

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. В. БОГДАНОВА

(Ленинград)

В работе рассмотрен параметрический метод исследования пространственного ламинарного движения несжимаемой жидкости в пограничном слое на криволинейной поверхности. Установлено, что решение задачи в общем случае зависит от четырех рядов параметров, построенных по двум составляющим скорости внешнего потока и двум коэффициентам Ляме, характеризующим форму обтекаемой поверхности. Из общих уравнений пространственного пограничного слоя получена система двух «универсальных» уравнений, не содержащих характеристик внешнего потока. Эта система может быть решена раз и навсегда. В качестве примера рассмотрена задача о ламинарном пограничном слое на стенках осесимметричного канала в случае закрученного внешнего потока. Для этого случая получены численно решения системы универсальных уравнений в локально-двухпараметрическом приближении.

1. Основные уравнения ламинарного движения в пространственном пограничном слое. Рассмотрим трехмерное ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое на некоторой поверхности.

При обычных предположениях теории пограничного слоя уравнения движения в пограничном слое в ортогональной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3 (x_3 направлена по нормали к поверхности) имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{v_2^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{v_1 v_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = \\ & = \frac{U_1}{h_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{U_2}{h_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{U_2^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{U_1 U_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{v_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{v_1 v_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = \\ & = \frac{U_1}{h_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{U_2}{h_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \frac{U_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{U_1 U_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(h_2 v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 v_2)}{\partial x_2} + h_1 h_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$, $v_3(x_1, x_2, x_3)$ — составляющие вектора скорости в пограничном слое; $U_1(x_1, x_2)$, $U_2(x_1, x_2)$ — составляющие скорости во внешнем потоке; $h_1(x_1, x_2)$, $h_2(x_1, x_2)$, $h_3 = 1$ — коэффициенты Ляме.

Система (1.1) — (1.3) решается при следующих граничных условиях:

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0 \quad \text{при } x_3 = 0; \quad v_1 \rightarrow U_1(x_1, x_2), \quad v_2 \rightarrow U_2(x_1, x_2) \\ \text{при } x_3 \rightarrow \infty$$

Из уравнения (1.3) следует, что существуют две функции $\psi_1(x_1, x_2, x_3)$

и $\psi_2(x_1, x_2, x_3)$, которые связаны с проекциями скорости соотношениями

$$h_2 v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \quad h_1 v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad h_1 h_2 v_3 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \quad (1.4)$$

Введем новую переменную

$$\eta = B \frac{x_3}{l(x_1, x_2)} \quad (1.5)$$

где B — некоторый постоянный нормирующий множитель, $l(x_1, x_2)$ — линейный масштаб координаты x_3 . Полагая, что

$$v_1 = U_1 \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \eta)}{\partial \eta}, \quad v_2 = U_2 \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, \eta)}{\partial \eta} \quad (1.6)$$

и используя (1.4), (1.5), получаем выражение для третьей компоненты скорости в пограничном слое

$$v_3 = -\frac{1}{B} \left[\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (U_1 h_2)}{\partial x_1} l \Phi_1 + \Phi_1 \frac{U_1}{h_1} \frac{\partial l}{\partial x_1} + l \frac{U_1}{h_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 U_2)}{\partial x_2} l \Phi_2 + \Phi_2 \frac{U_2}{h_2} \frac{\partial l}{\partial x_2} + l \frac{U_2}{h_2} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) \right] \quad (1.7)$$

После подстановки в уравнения (1.1) и (1.2) выражений (1.6) и (1.7) для составляющих скорости v_1, v_2, v_3 в уравнения пограничного слоя войдут некоторые комплексы, зависящие от коэффициентов Ляме, скоростей внешнего потока и их производных. Положим эти комплексы в основу построения рядов параметров, введение которых позволит рассматриваемую систему уравнений сделать «универсальной» в том смысле, что эти уравнения не будут зависеть от характеристик внешнего потока и формы обтекаемой поверхности. Тогда, в общем случае, получим четыре ряда параметров

$$f_{ki}^{[1]} = \frac{U_1^{k+i-1}}{h_1^k h_2^i} \frac{\partial^{k+i} U_1}{\partial x_1^k \partial x_2^i} z^{k+i}, \quad f_{ki}^{[2]} = \frac{U_1^{k+i}}{h_1^{k+1} h_2^i} \frac{\partial^{k+i} h_1}{\partial x_1^k \partial x_2^i} z^{k+i} \quad (1.8) \\ f_{ki}^{[3]} = \frac{U_1^{k+i}}{h_1^k h_2^{i+1}} \frac{\partial^{k+i} h_2}{\partial x_1^k \partial x_2^i} z^{k+i}, \quad f_{ki}^{[4]} = \frac{U_1^{k+i-1}}{h_1^k h_2^i} \frac{\partial^{k+i} U_2}{\partial x_1^k \partial x_2^i} z^{k+i} \\ z = l^2/\nu; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Параметр $f_{00}^{[4]} = U_2/U_1$ обозначим через σ ; параметры $f_{00}^{[1]}$, $f_{00}^{[2]}$, $f_{00}^{[3]}$, равные единице, введены в целях общности записи.

Параметры $f_{ki}^{[1]}$, $f_{ki}^{[4]}$ содержат производные по x_1 и x_2 от скоростей U_1 и U_2 и поэтому характеризуют влияние продольного и поперечного распределения скоростей во внешнем потоке. Параметры $f_{ki}^{[2]}$, $f_{ki}^{[3]}$ содержат производные от коэффициентов Ляме и учитывают непосредственно влияние формы обтекаемой поверхности. В частных случаях плоского пограничного слоя и пограничного слоя на крыле со скольжением, когда $h_1 = h_2 = 1$ и производные по координате x_2 равны нулю, параметры $f_{ki}^{[2]} = f_{ki}^{[3]} = 0$ и $f_{ki}^{[4]} = 0$ при $i \neq 0$; а параметры $f_{k,0}^{[1]}$ являются обычными [1, 2] параметрами плоской задачи

$$f_{k0}^{[1]} = U_1^{k-1} \frac{d^k U_1}{dx_1^k} z^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Кроме того, в случае плоского пограничного слоя все $f_{ki}^{[4]} = 0$, а в случае крыла со скольжением из всех $f_{ki}^{[4]}$ остается не равным нулю только параметр σ .

Предположим, что функции Φ_1 и Φ_2 , определяющие профили скоростей в пограничном слое, зависят от переменной η и параметров $f_{ki}^{[r]}$ ($r = 1, 2, 3, 4$), которые, в свою очередь, будут функциями от x_1, x_2 . Покажем, что при сделанном предположе-

нии можно получить «универсальные» уравнения относительно функций $\Phi_1(\eta; \sigma, f_{10}^{[1]}, f_{01}^{[1]}, \dots)$, $\Phi_2(\eta; \sigma; f_{10}^{[1]}, f_{01}^{[1]}, \dots)$. Тогда задачу об интегрировании системы уравнений в частных производных (1.1)–(1.3), которую необходимо решать каждый раз для соответствующих конкретных условий, можно разделить на две. Вначале интегрируется система универсальных уравнений, раз и навсегда, независимо от условий во внешнем потоке. Для получения решения конкретной задачи о движении жидкости в пограничном слое на заданной поверхности при заданном внешнем потоке следует решить уже более простую задачу, которая заключается в интегрировании дифференциального уравнения первого порядка.

2. Вывод основных интегральных соотношений. При помощи обычных преобразований, применяемых в теории пограничного слоя, из уравнений (1.1)–(1.3) можно получить два уравнения импульсов

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial \delta_{11}^{**}}{\partial x_1} + \frac{1}{n_2} \frac{U_2}{U_1} \frac{\partial \delta_{21}^*}{\partial x_2} + \frac{2}{U_1} \frac{\delta_{11}^{**}}{n_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\delta_{21}^{**}}{U_1^2} \frac{1}{n_2} \frac{\partial (U_1 U_2)}{\partial x_2} + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \left[\delta_{11}^{**} - \frac{U_2^2}{U_1^2} (\delta_{22}^{**} + \delta_2^*) \right] + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{U_2}{U_1} (2\delta_{11}^{**} + \delta_2^*) + \\ & + \frac{\delta_1^*}{U_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{U_2}{U_1^2} \frac{\delta_2^*}{h_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{\tau_{wx_1}}{\rho U_1^2} = \frac{\nu}{U_1 l} \zeta_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{U_2}{U_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \delta_{12}^{**}}{\partial x_1} + \frac{U_2^2}{U_1^2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \delta_{22}^{**}}{\partial x_2} + \frac{\delta_{12}^{**}}{h_1} \frac{1}{U_1^2} \frac{\partial (U_1 U_2)}{\partial x_1} + 2 \frac{\delta_{22}^{**}}{h_2} \frac{U_2}{U_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \frac{U_2}{U_1} (2\delta_{12}^{**} + \delta_1^*) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \left[\frac{U_2^2}{U_1^2} \delta_{22}^{**} - (\delta_{11}^{**} + \delta_1^*) \right] + \\ & + \frac{1}{h_1} \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \delta_1^* + \frac{U_2}{U_1^2} \frac{\delta_2^*}{h_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{\tau_{wx_2}}{\rho U_1^2} = \frac{\nu U_2}{U_1^2 l} \zeta_2 \end{aligned}$$

$$\delta_{mn}^{**} = \int_0^{\infty} \frac{v_m}{U_m} \left(1 - \frac{v_n}{U_n} \right) dx_3, \quad \delta_n^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_n}{U_n} \right) dx_3 \quad (2.2)$$

$$\zeta_n = \left[\frac{\partial (v_n / U_n)}{\partial (x_3 / l)} \right]_{x_3=0} \quad (n = 1, 2, \quad m = 1, 2)$$

При этом $\delta_{12}^{**} = \delta_{21}^{**} - \delta_1^* + \delta_2^*$.

При сделанном ранее предположении относительно функций Φ_1 и Φ_2 коэффициенты трения ζ_n и безразмерные «условные» толщины пограничного слоя

$$H_{mn}^{**} = \frac{\delta_{mn}^{**}}{l}, \quad H_n^* = \frac{\delta_n^*}{l} \quad (2.3)$$

будут зависеть только от параметров $f_{ki}^{[r]}$.

Определим необходимые для дальнейших выводов производные от параметров $f_{ki}^{[r]}$ по x_1 и x_2 . Дифференцируя (1.8) по x_1 и x_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{h_1} z \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial x_1} &= N_{k+1, i}^{[r]} + (k+i) \frac{U_1}{h_1} f_{ki}^{[r]} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{U_2}{h_2} z \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial x_2} &= N_{k, i+1}^{[r]} + (k+i) \frac{U_2}{h_2} f_{ki}^{[r]} \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$f_{ki}^{[r]} a_{i0}^{[r]} + f_{k+1, i}^{[r]} = N_{k+1, i}^{[r]}, \quad \sigma f_{ki}^{[r]} a_{0i}^{[r]} + f_{k, i+1}^{[r]} \sigma = N_{k, i+1}^{[r]}$$

при этом коэффициенты $a_{10}^{[r]}$ и $a_{01}^{[r]}$ для $r = 1, 2, 3$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{10}^{[r]} &= (k+i)f_{10}^{[1]} - kf_{10}^{[2]} - if_{10}^{[3]} - f_{10}^{[r]} \\ a_{01}^{[r]} &= (k+i)f_{01}^{[1]} - kf_{01}^{[2]} - if_{01}^{[3]} - f_{01}^{[r]} \end{aligned}$$

При $r = 4$ имеем

$$a_{10}^{[4]} = a_{10}^{[1]}, \quad a_{01}^{[4]} = a_{01}^{[1]}$$

Уравнения (2.1) при помощи выражений (1.8), (2.2) – (2.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{U_1}{h_1} D_{11} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{U_2}{h_2} D_{21} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2F_1^* - \\ &- 2 \sum_{r=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\partial H_{11}^{**}}{\partial f_{ki}^{[r]}} N_{k+1, i}^{[r]} + \frac{\partial H_{21}^{**}}{\partial f_{ki}^{[r]}} N_{k, i+1}^{[r]} \right] = 2F_1^{**} \\ &\sigma \frac{U_1}{h_1} D_{12} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \sigma \frac{U_2}{h_2} D_{22} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2F_2^* - \\ &- 2\sigma \sum_{r=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\partial H_{12}^{**}}{\partial f_{ki}^{[r]}} N_{k+1, i}^{[r]} + \frac{\partial H_{22}^{**}}{\partial f_{ki}^{[r]}} N_{k, i+1}^{[r]} \right] = 2F_2^{**} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$D_{mn} = H_{mn}^{**} + 2 \sum_{r=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (k+i) f_{ki}^{[r]} \frac{\partial H_{mn}^{**}}{\partial f_{ki}^{[r]}}$$

$$\begin{aligned} F_1^* &= -H_{11}^{**}(2f_{10}^{[1]} + f_{10}^{[3]}) - H_{21}^{**}(f_{01}^{[4]} + \sigma f_{01}^{[1]} + 2\sigma f_{01}^{[2]}) - \\ &- H_1^* f_{10}^{[1]} + \sigma^2 H_{22}^{**} f_{10}^{[3]} + H_2^* (\sigma^2 f_{10}^{[3]} - \sigma f_{01}^{[2]} - \sigma f_{01}^{[1]}) + \zeta_1 \\ F_2^* &= -H_{12}^{**}(f_{10}^{[4]} + \sigma f_{10}^{[1]} + 2\sigma f_{10}^{[3]}) - \sigma H_{22}^{**}(2f_{01}^{[4]} + \sigma f_{01}^{[2]}) - \\ &- H_1^* (\sigma f_{10}^{[3]} - f_{01}^{[2]} + f_{10}^{[4]}) + H_{11}^{**} \sigma f_{01}^{[2]} - \sigma H_2^* f_{01}^{[4]} + \sigma \zeta_2 \end{aligned}$$

Разрешив уравнения (2.5) относительно производных $\partial z / \partial x_1$ и $\partial z / \partial x_2$, перепишем их в виде

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{2}{D} \left(D_{22} F_1^{**} - \frac{D_{21}}{\sigma} F_2^{**} \right), \quad \frac{U_2}{h_2} \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{2}{D} \left(\frac{D_{11}}{\sigma} F_2^{**} - D_{12} F_1^{**} \right) \\ D &= D_{11} D_{22} - D_{12} D_{21} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя соотношения (2.4) и (2.6), можно производные от параметров по переменным x_1 и x_2 представить в следующем, удобном для дальнейшего виде:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{h_1} z \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial x_1} &= N_{k+1, i}^{[r]} + (k+i) f_{ki}^{[r]} \frac{2}{D} \left(D_{22} F_1^{**} - \frac{D_{21}}{\sigma} F_2^{**} \right) = \theta_{k+1, i}^{[r]} \\ \frac{U_2}{h_2} z \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial x_2} &= N_{k, i+1}^{[r]} + (k+i) f_{ki}^{[r]} \frac{2}{D} \left(\frac{D_{11}}{\sigma} F_2^{**} - D_{12} F_1^{**} \right) = \theta_{k, i+1}^{[r]} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из способа получения выражений (2.7) следует, что $\theta_{k+1, i}^{[r]}$ и $\theta_{k, i+1}^{[r]}$ являются функциями только параметров $f_{ki}^{[r]}$.

3. Универсальные уравнения пространственного пограничного слоя. Соотношения (2.7) позволяют произвести в основных уравнениях пограничного слоя переход от производных по переменным x_1 и x_2 к производным по параметрам согласно формулам

$$\frac{U_1}{h_1} z \frac{\partial}{\partial x_1} = \sum_{r=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial f_{ki}^{[r]}} \theta_{k+1, i}^{[r]}, \quad \frac{U_2}{h_2} z \frac{\partial}{\partial x_2} = \sum_{r=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial f_{ki}^{[r]}} \theta_{k, i+1}^{[r]} \quad (3.1)$$

Тогда при помощи выражений (1.5) — (1.8), (2.6), (3.1) основные уравнения пограничного слоя представим в универсальном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{f_{10}^{[1]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \sigma \frac{f_{01}^{[1]} + f_{01}^{[2]}}{B^2} \left[1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{\sigma^2 f_{10}^{[3]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{2f_{10}^{[1]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \\ + \frac{2f_{01}^{[4]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = K_{11} + K_{21} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \sigma \frac{f_{01}^{[4]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{f_{10}^{[4]} + \sigma f_{10}^{[3]}}{B^2} \left[1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{f_{01}^{[2]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \sigma \frac{2f_{10}^{[1]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \\ + \sigma \frac{2f_{01}^{[4]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \sigma(K_{12} + K_{22}) \end{aligned}$$

$$K_{m,n} = \frac{1}{B^2} \sum_{r=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial f_{ki}^{[r]} \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial f_{ki}^{[r]}} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta^2} \right) \theta_{k+2-m, i+m-1}^{[r]}$$

$$F_1 = 2f_{10}^{[3]} + \frac{2}{D} \left(D_{22} F_1^{**} - \frac{D_{21}}{\sigma} F_2^{**} \right)$$

$$F_2 = 2\sigma f_{01}^{[2]} + \frac{2}{D} \left(\frac{D_{11}}{\sigma} F_2^{**} - D_{12} F_1^{**} \right)$$

Граничные условия

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi_1 = \Phi^{(0)}(\eta), \quad \Phi_2 = \Phi^{(0)}(\eta)$$

$$f_{ki}^{[r]} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{при } \sigma = 0,$$

причем $\Phi^{(0)}(\eta)$ является решением Блязиуса для пластины.

Полученная система уравнений вместе с граничными условиями не содержит $U_1(x_1, x_2)$, $U_2(x_1, x_2)$, $h_1(x_1, x_2)$, $h_2(x_1, x_2)$, т. е. не зависит явно от формы обтекаемой поверхности и конкретных условий во внешнем потоке, а поэтому является универсальной. Следовательно, такую систему достаточно проинтегрировать однажды. По определенным в результате интег-

пирования функциям $\Phi_1(\eta; \sigma, f_{01}^{[1]}, f_{10}^{[1]}, \dots)$, $\Phi_2(\eta; \sigma, f_{01}^{[1]}, f_{10}^{[1]}, \dots)$, характеризующим профили скоростей в пограничном слое, можно найти коэффициенты напряжения трения ζ_1 и ζ_2 , функции H_n^* , H_{mn}^{**} , F_1 , F_2 .

В самом общем случае при наличии бесконечного числа параметров полученную систему универсальных уравнений проинтегрировать, конечно, не представляется возможным. Однако рассмотрение такой системы позволяет обосновать выбор параметров, характерных для отдельных задач пространственного пограничного слоя.

Как и в случае плоского пограничного слоя, следует рассмотреть в первую очередь одно и двухпараметрические приближения, когда систему универсальных уравнений оказывается возможным численно проинтегрировать.

Решение конкретной задачи сводится к определению величины $l^2 = z\nu$, для чего можно использовать уравнения (2.5). Из вида уравнений (2.5) следует, что наиболее удобно за l принимать одну из толщин δ_{mn}^{**} , так как в этом случае соответствующая величина $H_{mn}^{**} = 1$ и производные от нее равны нулю, что упрощает уравнения. При этом с точки зрения общей теории не имеет значения, какой толщине δ_{mn}^{**} отдать предпочтение. Однако при практических приближенных расчетах, когда количество параметров ограничено, следует иметь в виду, что все параметры выражаются через $z = l^2/\nu$. Поэтому важно, чтобы при решении конкретной задачи параметры определялись через толщину, наиболее характерную для течения.

4. Некоторые замечания о выборе параметров. В частных задачах пространственного пограничного слоя обычно нет необходимости сохранять все четыре ряда параметров (1.8). Так, в задаче об обтекании удлиненных тел, когда можно пренебречь продольной кривизной по сравнению с поперечной, остается три ряда параметров, так как $f_{k1}^{[2]} = 0$; при этом уравнения (3.2) несколько упрощаются. В том случае, когда можно пренебречь и поперечной кривизной (например, в задаче об обтекании стреловидного крыла), будут равны нулю и параметры $f_{k1}^{[3]}$.

Следует отметить особенность в использовании параметра σ . Для выяснения этого вопроса напомним, что ряды параметров (1.8) определяются видом начальных параметров (1.8). Так, в задаче об обтекании удлиненных тел, при этом для сохранения универсальности правых частей уравнений необходимо, чтобы функции $\theta^{[r]}_{k+2-m, t+m-1}$ зависели только от тех же параметров (1.8). В связи с этим можно указать на некоторые частные случаи, когда параметр $\sigma = f_{00}^{[4]}$ теряет самостоятельное значение, так как он либо не входит вовсе в левые части уравнений (3.2) (например, в задаче о крыле со скольжением), либо входит только в сочетании с другими параметрами рядов (1.8). Примером может служить задача об осесимметричном течении несжимаемой жидкости в пограничном слое на стенках канала при наличии закрутки во внешнем потоке ($U_2 \neq 0$). В этом случае внешний поток [3] имеет $U_2 r = \text{const}$ ($h_2 = r(x_1)$ — радиус сечения канала, x_1 — координата, которая отсчитывается вдоль обтекающей стенки канала), и следовательно, $\sigma f_{10}^{[3]} = -f_{10}^{[4]}$.

Тогда в левых частях уравнений (3.2) остаются только параметр $f_{10}^{[1]} = f_1$ и произведение $\sigma f_{10}^{[1]}$. Здесь не имеет смысла рассматривать отдельно параметр σ ; удобнее построить второй ряд, приняв за основу произведение $\sigma f_{10}^{[1]} = \sigma_1$. Тогда для указанной задачи характерными будут следующие ряды параметров:

$$f_k, \text{ и } \sigma_k = (U_2 d U_2 / dx_1)^{k-1} U_1^{k-2} z^k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отметим, что для сохранения универсальности правых частей уравнений (3.2) необходимо решать задачу в переменных Е. И. Степанова [4].

После введения параметров f_k , σ_k и переменных Степанова универсальные уравнения для задачи об осесимметричном движении в пограничном слое на поверхности вращения с закрученным внешним потоком принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\sigma_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ \frac{1}{B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\theta_k \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_k} \right) + \theta_k \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial \sigma_k} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_k} \right) \right] \\ \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \frac{1}{B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\theta_k \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_k} \right) + \right. \\ \left. + \theta_k \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta \partial \sigma_k} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

В уравнениях (4.1) введены следующие обозначения:

$$\theta_k = (k-1)f_1 f_k + f_{k+1} + kF_1 f_k, \quad \vartheta_k = (k-2)f_1 \sigma_k + \sigma_{k+1} + kF_1 \sigma_k$$

$$F_1 = 2\xi_1 - 2f_1(2 + H_1) - 2\sigma_1(H_2 + H_{22})$$

5. Пример решения системы универсальных уравнений. Система уравнений (4.1) была решена численным методом в локально-двухпараметрическом приближении, которое заключалось в том, что все параметры в уравнениях (4.1) с номерами $k \geq 2$ принимались равными нулю. В уравнениях (4.1) были оставлены только параметры f_1 и σ_1 ; при этом расчет производился в трех вариантах. В первом варианте в уравнениях были оставлены производные по параметру f_1 и отброшены производные по σ_1 . Во втором варианте были оставлены производные по σ_1 , а отброшены производные по f_1 . В третьем варианте были отброшены производные и по f_1 , и по σ_1 , т. е. рассматривалось автоматическое решение. Универсальные уравнения для первого варианта имели вид

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{\sigma_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{1}{B^2} F_1 f_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial f_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \frac{1}{B^2} F_1 f_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta \partial f_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right)$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(0)}(\eta, \sigma_1), \quad \Phi_2 = \Phi_2^{(0)}(\eta, \sigma_1) \quad \text{при } f_1 = 0$$

При этом из уравнений (5.1) следует, что функция $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^3 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\sigma_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0, \quad F_1^{(0)} = 2\xi_1^{(0)} - 2\sigma_1(H_2^{(0)} + H_{22}^{(0)})$$

Для второго варианта универсальные уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{\sigma_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_1}{B^2} (F_1 - f_1) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \sigma_1 \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \frac{\sigma_1}{B^2} (F_1 - f_1) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta \partial \sigma_1} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_1} \right) \quad (5.2)$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(0)}(\eta, f_1), \quad \Phi_2 = \Phi_2^{(0)}(\eta, f_1) \quad \text{при } \sigma_1 = 0$$

Функции $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ определяются из уравнений

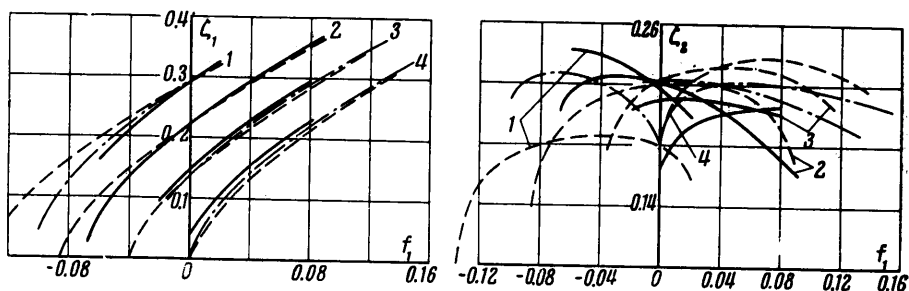
$$\frac{\partial^3 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{2f_1 + F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0$$

$$F_1^{(0)} = 2\zeta_1^{(0)} - 2f_1(2 + H_1^{(0)})$$

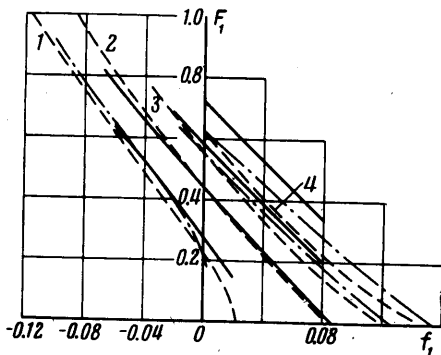
Для получения уравнений в третьем варианте в уравнениях (4.1) отбрасывались полностью правые части

Для численного решения уравнений во всех указанных вариантах была использована разностная схема. На каждом шаге по параметру f_1 или σ_1 уравнения решались



Фиг. 1

лись методом прогонки с итерациями. Шаг по переменной η был выбран равным 0,05. Шаг по параметру f_1 или σ_1 (в зависимости от варианта), как правило, был равен 0,005. В областях вблизи точек отрыва ($\zeta_1 = 0$) и в области, где функция F_1 близка к нулю, шаг по соответствующему параметру уменьшался. Процесс итераций прекращался после того, как максимальная разность значений искомых функций в двух последовательных приближениях становилась меньше $0.1 \cdot 10^{-5}$. Все расчеты были произведены на БЭСМ-2. Основные результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2, на которых построены для нескольких значений параметра σ_1 кривые изменения функций F_1 , ζ_1 и ζ_2 в зависимости от f_1 . На этих фигурах введены следующие обозначения: пунктирные кривые соответствуют первому варианту, сплошные — второму варианту, штрих-пунктирные — третьему. Кривые 1, 2, 3, 4 получены для параметра σ_1 , равного соответственно 0,04, 0, -0,04, -0,08. Следует отметить, что на этих фигурах при $\sigma_1 = 0$ сплошные и штрих-пунктирные кривые совпадают, так как при $\sigma_1 = 0$ уравнения для второго и третьего вариантов одинаковы.



Фиг. 2

По полученным результатам можно судить об общем характере влияния закрутки потока (параметра σ_1) на основные характеристики пограничного слоя. Так, из фиг. 1 видно, что отрыв ($\zeta_1 = 0$) перемещается к точке $f_1 = 0$ при уменьшении σ_1 и при $\sigma_1 \approx -0,08$ отрыв может иметь место при $f_1 = 0$ ($dU_1/dx_1 = 0$). Это свойство пограничного слоя с закрученным внешним потоком можно объяснить, если учесть,

что продольный перепад давления определяется по формуле

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_1} = U_2 \frac{dU_2}{dx_1} + U_1 \frac{dU_1}{dx_1}$$

Отсюда

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_1} z = U_1(\sigma_1 + f_1) \quad (5.3)$$

Из соотношения (5.3) видно, что необходимый для отрыва положительный перепад давления определяется отрицательной суммой значений параметров σ_1 и f_1 . Следовательно, при увеличении по абсолютной величине отрицательных значений σ_1 абсолютное значение параметра f_1 уменьшается. Наоборот, если параметр $\sigma_1 > 0$, то значение $|f_1|$ увеличивается.

На фиг. 1, 2 видна значительная разница в характеристиках пограничного слоя, полученных при расчетах по разным вариантам, т. е. на результаты влияет «локальность» (отбрасывание производных в уравнениях) по одному или другому параметру, или по обоим одновременно. Поэтому представляет большой интерес построение решения в двухпараметрическом приближении, когда в уравнениях сохраняются производные по обоим параметрам. Однако из анализа универсальных уравнений уже видно, что вблизи $f_1 = 0$ двухпараметрическое решение будет близко к полученному здесь локально-двухпараметрическому решению по второму варианту, а в области около $\sigma_1 = 0$ двухпараметрическое решение будет близко к результатам, полученным в первом варианте.

Поступило 16 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения теории ламинарного пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Аэротермодинамика, 1967, № 280.
3. Богданова В. В. Осесимметричный ламинарный пограничный слой в закрученном потоке. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Техническая гидрогазодинамика, 1965, № 248.
4. Степанов Е. И. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией. ПММ, 1947, т. 11, вып. 1.

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Л. М. МАСЕЕВ

(Москва)

Турбулентное течение во многих случаях возникает вследствие неустойчивости ламинарного течения относительно бесконечно малых возмущений [1]. Но процесс перехода ламинарного течения в турбулентное во многом остается невыясненным. Некоторые авторы [2] полагают, что основную роль в процессе перехода имеет нелинейное взаимодействие пульсаций потока. Возможно, что процесс перехода определяется появлением новой неустойчивости. В статье рассматривается вопрос об устойчивости течения, образовавшегося в пограничном слое на плоской пластинке при продольном обтекании ее потоком вязкой несжимаемой жидкости после возникновения в пограничном слое неубывающих двумерных возмущений в виде плоских волн Толлмина — Шлихтинга.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое на плоской пластинке неустойчиво относительно волн Толлмина — Шлихтинга [1], причем двумерные волны Толлмина — Шлихтинга развиваются при данном числе Рейнольдса быстрее, чем трехмерные. С появлением двумерной волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое возникает плоское течение с двумя компонентами скорости. Рассматривая устойчивость получающегося течения относительно бесконечно малых трехмер-