

Такое представление удобно в том отношении, что, как показано в работе [1], эти зависимости слабо зависят от числа M полета и температурного фактора, а определяются в основном формой тела.

На фиг. 5 приведена зависимость q_1 от x при фиксированном угле атаки $\alpha = 10^\circ$, $M_\infty = 3$ и при фиксированных параметрах δ и H_{1w} (сплошная кривая соответствует температурному фактору $H_{1w} = 0.05$, пунктирная — $H_{1w} = 0.75$).

Из этой фигуры можно видеть, что по мере увеличения параметра δ происходит смена характера распределения величины q_1 : при $\delta = 0.5$ функция q_1 является монотонно убывающей, при $\delta > 2$ максимальное значение величины смещается к окрестности звуковой линии. Такое поведение величины q_1 объясняется градиентом скорости внешнего течения.

Ниже приведены значения теплового потока

$$q_0 = q_w I \sqrt{R_0} / \rho_0 u_{t0}$$

в критической точке эллипсоидов вращения

| δ | 0.5 | 2 | 3.07 | H_{1w} | α | M_∞ |
|----------|-------|-------|--------|----------|------------|------------|
| q_0 | 0.925 | 0.289 | 0.184 | 0.05 | 10° | 3 |
| q_0 | 0.236 | 0.070 | 0.0490 | 0.75 | 10° | 3 |

Можно видеть, что с увеличением параметра δ тепловой поток в критической точке уменьшается.

С увеличением угла атаки при фиксированном параметре δ и величине температурного фактора максимальное значение теплового потока смещается к окрестности звуковой линии для $\delta \geq 1.5$ и увеличивается, что можно видеть из приведенных ниже данных

| δ | 0.5 | 1.5 | 2 | 3.07 | M_∞ | α | H_{1w} |
|----------|-------|-------|-------|-------|------------|------------|----------|
| q_1 | 1.000 | — | — | 1.035 | 3 | 5° | 0.05 |
| q_1 | 1.005 | — | 1.091 | 1.098 | 3 | 10° | 0.05 |
| q_1 | — | 1.017 | — | 1.213 | 3 | 15° | 0.05 |

Поступило 9 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Башкин В. А., Колина Н. П. Ламинарный пограничный слой на эллипсоидах вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
2. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб.: «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964.
3. Тиняков Г. П. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания эллипсоидов вращения. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
4. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отходящей ударной волной. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 4.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ И НЕПОДВИЖНОЙ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ

Г. Н. ХЛЕБУТИН

(Пермь)

Обнаружен кризис устойчивости основного ламинарного движения тонкого слоя жидкости, заполняющей пространство между стационарно вращающейся внутренней и покоящейся наружной концентрическими сферами. Потеря устойчивости приводит к образованию кольцевых вихрей жидкости в экваториальном поясе сфер. При сверхкритических скоростях вращения устанавливается новое стационарное движение.

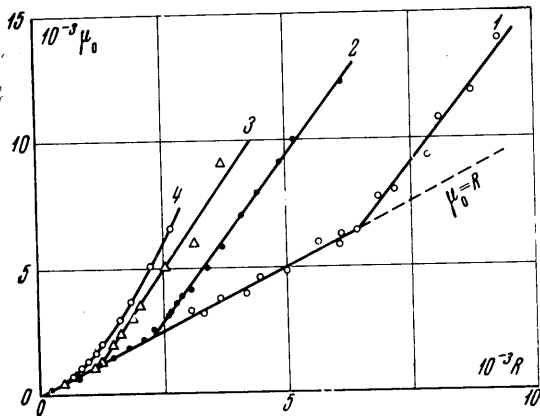
Устойчивость стационарного движения жидкости, заполняющей пространство между вращающейся внутренней и неподвижной наружной концентрическими сферами, исследовалась теоретически в работе [1]. Было найдено, что для отношения

радиусов наружной и внутренней сфер $r_2/r_1 = 2$ основное ламинарное движение жидкости теряет устойчивость при значении числа Рейнольдса $R \sim 100$, где

$$R = \frac{r_1^2 \omega}{\nu} \quad (0.1)$$

ω — угловая скорость вращения сферы, ν — кинематическая вязкость жидкости. Эксперимент [2], однако, показал, что при $r_2/r_1 \approx 1.7$ в интервале $60 < R < 120$ происходит плавное безкризисное формирование пограничного слоя. Таким образом, нарушение устойчивости основного течения толстого слоя жидкости предшествует возникновению пограничного слоя.

Кризиса движения до появления пограничного слоя можно было ожидать в случае тонких слоев жидкости. Поскольку экспериментальное изучение устойчивости замкнутых потоков, например, течения между вращающимися сферами, представляет значительный интерес [3], были поставлены эксперименты при различных значениях $(r_2 - r_1)$. Исследования проводились на установке, аналогичной описанной в [2]. Для визуальных наблюдений разъемная наружная сфера, выточенная из оргстекла, сделана прозрачной. Из оргстекла же выточены шесть сменных внутренних сфер. Радиусы сфер и соответствующая каждой их паре безразмерная толщина слоя жидкости $\delta = (r_2 - r_1)/r_1$ приведены в таблице¹. Выполнено в общей сложности более 500 измерений вращательного момента M , действующего на наружную сферу, и угловой скорости. Из них около 300 (для малых зазоров между сферами) обработаны по методу наименьших квадратов.



Фиг. 1. Зависимость $\mu_0(R)$ в опытах с дистиллированной водой и водными растворами глицерина. Линиями 1, 2, 3, 4 соответствуют значения δ и R_0 , указанные в таблице. В качестве иллюстрации изображена лишь небольшая часть экспериментальных точек. Погрешности измерений (корень квадратный из суммы относительных дисперсий случайных погрешностей и квадратов приведенных погрешностей приборов) имеют величины $\Delta R/R \leq 2.5\%$, $\Delta \mu_0/\mu_0$ не превышает 4.6, 2.5 и 2.3% для зазоров 1, 2 и 3 соответственно

δ эксперимент в соответствии с теорией, дает линейную зависимость момента от скорости вращения, характерную для основного ламинарного движения. На фиг. 1 эта зависимость [4] представлена в безразмерной форме

$$\mu_0 = R \quad (1.1)$$

Здесь $\mu_0 = M/\Gamma$, $\mu = M/r_1 \eta \nu$ — безразмерный вращательный момент, η — динамическая вязкость жидкости, $\Gamma = 8\pi r_2^3 / (r_2^3 - r_1^3)$ — геометрический параметр,

| Номер | r_1 (см) | δ | R_* | k |
|-------|---------------------|----------|----------------|-----------------|
| 1 | 3.128 ± 0.001 | 0.0371 | 6500 ± 700 | 2.47 ± 0.06 |
| 2 | 3.019 ± 0.001 | 0.0745 | 2300 ± 200 | 2.63 ± 0.07 |
| 3 | 2.8901 ± 0.0002 | 0.1225 | 1250 ± 90 | 2.88 ± 0.07 |
| 4 | 2.7258 ± 0.0003 | 0.1901 | 540 ± 20 | — |
| 5 | 2.2461 ± 0.0008 | 0.4443 | — | — |
| 6 | 1.2900 ± 0.0006 | 1.5147 | — | — |

$$r_2 = (3.244 \pm 0.002) \text{ см.}$$

¹ Из-за технических трудностей изготовления наружной сферы ее полярный (вертикальный) диаметр оказался приблизительно на 0.7% меньше экваториального. При обработке измерений всюду использовалось значение экваториального радиуса r_2 , приведенное в таблице.

R — число Рейнольдса, определяемое соотношением (0.1). Эксперимент показал, что развитие движения с увеличением скорости вращения существенно зависит от толщины слоя жидкости между сферами.

2. Толстые слои жидкости. При большой толщине слоя жидкости $\delta > 0.19$ подтверждено установленное в [2] отсутствие кризиса устойчивости движения.

Числа Рейнольдса, при которых выполняется закон (1.1), не превышают 100 для зазора $\delta = 0.444$ и 20 для $\delta = 1.515$. С дальнейшим ростом скорости вращения наступают отклонения от линейной зависимости $\mu_0(R)$. После некоторой переходной области устанавливается зависимость $\mu_0 \sim R^{3/2}$.

Визуальные наблюдения, проведенные при помощи частиц алюминиевой пудры или различных красителей, показали, что основное движение качественно не отличается от найденного в [1, 5, 6]. Его можно представить как наложение двух движений. В плоскостях, перпендикулярных оси вращения, частицы жидкости движутся по окружностям с центрами на оси. В меридиональных плоскостях частицы жидкости движутся около внутренней сферы от полюсов к экваториальной плоскости. Приближаясь к экваториальной плоскости, они отклоняются к наружной сфере, вдоль которой движутся к полюсам, а в полярных областях направляются к внутренней сфере. Это движение симметрично относительно плоскости экватора. При небольших скоростях вращения меридиональное движение имеет гораздо меньшую интенсивность, чем круговое.

По мере возрастания скорости вращения развитие меридионального течения качественно изменяется: линии тока его деформируются, все более сгущаясь к границам области, внутри которой это движение совершается. Образуется пограничный слой, прилегающий к сферам и замыкающийся у полюсов и вдоль плоскости экватора, разделяющей жидкость на два симметричных потока. Пограничный слой подобно двум чехлам охватывает сердцевину относительно малоподвижной жидкости в верхнем и нижнем полушариях.

3. Тонкие слои жидкости. В случае тонких слоев жидкости, когда $\delta \leq 0.12$, постепенное увеличение скорости приводит к тому, что на графике $\mu_0(R)$ возникает излом (фиг. 1) при некотором значении числа Рейнольдса $R = R_*$, зависящем от δ (таблица). Этот излом указывает на потерю устойчивости основного движения, имеющую характер кризиса. С дальнейшим возрастанием скорости вращения устанавливается второе стационарное движение, характеризуемое снова линейной зависимостью момента (линии 1, 2, 3 на фиг. 1) от числа Рейнольдса

$$\mu_0 = k \left(R - R_* \frac{k-1}{k} \right) \tag{3.1}$$

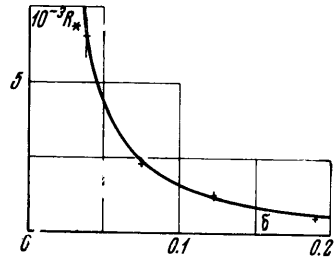
Угловой коэффициент прямых k (таблица) возрастает приблизительно пропорционально толщине слоя δ . Критическое число Рейнольдса определяется как абсцисса точки пересечения прямых (3.1) и (1.1). Параметры k и R_* вычислены из экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Линейная зависимость момента в закритической области прослеживается в интервале чисел Рейнольдса около $(2-3)R_*$. Постепенное уменьшение скорости вращения от закритических значений к докритическим приводит к установлению основного движения при том же самом критическом числе Рейнольдса (отсутствует гистерезис).

Визуально обнаружено, что при кризисе поток жидкости в экваториальном поясе разбивается на кольцевые вихри, которые остаются устойчивыми и стационарными во всей области, где выполняется соотношение (3.1). Вихри исчезают с постепенным уменьшением скорости вращения при переходе через критическое ее значение. Качественно они похожи на тэйлоровские вихри между вращающимися коаксиальными цилиндрами [7]. Структура вихрей, распределение скорости в них и в остальной части жидкости являются предметом дальнейшего исследования.

Чем тоньше слой жидкости между сферами, тем более устойчиво ее движение. Зависимость критического числа Рейнольдса от толщины слоя жидкости (фиг. 2) может быть удовлетворительно представлена эмпирическим соотношением

$$R_* \delta^{3/2} = 49.0 \tag{3.2}$$

В случае движения жидкости между коаксиальными цилиндрами имеет место аналогичное соотношение: $R_* \delta^{3/2} = 41.3$ (см. [8]).



Фиг. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса от толщины слоя жидкости. Сплошная линия изображает соотношение (3.2), крестики — экспериментальные значения R_* и погрешности измерений

4. Вероятно, следует выделить промежуточную область толщин слоя, заключающуюся в интервале $0.12 < \delta \leq 0.19$. В этой области критическое число Рейнольдса может быть достаточно четко отмечено по излому линии на графике (см. 4 на фиг. 1 и в таблице). При кризисе визуально наблюдается образование вихрей. Однако, линейная зависимость (3.1) в закритической области имеет место лишь в очень малом интервале чисел Рейнольдса. Угловой коэффициент этой зависимости значительно меньше, чем для более узких зазоров.

Выражаю глубокую благодарность Г. Ф. Шайдурову за содействие и поддержку.

Поступило 18 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Сорокин М. П., Хлебутин Г. Н., Шайдуров Г. Ф. Об устойчивости движения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПМТФ, 1966, № 6.
3. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 4, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
5. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
6. Haberman W. L. Secondary Flow about a Sphere Rotating in a Viscous Liquid inside a Coaxially Rotating Spherical Container. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5, p. 625—628; 1962, vol. 5, No. 9, p. 1336.
7. Taylor C. J. Stability of a Viscous Liquid contained between two Rotating Cylinders. Phys. Trans. Roy. Soc. (A), 1923, vol. 223, p. 289.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПО ТРУБЕ ИДЕАЛЬНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ

(Москва)

Известно, что работа технических устройств, в которых используются закрученные струи жидкости или газа, может сопровождаться возникновением автоколебаний. В статье на основе некоторых моделей движения невязкой несжимаемой жидкости рассмотрена устойчивость вращающегося потока по отношению к спиральным возмущениям. Опыты на модельных вихревых трубках показали, что в соответствии с расчетом наблюдается спиральная неустойчивость вихревого течения.

Пусть в круглой цилиндрической трубе имеет место не зависящее от продольной координаты z стационарное осесимметричное движение вращающейся жидкости ($\mathbf{U} = v_z \mathbf{k}_1 + v_\varphi \mathbf{e}_1$).

Рассмотрим устойчивость такого движения по отношению к малым возмущениям спирального типа $\exp(j(\sigma t + kz + m\vartheta))$.

Из уравнения Эйлера для амплитуды радиальных колебаний $u(\bar{r})$ можно получить

$$\gamma^2 D_s D_3 u - u \left\{ \gamma^2 + \gamma r D \left[\frac{s}{r} \left(k D v_z + m \frac{D\Gamma}{r^2} \right) \right] - \frac{2k\Gamma s}{r^3} (k D \Gamma - m D v_z) \right\} = 0$$

$$u = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad \text{и при } r = R \quad (1)$$

$$\gamma = \sigma + k v_z + m \frac{\Gamma}{r^2}, \quad s = \frac{r^2}{m^2 + k^2 r^2}, \quad \Gamma = v_\varphi r, \quad D = \frac{d}{dr}, \quad D_* = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right)$$

При этом течение будет неустойчивым, если сформулированная задача на собственные значения имеет нетривиальные решения при $\text{Im } \sigma < 0$.