

## О ВЫБОРЕ ГИПОТЕЗЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТЕОРИИ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ

К. Е. ЮРЧЕНОК (Ленинград)

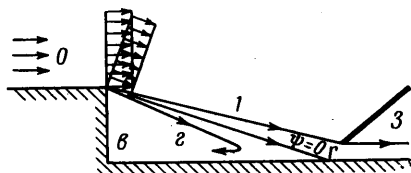
Из существующих теорий донного давления наибольшее распространение и развитие получила теория Чепмена — Корста. Основные положения этой теории для ламинарных течений в донной области были сформулированы Чепменом [1], для турбулентных течений — Корстом [2]. Не останавливаясь на схеме течений и деталях теории, хорошо известных из многочисленных работ советских и зарубежных авторов, ответим, что в последние годы некоторые положения теории Корста подверглись критике и уточнению [3, 4].

В частности, в работе Нэша [3] было показано, что основное допущение теории Корста о равенстве полного давления на разделяющей линии тока статическому давлению за замыкающим течением скачком уплотнения является неточным. Нэш экспериментально установил, что параметр присоединения  $N$ , характеризующий давление в точке присоединения ( $N = (p_r - p_b) / (p_3 - p_b)$ ),  $p_r$  — давление в точке присоединения,  $p_b$  — донное давление,  $p_3$  — давление за замыкающим скачком уплотнения) при сверхзвуковых скоростях (по крайней мере до  $M \leq 4$ ) равен  $\sim 0.35$ , а не единице, как у Корста. В работах Нэша было указано также на необходимость учета толщины пограничного слоя в точке отрыва и дан метод, позволяющий произвести этот учет [4].

Выводы, сделанные Нэшем, послужили поводом для дискуссии [5]. При этом обращает на себя внимание то обстоятельство, что в процессе дискуссии не обсуждался вопрос о влиянии на величину донного давления одного из основных параметров теории Корста — скорости на разделяющей линии тока. Вместе с тем, вопрос этот представляется нетривиальным, так как в зависимости от выбора «гипотезы турбулентности» решение задачи о турбулентном перемешивании в донной области может привести к существенному различию в значениях скорости на разделяющей линии тока.

В данной работе содержатся результаты расчета скорости на разделяющей линии тока для одной из гипотез о коэффициенте турбулентного перемешивания. При этом рассматривался случай как отсутствия, так и наличия теплообмена между донной областью и внешним потоком. Полученные в результате расчета зависимости для адиабатических зон смешения сравниваются с зависимостями, полученными для других гипотез турбулентности [2, 3, 6-8]. Отмечается существенное влияние скорости на разделяющей линии тока на величину донного давления.

**1. Определение скорости на разделяющей «нулевой» линии тока.** Рассмотрим для простоты обтекание плоской ступеньки полубесконечным потоком газа, движущимся со сверхзвуковой скоростью. Будем считать, что после поворота в веере волн разряжения профиль скорости является однородным (толщина пограничного слоя в точке отрыва принимается равной нулю) (фиг. 1). Движение в зоне смешения будем считать изобарическим, турбулентным.



Фиг. 1

Для решения поставленной задачи используем уравнения пограничного слоя в переменных Мизеса [6]

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \rho^2 \epsilon u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $\psi$  — функция тока,  $\xi$  — продольная координата,  $u$  — продольная скорость,  $\rho$  —

плотность газа,  $\epsilon$  — коэффициент турбулентного перемешивания (турбулентный аналог коэффициента кинематической вязкости).

Удобство переменных Мизеса в рассматриваемом случае заключается в том, что скорость  $u_0$  на разделяющей линии тока находится путем непосредственного интегрирования уравнения (1.1) при граничных условиях

$$u = U_1 \quad (\psi > 0), \quad u = 0 \quad (\psi < 0) \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad (1.2)$$

Если принять, что турбулентное число Прандтля равно единице, то из условия подобия полей скорости и полной энтальпии в зоне смешения и из уравнения состояния

$$p = \rho RT \quad (1.3)$$

вытекает следующая зависимость плотности от скорости:

$$\begin{aligned} \rho^{\circ} &= [1 - C_1^2][H_2^{\circ} + (1 - H_2^{\circ})u^{\circ} - C_1^2 u^{\circ 2}]^{-1} & H &= c_p T + \frac{1}{2}u^2 \\ C_2^2 &= \frac{1}{2}(k - 1)M^2 [1 + \frac{1}{2}(k - 1)M^2]^{-1} & & (1.4) \\ u^{\circ} &= u / U_1, & H_2^{\circ} &\approx H_2 / H_1, & \rho^{\circ} &= \rho / \rho_1, \end{aligned}$$

Здесь  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $R$  — газовая постоянная,  $H$  — полная энтальпия,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $M$  — число Маха,  $C$  — число Крокко. Индексом 1 обозначены параметры на границе зоны смешения и внешнего изэнтропического потока; индексом 2 обозначены параметры на границе зоны смешения с донной областью.

Для дальнейшего необходимо принять гипотезу о характере изменения коэффициента турбулентного перемешивания  $\epsilon$  в зоне смешения.

В данной работе использовалась гипотеза

$$\rho \epsilon = f(\xi) \quad (1.5)$$

Согласно равенству (1.5), коэффициент турбулентного перемешивания является функцией как продольной, так и поперечной координаты. Выражение (1.5) с различными модификациями функции  $f(\xi)$  получило широкое распространение в теории газовых струй. В рассматриваемом случае нет необходимости конкретизировать вид функции  $f(\xi)$ , так как конечной целью анализа является получение скорости на разделяющей линии тока, величина которой, вследствие автомодельности задачи, как это будет показано ниже, не зависит от положения сечения, определяемого координатой  $\xi$ .

Принимая во внимание равенства (1.5) и (1.4), преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$\frac{\partial u^{\circ}}{\partial \xi^{\circ}} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ R(u^{\circ}) u^{\circ} \frac{\partial u^{\circ}}{\partial \psi} \right] \quad (1.6)$$

Здесь

$$\xi^{\circ} = \int_0^{\xi} f(\xi) U_1 \rho_1^2 (1 - C_1^2) d\xi, \quad R(u^{\circ}) = \frac{1}{H_2^{\circ} + (1 - H_2^{\circ})u^{\circ} - C_1^2 u^{\circ 2}} \quad (1.7)$$

Для интегрирования удобнее всего вместо  $u^{\circ}$  ввести функцию  $z = u^{\circ}$ . В этом случае уравнение (1.6) и граничные условия (1.2) имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial \xi^{\circ}} = \sqrt{z} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( R(z) \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) \quad (1.8)$$

$$z = 1 \quad (\psi > 0), \quad z = 0 \quad (\psi < 0) \quad \text{при } \xi^{\circ} = 0 \quad (1.9)$$

Для переменной  $\eta = \psi / \sqrt{\xi^{\circ}}$  поставленная задача (1.8), (1.9) допускает автомодельное решение. В этом случае будем иметь

$$(R(z)z')' + \frac{1}{2}\eta z'z^{-1/2} = 0 \quad (1.10)$$

$$z \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty, \quad z \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty \quad (1.11)$$

Штрих означает производную по переменной  $\eta$ . Отсюда имеем

$$z = 1 - \left( \int_{\infty}^{\eta} R(z)B(z, \eta)\xi d\eta \right) \left( \int_{\infty}^{-\infty} R(z)B(z, \eta)d\eta \right)^{-1} \quad (1.12)$$

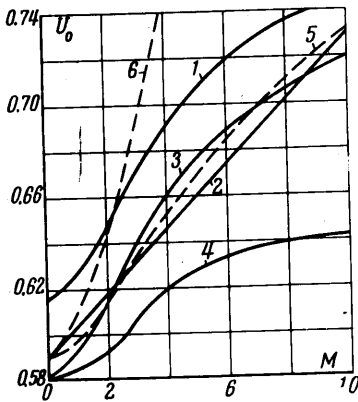
$$B(z, \eta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^{\eta} \frac{R(z)\eta}{z^{1/2}} d\eta \right] \xi$$

Вычисление  $z$  может быть проведено методом последовательных приближений. Скорость по разделяющей линии тока определяется равенством  $u_0^{\circ} = \sqrt{z(0)}$ . Отметим, что функция  $R(z)$  имеет вид (1.7) с тем отличием, что величину  $u^{\circ}$  следует заменить на  $\sqrt{z}$ . Расчет скорости на разделяющей линии тока был выполнен на машине БЭСМ-2.

Результаты расчета приведены в таблице.

$H_2^\circ$	$M = 0$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 12$
1	0.5906	0.6142	0.6515	0.6840	0.7105	0.7318	0.7502
0.8	0.5828	0.6072	0.6455	0.6796	0.7070	0.7300	0.7485
0.6	0.5734	0.5983	0.6381	0.6736	0.7028	0.7266	0.7464
0.4	0.5609	0.5866	0.6278	0.6654	0.6964	0.7216	0.7424
0.2	0.5425	0.5689	0.6124	0.6525	0.6859	0.7130	0.7354
0.1	0.5286	0.5554	0.6003	0.6422	0.6776	0.7055	0.7291

2. Сравнение скоростей на разделяющей линии тока, вычисленных при различных гипотезах о коэффициенте турбулентного перемешивания. В работе Корста [2] для нахождения профиля скоростей в зоне смешения использовалось весьма упрощенное уравнение движения, представляющее собой турбулентный аналог известного уравнения Озеена. Профиль скоростей, полученный в результате интегрирования этого уравнения, имеет вид



Фиг. 2

$$u^\circ = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \frac{\sigma x}{y} \right) \quad (2.1)$$

где  $\sigma$  — эмпирическая постоянная турбулентности. Используя профиль скоростей (2.1) и интегральные условия сохранения массы и количества движения Корст нашел зависимость скорости на разделяющей линии тока от числа Маха при отсутствии теплообмена между внешним потоком и донной областью (фиг. 2, кривая 1). В работе Нэша [3] справедливо было отмечено, что использование профиля (2.1) для расчета скорости на разделяющей линии тока приведет к завышенным значениям этого параметра при больших числах  $M$ . Поэтому Нэш для определения  $u_0^\circ(M)$  принял зависимость

$$u_0^\circ = 0.348 + 0.018M \quad (2.2)$$

которая дает значения параметра  $u_0^\circ(M)$ , лежащие между значениями Корста и значениями, получаемыми при линейном профиле скоростей в зоне смешения (фиг. 2, кривая 2).

В работе В. Я. Нейланда [7] рассматривалось влияние теплообмена на донное давление при ламинарном и турбулентном режимах течения в области смешения. При расчете скорости на разделяющей линии тока в турбулентной области для определения коэффициента турбулентного перемешивания использовалась гипотеза о пути перемешивания

$$\varepsilon = c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3)$$

Здесь  $c$  — эмпирическая постоянная. Турбулентное число Прандтля принималось равным единице. Результаты расчета для случая отсутствия теплообмена приведены на фиг. 2 (кривая 3).

Исследованию турбулентного пограничного слоя свободных струй сжимаемого газа посвящена работа М. П. Тетерина [8]. В этой работе среди других результатов были получены значения скорости на разделяющей линии тока при отсутствии теплообмена и турбулентном числе Прандтля, равном 0.5. Для  $\varepsilon$  так же, как и в предыдущей работе [7] использовалось выражение (2.3). Решение было получено путем интегрирования полной системы уравнений пограничного слоя, включая уравнение энергии. Результирующая кривая приведена на фиг. 2 (кривая 4).

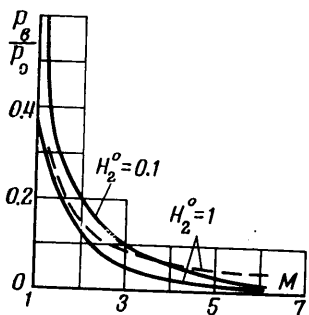
На этой же фигуре представлены еще две кривые. Кривая 5 построена на основании результатов, приведенных в первой строке таблицы и соответствует выражению (1.5) для коэффициента турбулентного обмена. Зависимость, изображаемая кривой 6, получена в предположении, что коэффициент турбулентного перемешивания постоянен по сечению области смешения и зависит только от продольной координаты, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$ . Кривая 6 показывает, что непосредственное использование полуэмпирических закономерностей, справедливых для течений несжимаемой жидкости, для исследования течений газа при больших числах Маха может привести к неверным результатам.

Из сравнения кривых, приведенных на фиг. 2, видно, что при числе Прандтля, равном единице, соотношения для  $\epsilon$  (1.5) и (2.3), а также зависимость, предложенная Нэшем (2.2), приводят к близким результатам.

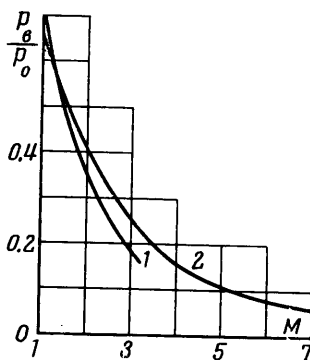
Кривая Корста 1 располагается заметно выше всех других кривых (исключая 6). Существенное различие между кривыми 4 и 3, полученными соответственно для значений числа Прандтля  $P = 0.5$  и  $P = 1$ , по-видимому, свидетельствует о необходимости учета отличия турбулентного числа Прандтля от единицы при расчете скорости на разделяющей линии тока. Окончательное суждение о справедливости той или иной гипотезы о коэффициенте турбулентного перемешивания можно будет сделать, очевидно, лишь после экспериментальных исследований зависимости  $u_0^{\circ}(M)$ .

3. Расчет донного давления. На основании полученных в работе значений скорости на разделяющей линии тока (см. таблицу) были проведены расчеты донного давления за плоской ступенькой по методу Корста с учетом отличия параметра присоединения от единицы, по данным Нэша [3] ( $N = 0.35$ ), как для случая отсутствия теплообмена между донной областью и внешним потоком, так и с теплообменом  $H_2^{\circ} \leq 1$  (фиг. 3). Наличие пограничного слоя в точке отрыва не учитывалось.

На этой же фигуре приведена кривая пунктир, рассчитанная по зависимости  $u_0^{\circ}(M)$  (кривая 4, фиг. 2), полученной М. П. Тетериным [8]. Видно, что отличие числа Прандтля от единицы ( $P_r = 0.5$ ) заметно влияет на величину донного давления.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 изображены кривая 1 изменения донного давления за ступенькой от числа  $M$ , полученная Корстом [2], и кривая 2, полученная по данным таблицы (первая строка). Параметр присоединения и в том и в другом случае принимался равным единице. Из сравнения этих кривых видно, что незначительное различие в величине скорости на разделяющей линии тока приводит к заметному различию в величине донного давления. Это обстоятельство указывает на необходимость осторожного подхода к оценке точности расчетов донного давления, основывающихся на различных гипотезах турбулентности.

Поступило 13 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Chapman D. An analysis of base pressure at supersonic velocities and comparison with experiment. NACA Rep., 1951, No. 1051.
2. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. Trans ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
3. Nash J. F. An analysis of the dimensional turbulent base flow, including the effect of the approaching boundary layer. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1963, No. 3344.
4. Nash J. F. The effect of an unital boundary layer on the development of a turbulent free shear layer. Aeronaut. Res. Council Current Reports, 1962, No. 682.
5. Ваззан А. Р. Обзор последних исследований в области турбулентных сверхзвуковых донных течений. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 6.
6. Лойцянский Л. Г. К теории плоских ламинарных и турбулентных струй. Энергомашиностроение. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 176.
7. Нейланд В. Я. О влиянии теплообмена и турбулентного течения в области смешения на характеристики срывных зон. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 1.
8. Тетерин М. П. Турбулентный пограничный слой свободной струи сжимаемого газа в спутном и встречном потоках. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 2.