может быть достаточно четко отмечено по излому линии на графике (см. 4 на фиг. 1 и в таблице). При кризисе визуально наблюдается образование вихрей. Однако, линейная зависимость (3.1) в закритической области имеет место лишь в очень малом интервале чисел Рейнольдса. Угловой коэффициент этой зависимости значительно меньше, чем для более узких зазоров.

Выражаю глубокую благодарность Г. Ф. Шайдурову за содействие и поддержку.

Поступило 18 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Сорокин М. П., Хлебутин Г. Н., Шайдуров Г. Ф. Об устойчивости движения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПМТФ, 1966, № 6.
3. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 4, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
5. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
6. Haberman W. L. Secondary Flow about a Sphere Rotating in a Viscous Liquid inside a Coaxially Rotating Spherical Container. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5, p. 625—628; 1962, vol. 5, No. 9, p. 1336.
7. Taylor C. J. Stability of a Viscous Liquid contained between two Rotating Cylinders. Phys. Trans. Roy. Soc. (A), 1923, vol. 223, p. 289.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПО ТРУБЕ ИДЕАЛЬНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ

(Москва)

Известно, что работа технических устройств, в которых используются закрученные струи жидкости или газа, может сопровождаться возникновением автоколебаний. В статье на основе некоторых моделей движения невязкой несжимаемой жидкости рассмотрена устойчивость вращающегося потока по отношению к спиральным возмущениям. Опыты на модельных вихревых трубках показали, что в соответствии с расчетом наблюдается спиральная неустойчивость вихревого течения.

Пусть в круглой цилиндрической трубе имеет место не зависящее от продольной координаты z стационарное осесимметричное движение вращающейся жидкости ($\mathbf{U} = v_z \mathbf{k}_1 + v_\varphi \Phi_1$).

Рассмотрим устойчивость такого движения по отношению к малым возмущениям спирального типа $\exp j(\sigma t + kz + m\vartheta)$.

Из уравнения Эйлера для амплитуды радиальных колебаний $u(\bar{r})$ можно получить

$$\gamma^2 D_s D_3 u - u \left\{ \gamma^2 + \gamma r D \left[\frac{s}{r} \left(k D v_z + m \frac{D\Gamma}{r^2} \right) \right] - \frac{2k\Gamma s}{r^3} (k D \Gamma - m D v_z) \right\} = 0$$

$$u = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad \text{и при } r = R \quad (1)$$

$$\gamma = \sigma + k v_z + m \frac{\Gamma}{r^2}, \quad s = \frac{r^2}{m^2 + k^2 r^2}, \quad \Gamma = v_\varphi r, \quad D = \frac{d}{dr}, \quad D_* = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right)$$

При этом течение будет неустойчивым, если сформулированная задача на собственные значения имеет нетривиальные решения при $\text{Im } \sigma < 0$.

В связи со сложностью проблемы в настоящее время не существует аналитического решения уравнения (1) для какой-либо частной модели движения вращающегося потока в общем случае спиральных возмущений. В то же время в некоторых случаях такое решение может быть получено, если течение возмущается чисто продольными ($m = 0$) или чисто тангенциальными колебаниями ($k = 0$). Так, например, легко увидеть, что «кваситвердое» вращение жидкости ($v_\varphi = \omega_0 r$, $v_z = \text{const}$) устойчиво к возмущениям любого чистого типа, хотя и допускает существование в потоке нейтральных колебаний. При $m = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$r^2 \ddot{u} + r \dot{u} - u \left\{ 1 - k^2 r^2 \left[\frac{4\omega_0^2}{(\sigma + k\omega_0)^2} - 1 \right] \right\} = 0$$

и его решение

$$u = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad \text{и } r = R$$

$$u = CJ_A \left(kr \sqrt{\frac{4\omega_0^2}{(\sigma + k\omega_0)^2} - 1} \right)$$

Удовлетворяя условию $u = 0$ на стенке трубы, получаем после преобразований частоту нейтральных одномерных колебаний (α_i — корни функции Бесселя $I_1(z)$)

$$\sigma_r = -kv_z \pm \frac{2k\omega_0 R}{\sqrt{\alpha_i^2 + k^2 R^2}}$$

В случае $k = 0$ частота нейтральных колебаний будет равна $\sigma_r = m\omega_0$. Решение уравнения (1) при потенциальном вращении жидкости в трубе ($v_\varphi r = \Gamma_0$, $v_z = \text{const}$) также указывает на устойчивость подобного течения.

Таким образом, те относительно простые модели движения, которые допускают интегрирование исходного дифференциального уравнения, мало что дают для понимания природы и установления пределов гидродинамической устойчивости закрученного потока. Известного прогресса в этом можно добиться после нахождения достаточных условий устойчивости. В работе [1] на основании анализа уравнения (1) исследовалось движение идеальной жидкости между вращающимися цилиндрами и было показано, что для устойчивости течения по отношению к одномерным возмущениям ($m = 0$) необходимо и достаточно выполнение везде в жидкости неравенства

$$\Phi = \frac{1}{r^3} D\Gamma^2 \geq 0 \quad (2)$$

Неравенство (2) было впервые получено Рэлеем [3], как условие устойчивости вихревой трубки к продольным колебаниям. Таким образом, согласно [1], устойчивость закрученного потока вязкой жидкости однозначно определяется распределением циркуляции по радиусу и в этом смысле вращение является фактором, качественно изменяющим проблему устойчивости: условие устойчивости одномерного течения не может быть получено как предел неравенства (2) при $\Gamma \rightarrow 0$.

В работе [2] в качестве достаточного условия устойчивости вращающегося в трубе потока по отношению к трехмерным возмущениям было получено неравенство

$$\Phi - 2 \frac{m}{kr^2} v_\varphi Dv_z - \frac{1}{4} \left[Dv_z + \frac{m}{k} D \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]^2 \geq 0 \quad (3)$$

которое в случае осесимметричных колебаний ($m = 0$) принимает вид

$$\Phi \geq \frac{1}{4} (Dv_z)^2 \quad (4)$$

На основании различия между (4) и (2) авторы [2] ставят под сомнение корректность выводов [1].

Рассмотрим на основании (1) и (3) устойчивость однопараметрического винтового течения идеальной жидкости в трубе. В цилиндрических координатах такое движение описывается системой (см., например, [4])

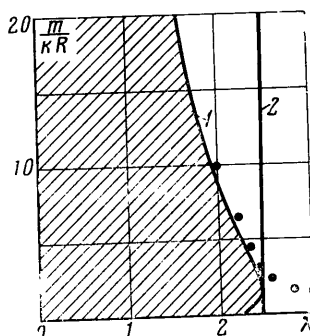
$$v_z r = \frac{d\psi}{dr}, \quad v_\varphi r = \Gamma = p\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + p^2\psi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{при } r = R \quad (5)$$

Здесь ψ — функция тока, Q — объемный расход жидкости. Решение системы (5) выражается через функции Бесселя. Воспользовавшись соотношением $\Gamma = r\psi$ и граничным условием при $r = R$, получим, что характер рассматриваемого движения определяется значением параметра

$$\lambda = pR = 2\pi\Gamma_0 R / Q = 2v_{\varphi 0} / v_{z0}$$

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma_0}{R} \frac{J_1(\lambda r/R)}{J_1(\lambda)}, \quad v_z = \frac{\Gamma_0}{R} \frac{J_0(\lambda r/R)}{J_1(\lambda)} \quad (6)$$



Фиг. 1

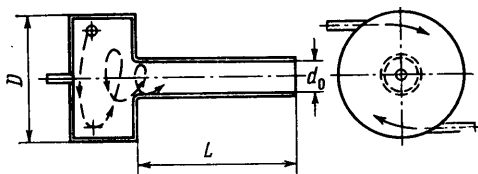
На фиг. 1 под индексом 1 представлена кривая устойчивости винтового течения, полученная совместным решением (3) и (6), а под индексом 2 — критическое условие (2).

Для экспериментального определения выводов о неустойчивости закрученного потока были проведены опыты на вихревых трубках (фиг. 2) с размерами $L : D : d_0 = 230 : 40 : 12$ и $230 : 40 : 8$ мм и толщиной стенок 2 мм. В основной серии экспериментов истечение вращающейся жидкости из трубки производилось в воду, при этом картину течения можно было наблюдать, вводя в жидкость у оси трубки пузырьки воздуха или длинную шелковую нить. Оказалось, что характер движения существенно зависит от относительной скорости вращения (величину λ можно менять, варьируя отношение расходов жидкости через тангенциальное и осевое отверстия).

При некоторых значениях λ осесимметричный поток теряет устойчивость и приобретает новую стационарную структуру, при которой центральное ядро вихря сворачивается в спиральную вихревую нить. Подобное проявление неустойчивости, сопровождающееся возникновением трехмерных вторичных течений, вообще характерно для течений с поперечным градиентом давления [5].

На фиг. 1 представлены данные измерений параметров спирального течения, возникшего в исследованных вихревых трубках. Здесь волновое число $k = 2\pi/l$ (l — шаг спирали), величина m равна числу тангенциальных отверстий на входе в трубку, а значение параметра λ относится к сечению у выхода.

Видно, что результаты экспериментов лучше согласуются с выводом [2] о влиянии продольной скорости на устойчивость потока к спиральным возмущениям, чем с результатами [1], основанными на абсолютном влиянии распределения циркуляции.



Фиг. 2

Поступило 21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability Oxford, Clarendon Press, 1961.
2. Howard L. N., Gupta A. S. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, No. 3.
3. Rayleigh J. W. On the dynamics of revolving fluids. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1916, vol. 93, p. 148.
4. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Госэнергоиздат, 1958.
5. Taylor G. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phys. Trans., Ser. A, 1923, vol. 223, pp. 289—343.