

К ПОСТРОЕНИЮ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ И РАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. Н. КРАЙКО, Р. А. ТКАЛЕНКО

(Москва)

Обычная линейная теория неравновесных и равновесных течений газа дает правильные результаты лишь для весьма малых отклонений параметров потока от невозмущенных значений. Кроме того, если при линеаризации за независимые переменные берутся координаты в плоскости течения, то обтекание выпуклых и вогнутых углов описывается совершенно одинаковым образом. При этом характеристика, выходящая из угловой точки, оказывается (в зависимости от знака излома) скачком сжатия или разрежения. В случае излома стенки осесимметричного канала интенсивность скачка при приближении к оси стремится к бесконечности, что свидетельствует о несовершенстве линейной теории данного типа.

Ниже при построении линейной теории применена модификация, устраняющая отмеченные выше недостатки. Эта модификация заключается в переходе к новым независимым и зависимым переменным, в результате чего коэффициенты точных уравнений, лежащих линеаризации, становятся слабо меняющимися функциями искомых параметров, линеаризованные граничные условия на всех или на части границ совпадают с точными, а скачки разрежения превращаются в пучки волн разрежения конечной ширины. Последнее достигается благодаря тому, что в соответствии с методом деформируемых координат Лайтхилла [1] в качестве одной из независимых переменных берется величина, сохраняющая постоянное значение на каждой характеристике пучка характеристик, выходящих из точки излома¹. Исследование проведено на примере двумерного стационарного неравновесного течения вязкого и нетеплопроводного газа. При этом оказывается, что линейные уравнения на конечном расстоянии от стенок и граничные условия для определения потенциала и неравновесных параметров вне пучков волн разрежения совпадают с уравнениями и условиями обычной линейной теории [2], а соотношения, связывающие значения параметров на замыкающих характеристиках каждого пучка (вне пучков этим характеристикам соответствует одно и то же значение характеристической переменной), на некотором расстоянии от оси или какой-либо отражающей поверхности тождественны условиям на скачках разрежения. Данное обстоятельство делает возможным использование ряда результатов обычной линейной теории.

1. Рассмотрим стационарное плоское или осесимметричное течение вязкого и нетеплопроводного газа, в котором могут протекать неравновесные процессы. Энтальпия h единицы массы газа определяется давлением p , плотностью ρ и n неравновесными параметрами q^1, \dots, q^n . Совокупность этих параметров будем обозначать через q , а зависимости типа $f(q^1, \dots, q^n)$ будем записывать в виде $f(q)$. Пусть x и y — оси прямоугольной системы координат, причем в осесимметричном случае они лежат в меридиональной плоскости и ось x — ось симметрии, u и v — проекции вектора скорости на оси x и y и $v = 0$ и 1 в плоском и осесимметричном случаях соответственно. Если t — время и d/dt — полная производная по времени, то будем рассматривать такие неравновесные процессы, для которых

$$\frac{dq^k}{dt} \equiv u \frac{\partial q^k}{\partial x} + v \frac{\partial q^k}{\partial y} = \tau_k^{-1} \omega^k(p, \rho, q) \quad (k=1, \dots, n) \quad (1.1)$$

¹ Для равновесных течений полухарактеристические (или характеристические) независимые переменные при построении линейной теории применялись, например, в [2-4].

где ω^k — известные функции своих аргументов, $\tau_k \geq 0$ — времена релаксации физико-химических процессов.

Система уравнений, описывающая вместе с (1.1) рассматриваемое течение, кроме линий тока, при сверхзвуковых скоростях, т. е. при $w^2 \equiv u^2 + v^2 > c^2$, где c — замороженная скорость звука, имеет два семейства действительных характеристик, на которых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv \pm c \sqrt{w^2 - c^2}}{u^2 - c^2} \quad \left(c^2 = \frac{\rho h_p}{1 - \rho h_p}, \quad \Omega_p = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p} \right)_{p,q}, \quad \Omega_p = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p} \right)_{p,q} \right) \quad (1.2)$$

Здесь Ω — произвольный термодинамический параметр, а верхний (нижний) знак дает направление характеристик первого (второго) семейства.

Введем характеристические переменные ξ^1 и ξ^2 в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x} + \frac{uv \pm c \sqrt{w^2 - c^2}}{u^2 - c^2} \frac{\partial \xi^i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

где знак плюс берется для $i = 1$, а минус — для $i = 2$. Из (1.2) и (1.3) видно, что $\xi^i = \text{const}$ на каждой характеристике i -го семейства.

В качестве независимых переменных будем использовать одну из характеристических переменных ξ^i и величину ζ , определенную соотношением

$$\zeta(\psi, \xi^i) = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{y^{\nu\rho}} + \zeta_0 \quad (1.4)$$

в котором ψ_0 и ζ_0 — некоторые константы, интегрирование ведется вдоль каждой характеристики i -го семейства, т. е. при $\xi^i = \text{const}$, а ψ — функция тока, введенная в соответствии с уравнением

$$d\psi = y^{\nu\rho}(udy - vdx)$$

Если в дополнение к этому вместо u , v , p и ρ за искомые функции взять связанные с ними величины

$$W = w^2/2, \quad V = v/u, \quad P = \ln p, \quad R = \ln \rho$$

то в переменных $\xi^i \zeta$ рассматриваемое течение будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} W_{\xi} + \frac{F}{\rho} P_{\xi} + \left(W_{\zeta} + \frac{P}{\rho} P_{\zeta} \right) A &= 0 \\ V_{\xi} \mp \frac{\beta p}{\rho u^2} P_{\xi} \mp \frac{w^2}{\beta u} (x_{\xi} + Ax_{\zeta}) P_{\zeta} &+ \left(V_{\zeta} \mp \frac{\beta p}{\rho u^2} P_{\zeta} \right) A = 0 \\ u^2 V_{\zeta} \pm \frac{\beta p}{\rho} P_{\zeta} + \frac{v v}{y} - \omega &= 0, \quad W + h = H(\psi) \\ \tau_k u q_{\xi}^k - (x_{\xi} + Ax_{\zeta}) \omega^k + \tau_k u q_{\zeta}^k A &= 0 \quad (k = 1, \dots, n) \\ x_{\zeta} = \frac{uv \pm c^2 \beta}{c^2(v \pm u\beta)}, \quad y_{\zeta} = \frac{uv \pm c^2 \beta}{c^2(v \pm u\beta)}, \quad \psi_{\zeta} &= y^{\nu\rho} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\left(\varphi_{\zeta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)_{\xi^i}, \quad \varphi_{\xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \right)_{\zeta}, \quad A \equiv \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi^i} \right)_{\psi} = \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{1}{y^{\nu\rho}} \right) \right]_{\psi} d\psi \right)$$

$$\left(\beta = \sqrt{\frac{w^2}{c^2} - 1}, \quad \omega = \sum_{k=1}^n \frac{h_k \omega^k}{\tau_k \rho h_p}, \quad \Omega_k = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q^k} \right)_{p, \rho, q^i \neq k} \right)$$

Здесь $H(\psi)$ — известная функция ψ ; верхние знаки дают систему, описывающую течение в переменных $\xi^1\zeta$, а нижние — в переменных $\xi^2\zeta$; величины u, v, p и ρ , а также c, β, h, ω^k и ω — известные функции W, V, P, R и q .

Отличительной особенностью (1.5) по сравнению с аналогичной системой, записанной, например, в переменных x, y, u, v, p, ρ и q , является более слабая зависимость коэффициентов при производных от самих искомых функций, что весьма существенно при линеаризации. Кроме того, использование ζ и V вместо y и v позволяет при решении линеаризованной задачи удовлетворять точным граничным условиям на всех или на части границ¹.

Все величины удобно считать безразмерными. Припишем верхний индекс градус размерным параметрам, и пусть l°, u_*° и ρ_*° — константы с размерностями длины, скорости и плотности. Приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных координат к l° , скоростей — к u_*° , плотности — к ρ_*° , давления — к $\rho_*^\circ u_*^{\circ 2}$ и энтальпии — к $u_*^{\circ 2}$. Приведение к безразмерному виду параметров q производится с учетом их размерностей, при этом константы τ становятся безразмерными. В задачах, не имеющих характерного линейного размера, $l^\circ = u_*^\circ \tau_i^\circ$, где τ_i° — размерное время релаксации одного из неравновесных процессов. В этом случае $\tau_i = 1$.

2. Рассмотрим сверхзвуковое течение, близкое к однородному равновесному потоку, текущему вдоль оси x слева направо. Параметрам невозмущенного течения припишем индекс ∞ и положим $u_*^\circ = u_\infty^\circ$ и $\rho_*^\circ = \rho_\infty^\circ$. При $x < 0$ тела, возмущающие поток, будем считать отсутствующими.

Представим W, V, P, R и q как сумму невозмущенных значений и добавок и сохраним для последних те же обозначения, что и для самих параметров. Подставив эти разложения в соответствующие уравнения (1.5) и пренебрегая квадратами и более высокими степенями добавок, придем к уравнениям

$$\begin{aligned} W_\xi + \alpha_1 P_\xi &= 0, & V_\xi \mp \alpha_2 P_\xi + \alpha_3 x_\xi P_\xi &= 0 \\ V_\xi \pm \alpha_2 P_\xi + \alpha_4 v \zeta^{-1} V - \alpha_5 P - \alpha_6 R - \sum_{j=1}^n \beta^j q^j &= 0 & (2.1) \\ W + \alpha_7 P + \alpha_8 R + \sum_{j=1}^n \delta^j q^j &= 0, & q_\xi^k &= \left(\alpha_{1k} P + \alpha_{2k} R + \sum_{j=1}^n \varepsilon_k^j q^j \right) x_\xi \\ & & (k = 1, \dots, n) & \end{aligned}$$

причем замена y на ζ в третьем уравнении проведена в соответствии с предпоследним уравнением (1.5). При этом константы ψ_0 и ζ_0 в (1.4) выбраны так, что в невозмущенном потоке $\zeta = y$.

Коэффициенты полученных уравнений даются равенствами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{p}{\rho}, & \alpha_2 &= \frac{\beta p}{\rho u^2}, & \alpha_3 &= \frac{p w^2}{\rho u^3}, & \alpha_4 &= \frac{1}{u} \\ \alpha_5 &= \frac{p \omega_p}{u^2}, & \alpha_6 &= \frac{\rho \omega_p}{u^2}, & \alpha_7 &= p h_p, & \alpha_8 &= \rho h_p \\ \alpha_{1k} &= \frac{p \omega_p^k}{\tau_k u}, & \alpha_{2k} &= \frac{\rho \omega_p^k}{\tau_k u}, & \beta^j &= \frac{\omega_j}{u^2}, & \delta^j &= h_j, & \varepsilon_k^j &= \frac{\omega_j^k}{\tau_k u} \end{aligned} \quad (2.2)$$

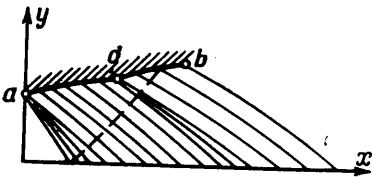
¹ Хотя тот же результат дает применение ψ и V , однако в этом случае часть коэффициентов при производных оказываются сильно меняющимися функциями неизвестных.

Рассмотрение различных газов (в частности, совершенного) показывает, что коэффициенты (2.2) гораздо слабее зависят от параметров, по которым они вычисляются, чем соответствующие коэффициенты обычной линейной теории (так, в последнем случае $\alpha_1 = 1/\rho$), что обеспечивает большую точность предлагаемого приближения. То же обстоятельство приводит к повышению точности счета при использовании переменных P и R вместо p и ρ при численном интегрировании уравнений газовой динамики [8].

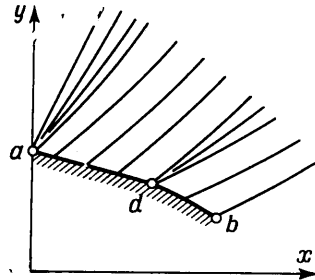
Если коэффициенты (2.2) определять по параметрам невозмущенного течения, то с учетом выбора u^* и ρ^* получим (индекс ∞ в правых частях опущен)

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_3 = p, \quad \alpha_2 = \beta p, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = p\omega_p, \quad \alpha_6 = \omega_p \\ \alpha_7 = p h_p, \quad \alpha_8 = h_p, \quad \alpha_{1k} = p\omega_p^k \tau_k^{-1}, \quad \alpha_{2k} = \omega_p^k \tau_k^{-1} \\ \beta^j = \omega_j, \quad \delta^j = h_j, \quad \varepsilon_k^j = \omega_j^k \tau_k^{-1} \end{aligned}$$

В то же время, так как эти коэффициенты входят в уравнения лишь множителями при добавках, то их можно вычислять по параметрам в любой другой фиксированной точке или по некоторым средним значениям. Это не только не снижает точности результатов, а наоборот может служить средством ее повышения. Последнее обстоятельство из-за сильной нелинейности правых ча-



Фиг. 1



Фиг. 2

стей (1.1) особенно важно для коэффициентов $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}$ и ε_k^j , и для $n = 1$ в обычной линейной теории использовалось Кларком [7].

Выберем переменную ξ^i так, чтобы $x = -\infty$ соответствовало $\xi^i = -\infty$. Тогда из первого и четвертого уравнений (2.1) с учетом (2.2) и того, что при $x = -\infty$ течение не возмущено, найдем

$$P = -\frac{1}{\alpha_1} W, \quad R = -\alpha_9 W - \sum_{j=1}^n \alpha^j q^j \quad (\alpha_9 = c^{-2}, \quad \alpha^j = h_j / \rho h_p)$$

В соответствии с этим остальные уравнения (2.1) можно записать в виде

$$V_\xi \pm \alpha_{10} W_\xi - \alpha_{11} x_\xi W_\xi = 0$$

$$V_\xi \mp \alpha_{10} W_\xi + \alpha_{11} \xi^{-1} V + \alpha_{12} W - \sum_{j=1}^n \mu^j q^j = 0 \quad (2.3)$$

$$q_\xi^k = \left(\sum_{j=1}^n \kappa_{kj} q^j - \chi_k W \right) x_\xi \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$(\alpha_{10} = \beta u^{-2}, \quad \alpha_{11} = w^2 u^{-3}, \quad \alpha_{12} = \rho(\omega_p + c^{-2} \omega_p) u^{-2})$$

$$\left(\mu^j = \frac{h_p \omega_j - h_j \omega_p}{h_p u^2} \quad \nu_k = \frac{\rho(c^2 \omega_p^k + \omega_p^k)}{\tau_k u c^2} \quad \dots = \frac{h_p \omega_j^k - h_j \omega_p^k}{\tau_k h_p u} \right)$$

Здесь, как и ранее, верхние знаки соответствуют переменным $\xi^1 \xi$, а нижние — переменным $\xi^2 \xi$. Выбор переменных зависит от типа рассматриваемой задачи. Для внутренних задач (фиг. 1; a и b — начальная и конечная точки контура, слева от a стенка параллельна оси x), когда течение исследуется в верхней половине плоского

или осесимметричного канала, следует использовать переменные $\xi^2\zeta$. При этом $\xi^2 = \text{const}$ на характеристиках второго семейства, изображенных на фиг. 1 тонкими линиями, в том числе на каждой характеристике пучков характеристик, выходящих из угловых точек. Аналогичным образом для внешних задач (фиг. 2) следует пользоваться переменными $\xi^1\zeta$. В обоих случаях в качестве ψ_0 в (1.4) удобно брать значение функции тока на стенке, а ξ^i вне пучков определять так, чтобы $\xi^i = x$ в точке пересечения характеристики со стенкой. Тогда, если величинам в точках a, b, \dots приписывать соответствующие нижние индексы, то вне пучков имеем

$$x_{\xi} = 1 \quad \text{при } \zeta = y_a, \quad 0 \leq \xi^i \leq x_b \quad (2.4)$$

а граничные характеристики каждого пучка отвечают одному и тому же значению ξ^i . Следовательно, в плоскости $\xi^i\zeta$ области течения вне пучков разрежения соответствует некоторый сплошной прямоугольник. В случае фиг. 1 это будет прямоугольник: $0 \leq \xi^2 \leq x_b, 0 \leq \zeta \leq y_a$, граничные условия на верхней и нижней границах которого записываются в виде

$$V = Y'(\xi^2) \quad \text{при } \zeta = y_a, \quad V = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \\ (Y' \equiv dY/dx) \quad (2.5)$$

Здесь $y = Y(x)$ — уравнение контура стенки ab .

Аналогичным образом в случае фиг. 2 область изменения ξ^1 и ζ есть $0 \leq \xi^1 \leq x_b, y_a \leq \zeta < \infty$, а граничные условия записываются в виде

$$V = Y'(\xi^1) \quad \text{при } \zeta = y_a, \quad |W|, |V| < \infty \\ \text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

Отметим, что в то время, как оба условия (2.6) — точные, в (2.5) точным будет лишь условие на стенке.

Соотношения на разрывах $\xi^i = x_a = 0, \xi^i = x_a$ и т. д., которым в плоскости $\xi^i\zeta$ при рассмотрении течения вне пучков соответствуют вееры волн разрежения, получаются из исследования течения внутри пучков. Здесь в качестве ξ^i на каждой характеристике пучка волн разрежения, выходящей из угловой точки, берется значение V в этой точке. Припишем нижний индекс минус (плюс) параметрам на левой (правой) граничной характеристике пучка. Тогда

$$x_{\xi} = 0, \quad V = \xi^i \quad \text{при } \zeta = y_a \\ |Y_{k-}'| \leq |\xi^i| \leq |Y_{k+}'| \quad (2.7)$$

где k — произвольная точка излома (a, d, \dots), а условия на оси симметрии и при $\zeta \rightarrow \infty$ формулируются, как в (2.5) и (2.6). Параметры W, V и q , а следовательно, P и R на граничных характеристиках пучков непрерывны.

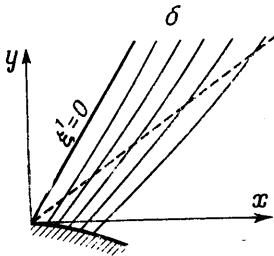
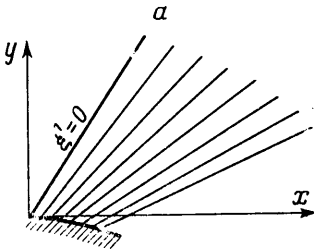
При $\zeta \neq y_a$ функция x_{ξ} определяется уравнением для x_{ξ} из (1.5), которое после дифференцирования по ξ^i , линеаризации и исключения P и R записывается в виде

$$x_{\xi^i} = -V_{\xi} \pm \alpha_{13} W_{\xi} \mp \sum_{j=1}^n \nu^j q_{\xi^i}^j \left(\alpha_{13} = \frac{c^5 + \rho c^2 c_p + \rho c_p}{\beta c^5}, \quad \nu^j = \frac{h_p c_j - h_j c_p}{\beta h_p c^3} \right) \quad (2.8)$$

причем при выводе этого уравнения коэффициенты при производных брались по параметрам невозмущенного потока (индекс ∞ , как и ранее, опущен).

Производную x_{ξ} в отличие от параметров потока в общем случае нельзя представить в виде суммы некоторой невозмущенной постоянной величины и малой добавки. Так, например, при обтекании плоской стенки равновесным потоком (фиг. 3, а) с удалением от тела характеристики расходятся и поэтому x_{ξ} стремится к бесконечности¹. При неравновесном течении в том же случае направление любой характеристики первого семейства на достаточно больших расстояниях от тела стремится к направлению характеристик невозмущенного потока (фиг. 3, б, штриховая линия — равновесная характеристика, т. е. линия, наклон которой определен по равновесной скорости звука), однако и здесь приращение x_{ξ} может быть весьма большим. В общем случае это не позволяет свести (2.3) и (2.8) к линейной системе, по крайней мере при больших ζ .

¹ В действительности, в этом случае величина x_{ξ} незначительна, так как здесь параметры q отсутствуют ($n = 0$), а $W_{\xi} \equiv V_{\xi} \equiv P_{\xi} \equiv 0$.



Фиг. 3

3. Рассмотрим течение в волне разрежения, образующейся при обтекании точки излома. Если ξ^i в пучке характеристик выбрано так, как описано в предыдущем пункте, то $\xi^i \sim \Delta$, где Δ — малая величина, характеризующая порядок возмущения параметров потока. Того же порядка будут W и V в то время, как $W_\xi \sim V_\xi \sim 1$. Допустим, что всюду в пучке x_ξ по порядку величины не превышает $O(1)$. Тогда, если на левой границе пучка $W_{\xi^-} \sim \Delta$, то из (2.3) и (2.7) можно получить, что с точностью до малых более высокого порядка

$$\begin{aligned} V - V_- &= (\xi^i - \xi_-^i) (y_a / \zeta)^{\nu\alpha_4/2} \exp [\pm \lambda (\zeta - y_a)] \quad (i = 1, 2) \\ V \pm \alpha_{10} W &= V_- \pm \alpha_{10} W_-, \quad q^k = q_-^k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.1) \\ (\lambda &= \rho (\omega_p + c^{-2}\omega_\rho) / 2\beta) \end{aligned}$$

где W_- , V_- и q_- — известные функции ζ , а константа λ при конечных и отличных от нуля τ_k отрицательна [5].

Аналогичным образом, используя (2.7), (2.8) и (3.1), придем (полагая $\alpha_4 = 1$) к формулам

$$x_\xi = -\alpha\Phi, \quad x = x_- - \alpha(\xi^i - \xi_-^i)\Phi \quad \left(\alpha = \frac{c^3 + \rho c_p + \rho c^2 c_p}{\beta^2 c^5} \right)$$

$$\left(\Phi = \Phi(\nu, y_a, \zeta, \lambda) = \int_{y_a}^{\zeta} \left(\frac{y_a}{\zeta} \right)^{\nu/2} \exp [\pm \lambda (\zeta - y_a)] d\zeta \right)$$

Из свойств Φ , весьма подробно исследованной в [8], в данном случае существенно ее ограниченность при $\lambda < 0$, из которой следует справедливость сделанного выше предположения о порядке x_ξ . С другой стороны, в случае $\lambda = 0$, который можно рассматривать и как равновесный ($n = 0$) и как замороженный ($\tau_k = \infty$) предел, x_ξ в согласии с замечанием в конце предыдущего пункта неограниченно растет с ростом ζ .

4. Если рассматриваемая область лежит вблизи поверхности тела (что, во всяком случае, предполагает выполнение неравенства $|\zeta - y_a| < |r|$, где r — радиус кривизны стенки), то в соответствии с (2.6) и (2.8) функцию x_ξ в системе (2.3) можно с точностью до малых более высокого порядка заменить единицей. В итоге получим

$$V_\xi \pm \alpha_{10} W_\xi - \alpha_{11} W_\zeta = 0, \quad q_\xi^k = \sum_{j=1}^n \kappa_{kj} q^j - \chi_k W \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$V_\zeta \mp \alpha_{10} W_\zeta + \alpha_4 \nu \zeta^{-1} V + \alpha_{12} W - \sum_{j=1}^n \mu^j q^j = 0$$

Первое из этих уравнений позволяет ввести потенциал φ

$$W = \frac{1}{\alpha_{11}} \varphi_\xi, \quad V = \varphi_\zeta - \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} \varphi_\xi$$

после чего остальные уравнения можно преобразовать к виду

$$2\varphi_{\xi\eta} \mp \varphi_{\eta\eta} + \alpha_4 \nu \eta^{-1} (\varphi_\xi \mp \varphi_\eta) \pm \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{10}} \right)^2 \sum_{j=1}^n a^j q_\xi^k = 0$$

$$q_\xi^k = \sum_{j=1}^n \kappa_{kj} q^j - \chi_k \varphi_\xi \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

$$\left(\chi_k = \frac{\rho u^2 (c^2 \omega_p^k + \omega_\rho^k)}{\tau_k \rho^2 c^2}, \quad a^j = \frac{h_j}{u \rho h_\rho}, \quad \eta = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} \zeta \right)$$

Далее, в соответствии с (3.1) на разрывах, которые при рассмотрении течения вне пучков волн разрежения соответствуют этим пучкам

$$\varphi_{\eta+} - \varphi_{\eta-} = 0, \quad q_+^k - q_-^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.2)$$

Наконец, на начальной характеристике $\xi^i = 0$, которая выходит из точки a и ограничивает слева область возмущенного течения

$$\varphi = \varphi_{\eta} = \varphi_{\xi} = 0, \quad q^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{при } \xi^i = 0 \quad (4.3)$$

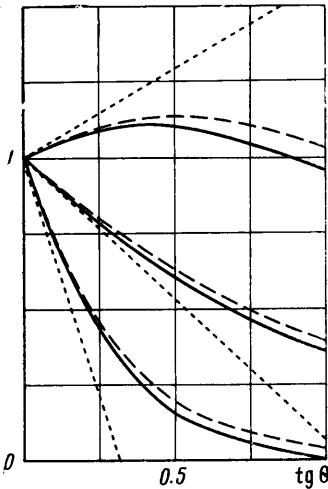
причем эти равенства (при добавлении нижнего индекса минус) имеют место и тогда, когда a — точка излома.

Если коэффициенты в (4.1) определены по параметрам невозмущенного потока (в частности, $\alpha_i = 1$), то уравнения (4.1) вместе с условиями (4.2) и (4.3) и записанными через φ граничными условиями (2.5) или (2.6) совпадают с аналогичными уравнениями и условиями обычной линейной теории [5]. Это позволяет использовать многие полученные результаты (в действительности для этого существенно лишь равенство $\alpha_i = 1$ и то только при $\nu = 1$). Так, оказываются справедливыми формулы для распределения φ , φ_{η} и q на стенке плоского профиля. В то же время можно показать, что условия (3.1) в случае течения в канале (фиг. 1) в каждом пучке справедливы лишь выше характеристики первого семейства, выходящей из точки пересечения левой границы пучка с осью симметрии. Пусть для некоторого пучка ξ_+ — координата точки пересечения такой характеристики с его правой границей. Тогда условия (4.2) справедливы лишь при $\xi > \xi_+$, что в случае фиг. 1 ограничивает диапазон применимости соответствующих формул обычной линейной теории областью слева от характеристики первого семейства, проведенной штриховой линией. При $\xi < \xi_+$ условия (4.2) на правых границах вееров волн разрежения необходимо заменить соотношениями, следующими из решения системы (2.3) в части пучка, которая примыкает к оси. Это решение должно удовлетворять условиям непрерывности W , V и q на характеристике первого семейства и второму равенству (2.5) на оси. При этом в отличие от линейной теории в переменных x и y в осесимметричном случае W и V как внутри, так и вне пучков оказываются ограниченными при любых ξ . Аналогичные соображения следует иметь в виду при рассмотрении других случаев отражения пучков волн разрежения, например, от твердой стенки.

5. В качестве первого примера, иллюстрирующего развитую выше теорию, рассматривалось обтекание плоской стенки равномерным потоком совершенного газа с постоянным показателем адиабаты $\kappa = 1.4$. Число Маха набегающего потока M_{∞} было взято равным двум.

Результаты расчета приведены на фиг. 4, где даны зависимости u , p/p_{∞} и отношения температур T/T_{∞} от $\text{tg } \theta = -v/u$ для диапазона изменения θ от 0 до 45°. Три верхние кривые дают u , три нижние — отношение p/p_{∞} и три средние — T/T_{∞} . При этом сплошными линиями изображены результаты точного расчета, пунктиром — обычной линейной теории и штриховыми — модифицированной линейной теории, развитой выше, причем коэффициенты (2.2) определялись по невозмущенным параметрам. Отношение температур находилось или по точному уравнению состояния с использованием найденных тем, или иным способом p и ρ , или, как в случае пунктирной кривой, по линеаризованному уравнению состояния.

Точность модифицированной теории в отличие от обычной улучшается с уменьшением κ . Так, для $\kappa = 1.1$, $M_{\infty} = 2$ и $\theta = 45^\circ$, когда $p/p_{\infty} = 0.095$, относительные ошибки в определении p/p_{∞} , T/T_{∞} и u равны -0.17 , -0.02 и 0.04 соответственно.



Фиг. 4

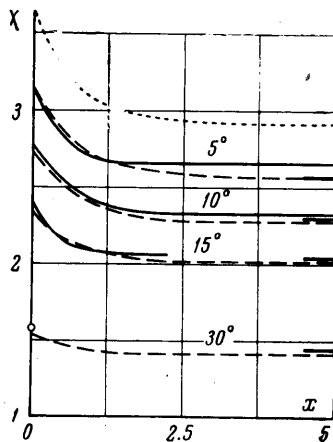
В качестве второго примера рассматривалось неравновесное обтекание стенки с контуром $Y(x) = -x \operatorname{tg} \theta$ при $x > 0$, образованной сторонами плоского тупого угла, равномерным сверхзвуковым потоком ионизованного аргона с $M_\infty = 1.76$, $T_\infty = 12500^\circ \text{K}$ и $p_\infty = 3.65 \text{ атм}$. Все необходимые данные по свойствам среды брались из работы [9], где это течение рассчитывалось численно методом характеристик, а углы θ , как и там, были равны 5, 10, 15 и 30° .

Примем за характерный линейный размер величину

$$l = \tau_1 u h_p / (h_p \omega_1^4 - h_1 \omega_p^4)$$

где параметры справа размерные. При этом для распределения φ , φ_2 и φ_1 на стенке справедливо решение, полученное Дером [10], которое, таким образом, можно использовать как в обычной, так и в модифицированной линейных теориях.

На фиг. 5 приведены кривые распределения $\chi = (p_\infty - p) / p_\infty \operatorname{tg} \theta$ по стенке, где пунктирная кривая — результат обычной линейной теории, в соответствии с которой распределение χ не зависит от угла θ . Штриховыми линиями для разных θ , указанных цифрами над кривыми, даны результаты модифицированной теории, а сплошными линиями — результаты, полученные методом характеристик [9], причем рассмотренному в [9] диапазону изменения x для угла $\theta = 30^\circ$ соответствует кружочек на фиг. 5. Длина l для каждого угла θ , как и в [7], вычислялась как среднеарифметическое величин, полученных по невозмущенным параметрам и их равновесным предельным значениям при $x \rightarrow \infty$. Последние находились по модифицированной теории и, как видно из той же фигуры, весьма близки к точным результатам, изображенным сплошными прямыми отрезками справа.



Фиг. 5

Рассмотренные примеры показывают, что проведенная модификация линейной теории существенно расширяет диапазон ее применения. При этом, если введение переменных $\xi^i \zeta^j$ устраняет некоторые качественные несоответствия теории (скачки разрежения, совпадение поверхности тела с прямой $y = y_a$), то улучшение количественных результатов есть, прежде всего, следствие введения переменных W, V, P и R . Поэтому их применение и в других задачах, в частности, при использовании переменных $\xi^i \eta^j$, которые в некоторых случаях предпочтительнее, чем $\xi^i \zeta^j$, будет приводить к тому же эффекту.

Поступило 29 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Philos. Mag., 1949, vol. 40, No. 311, pp. 1179—1201.
2. Whitham G. B. The flow pattern of a supersonic projectile. Comm. Pure and Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 3, pp. 301—348.
3. Lin G. G. On a perturbation theory based on the method of characteristics. J. Math. and Phys., 1954, vol. 33, No. 2, pp. 117—134.
4. Fox P. A. Perturbation theory of wave propagation based on the method of characteristics. J. Math. and Phys., 1955, vol. 34, No. 3, pp. 133—151.
5. Крайко А. Н. Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 661—673.
6. Moretti G., Bleich G. Three — dimensional flow around blunt bodies. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 9, pp. 1557—1562.
7. Clarke J. F. The linearized flow of a dissociating gas. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 4, pp. 577—595.
8. Крайко А. Н. О возникновении ударных волн при неравновесных течениях. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, стр. 794—803.
9. Glass I. I., Takano A. Nonequilibrium expansion flow of ionized argon around a corner. UTIAS, Report No. 95, AFOSR 5446, 1963.
10. Der J. J. Linearized supersonic nonequilibrium flow past an arbitrary boundary. NASA, Technical report R — 119, 1961.