что продольный перепад давления определяется по формуле

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_1} = U_2\frac{dU_2}{dx_1} + U_1\frac{dU_1}{dx_1}$$

Отсюда

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_1}z = U_1(\sigma_1 + f_1) \tag{5.3}$$

Из соотношения (5.3) видно, что необходимый для отрыва положительный перепад давления определяется отрицательной суммой значений параметров σ_1 и f_1. Следовательно, при увеличении по абсолютной величине отрицательных значений σ_1 абсолютное значение параметра f_1 уменьшается. Наоборот, если параметр $\sigma_1 > 0$, то значение $|f_1|$ увеличивается.

На фиг. 1, 2 видна значительная разница в характеристиках пограничного слоя, полученных при расчетах по разным вариантам, т. е. на результаты влияет «локальность» (отбрасывание производных в уравнениях) по одному или другому параметру, или по обоим одновременно. Поэтому представляет большой интерес построение решения в двухпараметрическом приближении, когда в уравнениях сохраняются производные по обоим параметрам. Однако из анализа универсальных уравнений уже видно, что вблизи $f_1 = 0$ двухпараметрическое решение будет близко к полученному здесь локально-двухпараметрическому решению по второму варианту, а в области около $\sigma_1 = 0$ двухпараметрическое решение будет близко к результатам, полученным в первом варианте.

Поступило 16 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения теории ламинарного пограничного соля. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Аэротермодинамика, 1967, № 280.
3. Богданова В. В. Осесимметричный ламинарный пограничный слой в закрученном потоке. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Техническая гидрогазодинамика, 1965, № 248.
4. Степанов Е. И. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией. ПММ, 1947, т. 11, вып. 1.

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Л. М. МАСЕЕВ

(*Москва*)

Турбулентное течение во многих случаях возникает вследствие неустойчивости ламинарного течения относительно бесконечномалых возмущений [1]. Но процесс перехода ламинарного течения в турбулентное во многом остается невыясненным. Некоторые авторы [2] полагают, что основную роль в процессе перехода имеет нелинейное взаимодействие пульсаций потока. Возможно, что процесс перехода определяется появлением новой неустойчивости. В статье рассматривается вопрос об устойчивости течения, образовавшегося в пограничном слое на плоской пластинке при продольном обтекании ее потоком вязкой несжимаемой жидкости после возникновения в пограничном слое неубывающих двумерных возмущений в виде плоских волн Толлмина — Шлихтинга.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое на плоской пластинке неустойчиво относительно волн Толлмина — Шлихтинга [1], причем двумерные волны Толлмина — Шлихтинга развиваются при данном числе Рейнольдса быстрее, чем трехмерные. С появлением двумерной волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое возникает плоское течение с двумя компонентами скорости. Рассматривая устойчивость получающегося течения относительно бесконечномалых трехмерных возмущений, получим систему линейных уравнений для возмущений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}u+V\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}v=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{R}}\Delta u \\
\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}u+V\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}v=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{R}}\Delta v \\
\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}+V\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{R}}\Delta w, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
U(x,\ y,\ t)=U_0(y)+A[\varphi_r'(y)\cos\alpha(x-c_rt)-\varphi_i'(y)\sin\alpha(x-c_rt)]e^{\beta_i t} \\
V(x,\ y,\ t)=\alpha A[\varphi_r(y)\sin\alpha(x-c_rt)+\varphi_i(y)\cos\alpha(x-c_rt)]e^{\beta_i t}
\end{gathered}
$$

компоненты скорости основного течения по осям x и y соответственно; $U_0(y)$ — профиль Блазиуса; $\varphi_r(y)$, $\varphi_i(y)$ — действительная и мнимая часть собственной функции $\varphi(y)$, полученной из решения задачи на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда с профилем Блазиуса; штрих означает дифференцирование по y; A — амплитуда волны Толлмина — Шлихтинга; α — волновое число; c_r — скорость распространения волны вниз по течению; β_i — коэффициент роста амплитуды волны; $R=U_\infty\delta^*/\nu$; $\delta^*=1.72\sqrt{\nu x/U_\infty}$; U_∞ — скорость набегающего потока на бесконечности; ν — коэффициент кинематической вязкости; x — расстояние от переднего края пластинки; ось x направлена по пластинке вдоль потока; ось y — перпендикулярно плоскости пластинки; ось z — в плоскости пластинки и направлена поперек основного потока.

Ищем ограниченное по x и z решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$
u=v=w=0 \quad \text{при } y=0; \qquad u,\ v,\ w\to 0 \quad \text{при } y\to\infty \tag{2}
$$

Система (1) допускает решения вида

$$
\begin{gathered}
u(x,y,z,t)=u(x,y,t)\cos\sigma z, \qquad v(x,y,z,t)=v(x,y,t)\cos\sigma z \\
w(x,\ y,\ z,\ t)=w(x,\ y,\ t)\sin\sigma z, \qquad p(x,\ y,\ z,\ t)=p(x,\ y,\ t)\cos\sigma z
\end{gathered} \tag{3}
$$

В системе координат, движущейся вниз по потоку со скоростью c_r, коэффициенты системы (1) будут зависеть от времени только через экспоненту $e^{\beta_i t}$. Если представить решение в виде рядов по степеням коэффициента роста β_i, являющегося, согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [1], малой величиной, то получим, собирая члены при одинаковых степенях β_i, рекуррентную систему уравнений в частных производных, которую можно решать последовательно [3]. В системе уравнений нулевого приближения коэффициенты не будут зависеть от времени. Тогда решение системы нулевого приближения можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
u(x,\ y,\ t)=u(x,\ y)e^{\beta t}, \qquad v(x,\ y,\ t)=v(x,\ y)e^{\beta t} \\
w(x,y,t)=w(x,y)e^{\beta t}, \qquad p(x,y,t)=p(x,y)e^{\beta t}
\end{gathered} \tag{4}
$$

Здесь β — действительное число. Если $\beta>0$, то основное течение неустойчиво.

В результате разделения переменных по z и t, перехода в подвижную систему координат и разложения решения в ряд по β_i получается задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$
\begin{gathered}
\beta u+(U_0-c_r)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}u+V\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}v=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sigma^2 u\right) \\
\beta v+(U_0-c_r)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}u+V\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}v=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\sigma^2 v\right) \\
\beta w+(U_0-c_r)\frac{\partial w}{\partial x}+V\frac{\partial w}{\partial y}=\sigma p+\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\sigma^2 w\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma w=0
\end{gathered} \tag{5}
$$

Решение системы (5) при граничных условиях (2) ищем методом Канторовича в классе функций, периодических по x с периодом $2\pi/\gamma$, причем γ соизмеримо с α. Полагаем в $(2n+1)$-м приближении

$$u(x, y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{n} (u_k(y)\cos k\gamma x + U_k(y)\sin k\gamma x) \tag{6}$$

(Аналогичные формулы для v, w, p).

Анализируя [4] получающуюся систему обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом граничных условий (2), получаем, что нетривиальное решение (6) с отличным от нуля осреднением по x возможно только при условии $\gamma = \alpha$.

Учитывая первые четыре члена в рядах (6), методом Канторовича получаем систему уравнений, которая после некоторых преобразований примет вид

$$\begin{gathered}
\mathrm{R}^{-1}[u_0'' - (\sigma^2 + \beta \mathrm{R}) u_0] - U_0'\sigma\Psi_0 + {}^1/_2 A(\varphi_r v_1'' - \varphi_r'' v_1) + \\
+ {}^1/_2 A(\varphi_i'' V_1 - \varphi_i V_1'') + {}^1/_2 A\sigma\varphi_r w_1' - {}^1/_2 A\sigma\varphi_i W_1' = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathrm{R}^{-1}[\Psi_0^{(4)} - (2\sigma^2 + \beta \mathrm{R})\Psi_0'' + (\sigma^4 + \beta\sigma^2 \mathrm{R})\Psi_0] + A\alpha\sigma(\varphi_i v_1)' + A\alpha\sigma(\varphi_r V_1)' + \\
+ {}^1/_2 A\alpha[\sigma^2\varphi_i w_1 + (\varphi_i w_1)''] + {}^1/_2 A\alpha[\sigma^2\varphi_r W_1 + (\varphi_r W_1)''] = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A\alpha(\varphi_i u_0' - \varphi_i' u_0) + A\sigma(\varphi_r''\Psi_0 - \alpha^2\sigma^{-2}\varphi_r\Psi_0'') + U_0' v_1 - (U_0 - c_r) v_1' - \\
- \alpha^{-1}\mathrm{R}^{-1}[V_1''' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) V_1'] - \sigma^{-1}(\alpha^2 + \sigma^2)(U_0 - c_r) w_1 - \\
- \alpha^{-1}\sigma^{-1}(\alpha^2 + \sigma^2)\mathrm{R}^{-1}[W_1'' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) W_1] + {}^1/_2 A\alpha(\varphi_i' u_2 + \varphi_i u_2') + \\
+ {}^1/_2 A\sigma[\varphi_r''\Psi_2 + 2\alpha^2\sigma^{-2}\varphi_r'\Psi_2' + \alpha^2\sigma^{-2}\varphi_r\Psi_2''] = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A\alpha^2\varphi_r u_0 + A\alpha\sigma^{-1}[\sigma^2(\varphi_i\Psi_0)' - (\varphi_i\Psi_0'')'] - \mathrm{R}^{-1}[v_1'' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) v_1] + \\
+ \alpha(U_0 - c_r) V_1 - \sigma^{-1}\mathrm{R}^{-1}[w_1''' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) w_1'] + \\
+ \alpha\sigma^{-1}[U_0' W_1 + (U_0 - c_r) W_1'] + {}^1/_2 A\alpha^2\varphi_r u_2 + \\
+ {}^1/_2 A\alpha\sigma^{-1}[3\sigma^2\varphi_i'\Psi_2 + \sigma^2\varphi_i\Psi_2' - 2(\varphi_i'\Psi_2')' - (\varphi_i\Psi_2'')'] = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A\alpha(\varphi_r u_0' - \varphi_r' u_0) + A\sigma[\alpha^2\sigma^{-2}\varphi_i\Psi_0'' - \varphi_i''\Psi_0] + \alpha^{-1}\mathrm{R}^{-1}[v_1''' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) v_1'] + \\
+ U_0' V_1 - (U_0 - c_r) V_1' + \mathrm{R}^{-1}(\alpha^2 + \sigma^2)\alpha^{-1}\sigma^{-1}[w_1'' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) w_1] - \\
- \sigma^{-1}(\alpha^2 + \sigma^2)(U_0 - c_r) W_1 - {}^1/_2 A\alpha(\varphi_r' u_2 + \varphi_r u_2') + \\
+ {}^1/_2 A\sigma[\varphi_i''\Psi_2 + 2\alpha^2\sigma^{-2}\varphi_i'\Psi_2' + \alpha^2\sigma^{-2}\varphi_i\Psi_2''] = 0
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
- A\alpha^2\varphi_i u_0 + A\alpha\sigma^{-1}[\sigma^2(\varphi_r\Psi_0)' - (\varphi_r\Psi_0'')'] - \alpha(U_0 - c_r) v_1 - \\
- \mathrm{R}^{-1}[V_1'' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) V_1] - \alpha\sigma^{-1}[U_0' w_1 + (U_0 - c_r) w_1'] - \\
- \sigma^{-1}\mathrm{R}^{-1}[W_1''' - (\alpha^2 + \sigma^2 + \beta \mathrm{R}) W_1'] + {}^1/_2 A\alpha^2\varphi_i u_2 + \\
+ {}^1/_2 A\alpha\sigma^{-1}[-3\sigma^2\varphi_r'\Psi_2 - \sigma^2\varphi_r\Psi_2' + 2(\varphi_r'\Psi_2')'] + (\varphi_r\Psi_2'')' = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathrm{R}^{-1}[u_2'' - (\sigma^2 + 4\alpha^2 + \beta \mathrm{R}) u_2] - U_0'\sigma\Psi_2 - {}^1/_2 A(-2\varphi_r' v_1' + \varphi_r v_1'' + \varphi_r'' v_1) - \\
- {}^1/_2 A(-2\varphi_i' V_1' + \varphi_i V_1'' + \varphi_i'' V_1) - {}^1/_2 A\sigma(-2\varphi_r' w_1 + \varphi_r w_1') - \\
- {}^1/_2 A\sigma(-2\varphi_i' W_1 + \varphi_i W_1') = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathrm{R}^{-1}[\Psi_2^{(4)} - (2\sigma^2 + 4\alpha^2 + \beta \mathrm{R})\Psi_2'' + (\sigma^4 + 4\alpha^2\sigma^2 + \beta\sigma^2 \mathrm{R})\Psi_2] + \\
+ {}^1/_2 A\alpha(-\sigma^2\varphi_i w_1 - \varphi_i'' w_1 + \varphi_i w_1'') + {}^1/_2 A\alpha\sigma^2(\varphi_r W_1 + \sigma^{-2}\varphi_r'' W_1 - \sigma^{-2}\varphi_r W_1'') = 0
\end{gathered}$$

$$v_0 = \sigma\Psi_0, \quad w_0 = -\Psi_0', \quad v_2 = \sigma\Psi_2, \quad w_2 = -\Psi_2' \tag{8}$$

Граничные условия

$$\begin{gathered}
u_0 = \Psi_0 = \Psi_0' = v_1 = v_1' = V_1 = V_1' = w_1 = W_1 = u_2 = \Psi_2 = \Psi_2' = 0 \\
\text{при } y = 0 \\
u_0,\ \Psi_0,\ \Psi_0',\ v_1,\ v_1',\ V_1,\ V_1',\ w_1,\ W_1,\ u_2,\ \Psi_2,\ \Psi_2' \to 0 \qquad \text{при } y \to \infty
\end{gathered} \tag{9}$$

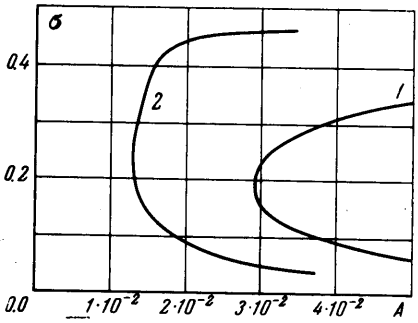
Решение системы (7) при граничных условиях (9) найдем методом Бубнова — Галеркина. Система функций

$$R_k(y) = \frac{2^{k+1/2}}{\sqrt{\Gamma(2k+1)}} y^k e^{-y}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

представляет собой полную систему в пространстве $L_2[0, \infty)$. $\Gamma(2k+1)$ — гамма функция. Согласно методу Бубнова — Галеркина, выбирая в l-м приближении

$$u_0 = \sum_{n=1}^{l} a_n R_n, \quad \Psi_0 = \sum_{n=1}^{l} b_n R_{n+1}$$

и т. д., получаем для коэффициентов a_n, b_n, ... систему линейных однородных алгебраических уравнений. Приравнивая ее определитель нулю, получаем уравнение $f(\sigma, A, \beta) = 0$. Нейтральная кривая устойчивости $\beta = 0$ (фигура) на плоскости (A, σ) находилась при $l = 6$. Для точек, лежащих правее нейтральной кривой, $\beta > 0$. Вычисление нейтральной кривой проводилось для двух волн Толлмина — Шлихтинга: 1) R = 893, $\alpha = 0.157$, $c_r = 0.35$, $\beta_i = 0$; 2) R = 2070, $\alpha = 0.252$, $c_r = 0.35$, $\beta_i = 0$. Сходимость метода Канторовича и метода Бубнова — Галеркина не исследовалась, так что о точности полученных результатов можно судить только из сравнения с экспериментом.



Результаты вычислений показывают, что течение в пограничном слое, после возникновения в нем неубывающих двумерных волн Толлмина — Шлихтинга, неустойчиво относительно трехмерных возмущений, периодических по z, если амплитуда волны Толлмина — Шлихтинга превосходит величину порядка 10^{-2}. Волновое число по z возникающих трехмерных возмущений для минимальной неустойчивой амплитуды двумерной волны равно 0.2—0.25. Отличительной особенностью возникающих трехмерных возмущений является то, что их среднее значение по продольной координате не равно нулю. В плоскости (y, z) эти осредненные трехмерные возмущения образуют систему вихрей, оси которых направлены по потоку. Возникновение вихрей такого рода в пограничном слое наблюдалось в ряде экспериментальных работ (например, в [6]). В работе [6] обнаружено, что появившиеся сначала двумерные возмущения приобретают затем явно выраженный трехмерный характер, если интенсивность u-колебаний скорости двумерных возмущений достигает величины $(5—7) \cdot 10^{-3}$. Волновое число по z возникших трехмерных конфигураций оказывается равным по измерениям 0.42. В плоскости (y, z) обнаружены средние линии тока. В работе [5] также обнаружено возникновение периодических по z трехмерных возмущений, если амплитуда появившихся сначала двумерных возмущений будет превышать некоторую величину. Волновое число по z возникших трехмерных конфигураций зависит от амплитуды двумерных возмущений и оказывается равным 0.32—0.42 для небольших амплитуд и 0.16—0.18 для больших амплитуд.

Поступило 26 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Benney D. J. Finite Amplitude Effects in an Unstable Laminar Boundary Layer. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 3, p. 319—326.
3. Масеев Л. М. Возникновение в пограничном слое вихрей с осями по потоку. Тр. МИИТа, 1968, вып. 284.
4. Масеев Л. М. Перераспределение импульса поперек пограничного слоя вихрями с осями по потоку. Тр. МИИТа, 1968, вып. 284.
5. Hama F. R., Long J. D., Hegarty J. C. On transition from laminar to turbulent flow. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, No. 4, p. 388—394.
6. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary — layer instability. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, No. 1, p. 1—34.