Присоединяя сюда условия (1.4) — (1.6), придем к частному случаю задачи Стефана, имеющей автомодельное решение

$$h_1 = \begin{cases} h_0 + \dfrac{h_* - h_0}{\operatorname{erf}\mu}\operatorname{erf}\left(\dfrac{\xi}{2\sqrt{\beta t}}\right) \\ h_* - \dfrac{q}{2}\left[\operatorname{Ei}(-\mu^2) - \operatorname{Ei}\left(-\dfrac{\xi^2}{\sqrt{4\beta t}}\right)\right] \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{1 - h_*}{1 - \operatorname{erf}\mu}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\xi}{2\sqrt{\beta t}}\right)\right] \\ 1 - \dfrac{1 - h_*}{1 - \operatorname{Ei}(-\mu^2)}\left[1 - \operatorname{Ei}\left(-\dfrac{\xi^2}{4\beta t}\right)\right] \end{cases}$$

$$\xi_*(t) = 2\mu\sqrt{\beta t}$$

Здесь

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \qquad \operatorname{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$\mu = \begin{cases} \operatorname{inv}\operatorname{erf}\left(\dfrac{h_* - h_0}{1 - h_0}\right) \\ (\operatorname{inv}\{-\operatorname{Ei}[1 - 2(1 - h_*)/q]\})^{1/2} \end{cases}$$

inv — оператор взятия обратной функции.

Поступило 6 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика грунтов. М.— Л., Госстройиздат, 1951.
2. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельными градиентами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
4. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Изд. 3, М., Физматгиз, 1962.
5. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
6. Чарный И. А. О продвижении границы изменения агрегатного состояния при охлаждении или нагреве тел Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 2.

ПРИТОК ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

В. Т. ИВАНОВ, Г. Ш. КАРИМОВ

(*Уфа*)

Предлагается получисленный метод решения осесимметрической задачи об установившемся притоке несжимаемой вязкой жидкости к несовершенной скважине в z-неоднородном пласте [1] с непроницаемой кровлей.

1. Пусть $K_r = K(z)$ — горизонтальная проницаемость, $K_z = K_z(z)$ — вертикальная проницаемость пласта, r_0 — радиус скважины, R — радиус контура, питания, H — мощность пласта, (a, b) — интервал вскрытия пласта, γ — удельный вес жидкости, μ — вязкость жидкости. В этих обозначениях задача притока жидкости к несовершенной скважине математически формулируется следующим образом.

Пусть требуется в области $\Pi(r_0 < r < R,\ 0 < z < H)$ найти решение уравнения

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rK_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0 \tag{1.1}$$

$$\Phi = P + \gamma z$$

при краевых условиях

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\alpha\Phi\right)_{z=0}=0,\quad r_0\leqslant r\leqslant R\qquad(\alpha=\mathrm{const})\tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=H}=0,\qquad r_0\leqslant r\leqslant R\tag{1.3}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0}=0,\qquad 0<z<a,\qquad b<z<H\tag{1.4}$$

$$\Phi|_{r=r_0}=\Phi_c(z),\qquad a\leqslant z\leqslant b,\qquad \Phi|_{r=R}=\Phi_k(z),\qquad 0\leqslant z\leqslant H\tag{1.5}$$

В [1] для решения аналогичной задачи с непроницаемой кровлей предложен метод, основанный на разложении решения по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка. Однако при практической реализации этого метода необходимо, чтобы функция, выражающая вертикальную проницаемость, была такой структуры, которая позволяет легко найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, и одновременно достаточно точно аппроксимировала закон изменения проницаемости пласта. Поэтому получить решение задачи (1.1) — (1.5) этим методом с любой степенью точности удается далеко не всегда.

Указанную задачу будем решать методом прямых [2]. Идея применения этого метода к решению задач фильтрации принадлежит Я. И. Алихашкину [3]. Численная реализация метода прямых значительно упрощается, если удается найти общее решение систем дифференциальных уравнений метода прямых. Возможность получения такого решения при применении метода прямых к уравнениям в частных производных с переменными коэффициентами показана в [4], там же имеются данные о сходимости метода.

Разделим область II на $n+1$ равных частей прямыми $z=z_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ с шагом $h=H/(n+1)$, заменим уравнение (1.1) однопараметрическим семейством дифференциально-разностных схем

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(rK_{ri}\frac{d\Phi_i}{dr}\right)\right]+h^{-2}\Delta^\sigma\Phi_i=0\qquad(i=1,2,\ldots,n)\tag{1.6}$$

Здесь

$$\Delta^\sigma\Phi_i=K_{zi}{}^\sigma(\Phi_{i+1}-\Phi_i)-K_{zi+1}{}^\sigma(\Phi_1-\Phi_{i-1})$$

$$K_{zi}{}^\sigma=\sigma K_{zi+1}+(1-\sigma)K_{zi}\qquad K_{ri}=K_r(z_i),\qquad K_{zi}=K_z(z_i)$$

$\Phi_i=\Phi_i(z)$ — приближенное решение задачи (1.1) — (1.5) на прямой $z=z_i$, σ — параметр схемы $(0\leqslant\sigma\leqslant1)$.

При $\sigma={}^1/_2$ схема имеет второй порядок точности аппроксимации уравнения (1.1), при $\sigma\neq{}^1/_2$ первый.

Заменяя производные в (1.2) и (1.3) разностными отношениями, получаем

$$\Phi_1=\beta_0\Phi_0,\qquad \Phi_n=\Phi_{n+1},\qquad \beta_0=1-\alpha h\tag{1.7}$$

Системы дифференциальных уравнений (1.6) — (1.7) следует интегрировать при краевых условиях

$$\Phi_i'(r_0)=0\qquad(i=1,2,\ldots,m_0),\qquad m_0h\leqslant a\leqslant(m_0+1)h\tag{1.8}$$

$$\Phi_i(r_0)=\Phi_{ci}\qquad(i=m_0+1,\ldots,m_i),\qquad m_1h\leqslant b\leqslant(m_1+1)h\tag{1.9}$$

$$\Phi_i'(r_0)=0\qquad(i=m_1+1,\ldots,n)\tag{1.10}$$

$$\Phi_i(R)=\Phi_{ki}\quad(i=1,2,\ldots,n),\qquad\Phi_{ci}=\Phi_c(z_i),\qquad\Phi_{ki}=\Phi_k(z_i)\tag{1.11}$$

Частные решения однородной системы дифференциальных уравнений (1.6) — (1.7) ищем в виде

$$\Phi_i(r)=\gamma(i)U(r)\tag{1.12}$$

Подстановка (1.12) в (1.6) и (1.7) и разделение переменных приводит к дифференциальным уравнениям

$$U''+\frac{1}{r}U'-\frac{\lambda_s{}^\sigma}{h^2}U=0\qquad(s=1,2,\ldots,n)\tag{1.13}$$

из которых определяем функции $U_s^\sigma(r)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, и к разностной краевой задаче типа Штурма-Лиувилля

$$C_i^\sigma \gamma(i+1) - (A_i^\sigma - \lambda)\gamma(i) + B_i^\sigma \gamma(i-1) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.14}$$

$$\gamma(1) = \beta_0 \gamma(0), \qquad \gamma(n) = \gamma(n+1) \tag{1.15}$$

из которой определяем собственные значения и собственные векторы $\gamma_s^\sigma(i)$ $(s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

Коэффициенты в (1.14), (1.15) вычисляются по формулам

$$C_i^\sigma = K_{zi}^\sigma / K_{ri}, \qquad A_i^\sigma = K_{zi}^\sigma + K_{zi-1}^\sigma / K_{ri}$$

$$B_i^\sigma = K_{zi-1}^\sigma / K_{ri}, \qquad \beta_0 = 1 - \alpha h$$

Матрица задачи (1.14), (1.15) является якобиевой [5]. Характеристический многочлен этой матрицы

$$D_n^\sigma(\lambda) = \begin{vmatrix} (A_1^\sigma - B_1^\sigma\beta_0 - \lambda) & -C_1^\sigma & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -B_2^\sigma & (A_2^\sigma - \lambda) & -C_2^\sigma \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -B_{n-1}^\sigma & (A_{n-1}^\sigma - \lambda) & -C_{n-1}^\sigma \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & -B_n^\sigma & (A_n^\sigma - C_n^\sigma - \lambda) \end{vmatrix}$$

раскрывается по следующим рекуррентным формулам:

$$D_0^\sigma(\lambda) = 1, \qquad D_1^\sigma(\lambda) = A_1^\sigma - B_1^\sigma\beta_0 - \lambda$$

$$D_i^\sigma(\lambda) = (A_n^\sigma - \lambda) D_{i-1}^\sigma(\lambda) - C_{i-1}^\sigma B_i^\sigma D_{i-2}^\sigma(\lambda) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$D_n^\sigma(\lambda) = (A_n^\sigma - C_n^\sigma - \lambda) D_{n-1}^\sigma(\lambda) - C_{n-1}^\sigma B_n^\sigma D_{n-2}^\sigma(\lambda)$$

Собственные значения λ_s^σ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ якобиевой матрицы действительны и различны, им соответствуют линейно-независимые собственные векторы. Для i-й компоненты собственного вектора, принадлежащего к собственному значению λ_s^σ, имеет место следующая явная формула:

$$\gamma_s^\sigma(i) = l_s \left(\prod_{j=1}^{i-1} C_j^\sigma \right)^{-1} D_{i-1}^\sigma(\lambda_s^\sigma) \tag{1.16}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (1.13) имеют вид

$$U_s^\sigma(r) = M_s^\sigma I_0(\alpha_s^\sigma r) + N_s^\sigma K_0(\alpha_s^\sigma r), \qquad \alpha_s^\sigma = \sqrt{\lambda_s^\sigma} / h \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.17}$$

Учитывая (1.12), (1.16) и (1.17), находим частные линейно-независимые решения систем дифференциальных уравнений (1.6), (1.7)

$$\Phi_{is}^\sigma(r) = [M_s^\sigma I_0(\alpha_s^\sigma r) + N_s^\sigma K_0(\alpha_s^\sigma r)] \left(\prod_{j=i}^{i-1} C_j \right)^{-1} D_{i-1}(\lambda_s^\sigma)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, n)$$

а путем суперпозиции частных решений построим общее решение

$$\Phi_i^\sigma(r) = \sum_{s=1}^{n} [M_s^\sigma I_0(\alpha_s^\sigma r) + N_s^\sigma K_0(\alpha_s^\sigma r)] \left(\prod_{j=1}^{i-1} C_i \right)^{-1} D_{i-1}^\sigma(\lambda_s^\sigma) \tag{1.18}$$

Собственные значения λ_s^σ определяются из алгебраического уравнения $D_n^\sigma(\lambda) = 0$. Отыскание корней этого уравнения удобно вести методами выделения множителей [6].

Если принять $K_z = K_r = K = \text{const}$ и $\alpha = 0$, что соответствует задаче притока жидкости в однородной среде с непроницаемой кровлей, то собственные значения определяются формулой [3]

$$\lambda_s = 4\sin^2\frac{\pi s}{2n} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{1.19}$$

С целью проверки численного решения характеристического уравнения, корни (1.19) (для $n = 9$) найдены из уравнения $D_n(\lambda) = 0$ методом Хичкока на ЭВМ «Сетунь». Результаты расчетов совпали до пяти знаков после запятой. Это удовлетворяет требованию практических расчетов.

Если удовлетворить в (1.18) краевым условиям (1.8) — (1.11), то получим систему $2n$ линейных алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными M_s^σ и N_s^σ ($s = 1, 2, \ldots, n$).

Можно показать, что данная система расщепляется на две независимые системы с n неизвестными. Действительно, пусть

$$M_s^\sigma I_0(\alpha_s^\sigma R) + N_s^\sigma K_0(\alpha_s^\sigma R) = E_s^\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.20}$$

тогда для определения E_s^σ, используя краевое условие (1.11), получим систему уравнений с n неизвестными

$$\sum_{s=1}^{n} E_s^\sigma \left(\prod_{j=1}^{i-1} C_j^\sigma\right)^{-1} D_{i-1}^{\sigma}(\lambda_s^\sigma) = \Phi_{ki} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.21}$$

Если из (1.20) выразить M_s^σ через N_s^σ и E_s^σ и подставить полученное выражение для M_s^σ в (1.18), то после элементарных преобразований получим общее решение системы дифференциальных уравнений (1.6), (1.7) в виде

$$\Phi_i^\sigma(r) = \sum_{s=1}^{n} \frac{[E_s^\sigma I_0(\alpha_s^\sigma r) + N_s^\sigma K_0(\alpha_s^\sigma R) I_0(\alpha_s^\sigma r) - K_0(\alpha_s^\sigma r) I_0(\alpha_s^\sigma R)]}{I_0(\alpha_s^\sigma R)} \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{i-1} C_j^\sigma\right)^{-1} D_{i-1}^{\sigma}(\lambda_s^\sigma)$$

Будем предполагать, что неизвестные E_s^σ определены из системы уравнений (1.21). Оставшиеся n произвольных постоянных N_s^σ определим, используя краевые условия (1.8) — (1.10). Это также приводит к решению линейной алгебраической системы уравнений с n неизвестными.

Предложенный алгоритм нахождения произвольных постоянных значительно сокращает объем вычислительной работы.

При малых r величиной

$$I_0(\alpha_s^\sigma r) K_0(\alpha_s^\sigma R) \,/\, I_0(\alpha_s^\sigma R)$$

можно пренебречь, так как она весьма мала для $R / H > 2$. Тогда общее решение принимает более простой и удобный вид

$$\Phi_i^\sigma(r) = \sum_{s=1}^{n} \frac{[E_s^\sigma I_0(\alpha_s^\sigma r) + N_s^\sigma K_0(\alpha_s^\sigma r)]}{I_0(\alpha_s^\sigma R)} \left(\prod_{j=1}^{i-1} C_j^\sigma\right)^{-1} D_{i-1}^{\sigma}(\lambda)$$

Дебит скважины определяется по формуле

$$Q = \frac{2\pi r_0}{\mu} \int_a^b K_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} dz$$

Ввиду того, что $\partial\Phi / \partial r$ известна в точках (r_0, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, величину Q вычисляем по формулам численного интегрирования. Таким образом, метод прямых сохраняет в уравнении (1.1) производную по r, которая необходима для определения величины, являющейся основной целью решения задачи (1.1) — (1.5). Это составляет одно из важных преимуществ метода прямых перед другими численными методами решения задачи притока жидкости к скважине.

Изложенный метод показывает, что для решения задачи (1.1) — (1.5) нет необходимости знать аналитическое задание функций $K_r(z)$, $K_z(z)$, $\Phi_c(z)$ и $\Phi_k(z)$, достаточно иметь значения функций $K_r(z)$ и $K_z(z)$ на прямых $z = z_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и значения потенциалов в точках (r_0, z_i) $(i = m_0 + 1, \ldots, m_1)$, (R, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому решение задачи притока жидкости к совершенной и несовершенной скважине в z-неоднородном пласте может быть получено как для случая сложного аналитического задания указанных функций, так и по результатам экспериментальных данных.

Пользуясь методами, изложенными в [4, 7], можно доказать однозначную разрешимость систем дифференциальных уравнений (1.6), (1.7) при краевых условиях (1.8) — (1.11), а также получить оценки погрешности метода прямых, из которых будет следовать сходимость метода. Таким образом, метод прямых позволяет решить задачу с любой точностью.

2. В п. 1 негласно предполагалась непрерывность коэффициентов уравнения (1.1), так как в случае разрывных коэффициентов должны быть дополнительно заданы условия сопряжения на линиях разрыва.

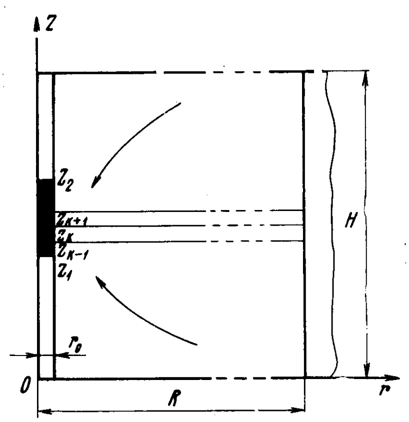
Задачи с разрывными коэффициентами возникают при исследовании пласта, состоящего из нескольких пропластков. Будем предполагать, что горизонтальная проницаемость K_r и вертикальная проницаемость K_z в каждом из пропластков есть функция координаты z. Как частный случай они могут принимать постоянные значения в каждом из пропластков.

Следует заметить, что так называемые многослойные задачи связаны с математическими трудностями аналитического и численного решения. Так, например, при решении задачи методом Фурье собственные значения краевой задачи Штурма-Лиувилля определяются из трансцендентных уравнений, а это связано с определенными математическими трудностями. Аналогичная задача возникает и при применении метода прямых, с той лишь разницей, что собственные значения разностной задачи типа Штурма-Лиувилля определяются из алгебраического уравнения, как нули некоторого полинома. В настоящее время методика решения этих задач достаточно хорошо разработана. Поэтому в некоторых случаях целесообразно решать задачу методом прямых, несмотря на то, что имеется решение в замкнутом виде.

Чтобы не усложнять запись формальной стороной дела, будем предполагать пласт, состоящий из двух пропластков, с проницаемостями K_{1r}, K_{2r}, K_{1z}, K_{2z} и границей раздела пропластков z_p. В этом случае коэффициенты K_r и K_z в уравнении (1.1) имеют вид

$$K_r = \begin{matrix} K_{1r} & \text{при } 0 \leqslant z < z_p, \\ K_{2r} & \text{при } z_p < z \leqslant H \end{matrix}$$

$$K_z = \begin{matrix} K_{1z} & \text{при } 0 \leqslant z < z_p \\ K_{2z} & \text{при } z_p < z \leqslant H \end{matrix}$$



Краевые условия (1.2)—(1.5) остаются прежними, а на границе раздела пропластков должны выполняться условия сопряжения

$$\Phi(r, z_p + 0) = \Phi(r, z_p - 0) \tag{2.1}$$

$$K_{1z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=z_p+0} = K_{2z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=z_p-0}, \tag{2.2}$$

$$K_{1r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{z=z_p+0} = K_{2r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{z=z_p-0}$$

И в этом случае будем решать задачу методом прямых, но с предварительным сглаживанием коэффициентов уравнения [8, 9]. Для этого в интервале $z_p - \Delta \leqslant z \leqslant z_p + \Delta$ функции K_r и K_z заменим линейными K_{0r}- и K_{0z}-уравнениями прямолинейного отрезка, соединяющего точки $(z_p - \Delta, K_r(z_p - \Delta))$ и $(z_p + \Delta, K_z(z_p + \Delta))$, а также $(z_p - \Delta, K_z(z_p - \Delta))$ и $(z_p + \Delta, K_z(z_p + \Delta))$. В результате получаем сглаженные функции

$$K_r = \begin{matrix} K_{1r} & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant z_p - \Delta, \\ K_{0r} & \text{при } z_p - \Delta \leqslant z \leqslant z_{p+\Delta} \\ K_{2r} & \text{при } z_p + \Delta \leqslant z \leqslant H, \end{matrix}$$

$$K_z = \begin{matrix} K_{1z} & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant z_p - \Delta \\ K_{0z} & \text{при } z_p - \Delta \leqslant z \leqslant z_{p+\Delta} \\ K_{2z} & \text{при } z_p + \Delta \leqslant z \leqslant H \end{matrix}$$

После сглаживания задача решается по методике, описанной в п. 1.

3. Следует особо остановиться на том случае, когда интервал вскрытия пласта либо сравнительно мал по сравнению с мощностью пласта, либо он состоит из нескольких интервалов, разделенных промежутками, не вскрывшими пласт. Предложенная в п. 1 схема метода прямых с равномерным шагом может привести к большому объему вычислительной работы. Между тем практика расчетов подобных задач показывает, что достаточно взять 10—12 прямых, чтобы получить нужную для практики точность.

В связи с этим целесообразно применение метода прямых с неравномерным шагом. Для этого область П разделим (фигура) на $n+1$ частей с шагом $h_i = z_i - z_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, который зависит от i [10]. Тогда система дифференциальных уравнений метода прямых принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(rK_{ri}\frac{d\Phi_i}{dr}\right)\right] + \frac{1}{\hbar_i}\left[a_{i+1}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}} - a_i\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}\right] = 0 \qquad (3.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Phi_1 = \beta_0\Phi_0, \qquad \Phi_n = \Phi_{n+1}, \qquad \beta_0 = 1 - \alpha h \qquad (3.2)$$

$$\hbar = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \qquad a_i = \left(\frac{1}{h_i}\int_a^b \frac{dz}{K_z(z)}\right)^{-1}$$

Коэффициент a_i с точностью до $O(h^2)$ можно принять равным

$$a_i = K_{zi-1/2} = K_z\left(z_i - \frac{h_i}{2}\right)$$

Схема (3.1) аппроксимирует уравнение (1.1) с точностью до $O(h^2)$ $(h_0 = \max_i h_i)$ в норме

$$\|\psi\| = \left[\sum_{i=1}^{n-1} h_i\left(\sum_{k=1}^{i-1} \hbar_k\psi_k\right)^2\right]^{1/2}$$

Применение переменного шага при интегрировании уравнения (1.1) методом прямых позволяет уменьшить шаг на интервалах вскрытия пласта и тем самым получить достаточную информацию о решении на исследуемых участках.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (3.1)—(3.2) находится так же, как показано в п. 1.

Поступило 23 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Т. Ф. О притоке жидкости к несовершенной скважине в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Лисковец О. А. Метод прямых. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 12.
3. Алихашкин Я. И. Решение задачи о несовершенной скважине методом прямых. Сб. «Вычислительная математика», 1957, № 1.
4. Иванов В. Т. Решение и исследование некоторых задач электрохимии методом прямых Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 3.
5. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 2. М., Физматгиз, 1959.
7. Иванов В. Т. Решение методом прямых некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 6.
8. Самарский А. А., Моисеенко В. Д. Экономичная схема сквозного счета задачи Стефана. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5.
9. Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, изд. 3, М., «Наука», 1966.