

ФИЛЬТРАЦИЯ В НАПОРНОМ ПЛАСТЕ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ ГРАДИЕНТОВ КРОВЛИ И ПОДОШВЫ

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ, С. Т. РЫБАКОВА

(Новосибирск)

Взаимодействие водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми пропластками, является одним из основных вопросов в гидрогеологии. Существенным продвижением в деле изучения фильтрации вод в слоистых толщах грунта было принятие широко известной гипотезы Мятлева — Гиринского, согласно которой движение жидкости в водоносных горизонтах определяется по их мощности и считается горизонтальным, а перетоки сквозь плотные пропластки, проницаемость которых, как правило, на несколько порядков ниже проницаемости водоносных горизонтов, осуществляются в вертикальной плоскости. Величина перетоков принимается пропорциональной разности напоров в соседних горизонтах.

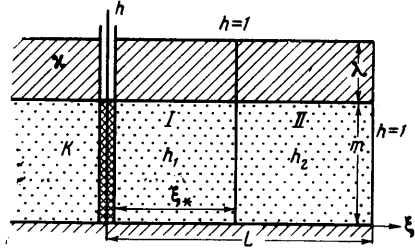
Известно, что фильтрация в тонкодисперсных средах (глины, суглинки и т. п.), благодаря аномальным свойствам связанной воды, отличается от фильтрации в средах с более крупным размером пор (пески) наличием начальных градиентов напора [1], ниже которых тонкодисперсная среда практически непроницаема. Для плотных глин, например, начальные градиенты могут достигать значений 15—30.

Ниже на простейших задачах, решаемых в рамках схемы Мятлева — Гиринского, показывается, что наличие даже сравнительно небольших начальных градиентов фильтрации в глинистых пропластках значительно меняет картину движения в основном водоносном горизонте.

1. Установившееся движение в пласте конечной протяженности. Рассмотрим приток жидкости к галерее или скважине в напорном горизонте с коэффициентом фильтрации k , мощностью m , с непроницаемой подошвой и слабопроницаемой кровлей мощности λ , с коэффициентом фильтрации κ и начальным градиентом J (фиг. 1). Предположим, что вне кровли пласта и при $\xi = L$ напор постоянный, и все величины, имеющие размерность длины, отнесены к величине этого напора.

Вертикальную скорость фильтрации w сквозь кровлю пласта будем определять формулой [2]

$$w = \begin{cases} \kappa \lambda^{-1} [1 - (h + J\lambda)] & (h < h_*) \\ 0 & (h \geq h_*) (h_* = 1 - J\lambda) \end{cases} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь $h = h(\xi)$ напор в пласте, ξ — безразмерная координата. Будем считать, что в случае параллельного прямолинейного движения задан напор на галерее $h_0 < h_*$, а в случае осесимметричного движения задан дебит скважины Q .

Тогда, согласно (1.1), область движения разбивается некоторой точкой $\xi = \xi_*$ на две части, напоры в которых $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta h_1 - \omega^2 (h_1 - h_*) &= 0 & (0 < \xi < \xi_*) & \quad (\omega^2 = \kappa / km\lambda) \\ \Delta h_2 &= 0 & (\xi_* < \xi < L) & \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.3)$$

соответственно для галереи и скважины. Граничные условия для функций $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ примем в виде:

для галереи

$$h_1(0) = h_0, \quad h_2(L) = 1 \quad (1.4)$$

для скважины

$$\left(\xi \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = q = \frac{Q}{2\pi km}, \quad h_2(L) = 1 \quad (1.5)$$

Неразрывность напоров и расходов при переходе через точку (окружность) $\xi = \xi_*$, в которой прекращается переток жидкости через кровлю пласта, выражается следующим образом:

$$h_1(\xi) = h_2(\xi) = h_*, \quad \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \quad (\xi = \xi_*) \quad (1.6)$$

Общее решение уравнений (1.2) и (1.3) имеет вид:

$$h_1 = \begin{cases} h_* + C_1 e^\eta + C_2 e^{-\eta} \\ h_* + C_1 K_0(\eta) + C_2 I_0(\eta) \end{cases} \quad (\eta = \omega \xi), \quad h_2 = \begin{cases} D_1 + D_2 \xi \\ D_1 + D_2 \ln \xi \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем первые строки относятся к галерее, вторые — к скважине; $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка соответственно.

Определяя произвольные постоянные C_1 , C_2 , D_1 , D_2 из условий (1.4) и (1.5) и первых двух условий (1.6), найдем

$$h_1 = \begin{cases} h_* + (h_0 - h_*) \text{sh}(\eta_* - \eta) / \text{sh} \eta_* & (\eta_* = \omega \xi_*) \\ h_* - q [K_0(\eta) I_0(\eta_*) - I_0(\eta) K_0(\eta_*)] / I_0(\eta_*) \end{cases} \quad (1.7)$$

$$h_2 = \begin{cases} 1 - J\lambda(l - \eta) / (l - \eta_*) & (l = \omega L) \\ 1 - J\lambda [\ln(\eta/l)] / [\ln(\eta_*/l)] \end{cases} \quad (1.8)$$

Последнее из условий (1.6) дает трансцендентное уравнение для определения величины η_*

$$\eta_* = \begin{cases} l + J\lambda(h_0 - h_*)^{-1} \text{sh} \eta_* \\ (J\lambda/q) [\ln(l/\eta_*)]^{-1} I_0(\eta_*) [K_1(\eta_*) I_0(\eta_*) + I_1(\eta_*) K_0(\eta_*)]^{-1} \end{cases}$$

$$(K_1(x) = -K_0'(x), \quad I_1(x) = I_0'(x))$$

которое можно решать графически.

Заметим, что

$$I_0(x) [K_1(x) I_0(x) + I_1(x) K_0(x)]^{-1} \approx x \quad (0 \leq x \leq 0.2) \quad (1.9)$$

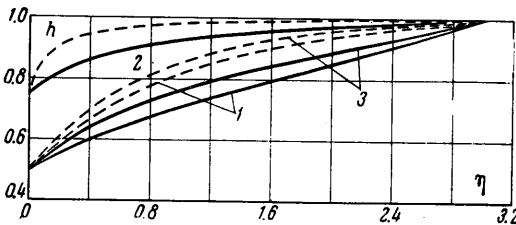
с точностью до 0.01 [3]. Поэтому в случае осесимметрического движения для достаточно большого интервала изменения параметров задачи можно принять

$$\eta_* = l \exp(-J\lambda/q)$$

На фиг. 2 изображены кривые напоров (1 — для галерей, 2 — для скважины) при следующих значениях параметров:

$$h_0 = 0.5, \quad J\lambda = 0.25,$$

$$J\lambda/q = 5, \quad l = 3$$



Фиг. 2

При этом $\eta_* = 1.30$ для галерей и $\eta_* = 0.02$ для скважины.

Для сравнения пунктирными линиями начерчены кривые напоров, вычисленные без учета начального градиента по формулам

$$h = \begin{cases} 1 - (1 - h_0) \frac{\text{sh}(l - \eta)}{\text{sh} l} \\ 1 - q \frac{K_0(\eta) I_0(l) - K_0(l) I_0(\eta)}{I_0(l)} \end{cases}$$

Аналогично могут быть решены более общие задачи о взаимодействии двух и более горизонтов с учетом начальных градиентов перемежающихся их пропластиков.

Приведем решение задачи о параллельно-прямолинейном притоке грунтовых вод к галерее в пласте со слабопроницаемыми кровлей и подошвой. Обозначим индексами 0 и 1 параметры кровли и подошвы пласта. Пусть напоры вне кровли и подошвы пласта постоянны и равны H_0 и H_1 соответственно, а на контуре питания сохраняется постоянный единичный напор.

Тогда при выполнении неравенства

$$h_*^0 > h_*^1 > h_0 \quad (h_*^0 = H_0 - J_0 \lambda_0, \quad h_*^1 = H_1 - J_1 \lambda_1)$$

область движения разбивается на три части, напоры в которых $h_1(\xi)$, $h_2(\xi)$, $h_3(\xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 h_1}{d\xi^2} - \omega_1^2 (h_1 - h_*^1) + \omega_2^2 (h_*^0 - h_*^1) = 0 \quad (0 < \xi < \xi_1)$$

$$\frac{d^2 h_2}{d\xi^2} - \omega_2^2 (h_2 - h_*^0) = 0 \quad (\xi_1 < \xi < \xi_2), \quad \frac{d^2 h_3}{d\xi^2} = 0 \quad (\xi_2 < \xi < L)$$

$$\left(\omega_1^2 = \frac{1}{km} \left(\frac{\kappa_0}{\lambda_0} + \frac{\kappa_1}{\lambda_1} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{\kappa_0}{\lambda_0 km} \right)$$

Здесь ξ_1 , ξ_2 — точки, напор в которых принимает значения h_*^1 и h_*^0 соответственно.

Принимая граничные условия такими же, как и в предыдущем случае, выпишем решение приведенной системы

$$h_1(\eta) = h_*^0 + \left[(h_0 - h_*^0) \operatorname{sh} \frac{\omega_1 (\eta_1 - \eta)}{\omega_2} + (h_*^1 - h_*^0) \operatorname{sh} \frac{\omega_1 \eta}{\omega_2} \right] \operatorname{csch} \frac{\omega_1 \eta_1}{\omega_2}$$

$$h_2(\eta) = h_*^0 + \frac{1 - h_*^0}{l - \eta_2} \operatorname{sh}(\eta - \eta_2) \quad h_3(\eta) = 1 - (1 - h_*^0) \frac{l - \eta}{l - \eta_2}$$

$$(\eta = \omega_2 \xi, \quad \eta_1 = \omega_2 \xi_1, \quad \eta_2 = \omega_2 \xi_2, \quad h_0 = [\omega_2^2 h_*^0 + (\omega_1^2 - \omega_2^2) h_*^1] / \omega_1^2)$$

Величины η_1 и η_2 находятся из трансцендентного уравнения вида

$$\eta_2 = l - \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{(1 - h_*^0) \operatorname{ch}(\eta_1 - \eta_2)}{(h_*^1 - h_*^0) \operatorname{ch}(\omega_1 \eta_1 / \omega_2) - h_0 + h_*^0} \operatorname{sh} \frac{\omega_1 \eta_1}{\omega_2}$$

где

$$\eta_1 = \eta_2 + \ln \left\{ \frac{(h_*^1 - h_*^0)(l - \eta_2)}{1 - h_*^0} + \left[\frac{(h_*^1 - h_*^0)^2 (l - \eta_2)^2}{(1 - h_*^0)^2} + 1 \right]^{1/2} \right\}$$

На фиг. 2 цифрой 3 отмечены кривые напоров, построенные для следующих значений параметров:

$$h = 0.5, \quad H_0 = H_1 = 1, \quad J_0 \lambda_0 = 0.125, \quad J_1 \lambda_1 = 0.250, \quad l = 3$$

При этом получено $\eta_1 = 0.92$, $\eta_2 = 1.88$. Пунктирной линией обозначен случай $J_0 = J_1 = 0$.

2. Неустановившееся движение в бесконечном пласте. Рассмотрим бесконечный пласт со слабопроницаемой кровлей и непроницаемой подошвой с постоянным единичным напором в начальный момент времени.

Пусть при $t > 0$ (t — время) напор на галерее мгновенно снижается и поддерживается постоянным и равным $h_0 < h_*$, а в случае осесимметрического движения включается скважина с постоянным дебитом Q . Предположим, что вне кровли пласта для всех $t \geq 0$ сохраняется единичный напор.

Тогда точка $\xi_* = \xi_*(t)$ будет подвижной, и, считая в области $0 < \xi < \xi_*(t)$ режим движения жестким, а вне этой области упругим [4], получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta h_1 - \omega^2 (h_1 - h_*) &= 0 \quad (0 < \xi < \xi_*(t)) \\ \beta \Delta h_2 &= \partial h_2 / \partial t \quad (\xi_*(t) < \xi < \infty) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь β — упругость пласта.

Будем искать приближенное решение уравнений (2.1) методом последовательной смены стационарных состояний [5]. При этом введем подвижную границу $L(t)$ распространения возмущений в зоне упругого режима движения такую, что

$$h_2(\xi) = 1, \quad \partial h_2 / \partial \xi = 0 \quad (\xi \geq L(t)) \quad (2.2)$$

К уравнениям (2.1) присоединим граничные условия (1.4) — (1.6) и начальное условие

$$\xi_*(0) = 0, \quad (\eta_*(0) = 0) \quad (2.3)$$

Решение этой задачи запишется в виде (1.7), (1.8), где $\eta_* = \eta_*(t)$, $l = l(t)$. Из последнего условия (1.6) найдем

$$l(\eta_*) = \begin{cases} \eta_* + J\lambda(h_* - h_0)^{-1} \text{sh } \eta_* \\ \eta_* \exp \{J\lambda q^{-1} \eta_* I_0(\eta_*) [K_1(\eta_*) I_0(\eta_*) + I_1(\eta_*) K_0(\eta_*)]^{-1}\} \end{cases} \quad (2.4)$$

Умножая второе уравнение в (2.1) на $d\xi$ в случае притока к галерее и на $\xi d\xi$ в случае притока к скважине и принимая во внимание (1.7), (2.2) и (2.4), найдем дифференциальное уравнение для определения $\eta_*(t)$. Для галереи оно имеет вид

$$J\lambda \text{sh } \eta_* [2 + J\lambda(h_* - h_0)^{-1} \text{ch } \eta_*] d\eta_* = 2\beta\omega^2(h_* - h_0) dt$$

Отсюда с учетом (2.3) получим

$$\tau = J\lambda(h_* - h_0)^{-1} [\text{ch } \eta_* + 0.25J\lambda(h_* - h_0)^{-1} \text{sh}^2 \eta_* - 1] \quad (\tau = \beta\omega^2 t)$$

На фиг. 3 приведены графики зависимостей $\eta_*(\tau)$, $l(\tau)$ при

$$J\lambda(h_* - h_0)^{-1} = 1$$

Аналогично, в случае притока к скважине решение упомянутого выше дифференциального уравнения можно выписать в виде квадратуры. Здесь ограничимся такими значениями, для которых имеет место (1.9). Тогда

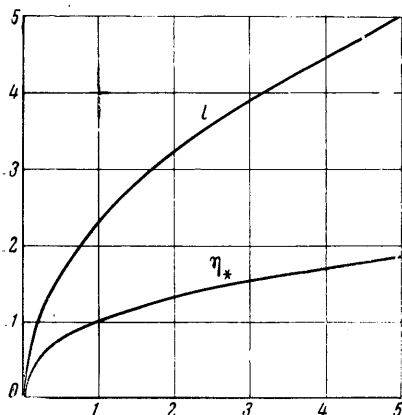
$$l(\tau) = \eta_* \exp(J\lambda / q), \\ \eta_*(\tau) = 2\tau^{1/2} (\exp(2J\lambda / q) - 1)^{-1/2} \quad (2.5)$$

Найдем максимальное значение времени τ_0 , при котором с указанной выше точностью справедливы формулы (2.5). Полагая $\eta_* = 0.2$, получим

$$\tau_0 = 10^{-2} (\exp(2J\lambda / q) - 1)$$

Для примера положим $\beta\omega^2 = 0.1 \text{ сут}^{-1}$
 $J\lambda / q = 5$. Тогда

$$t_0 = \tau_0 / (\beta\omega^2) = 2200 \text{ сут}$$



Фиг. 3

Можно ожидать, что применяемый метод последовательной смены стационарных состояний будет давать решение, близкое к точному для случая квазистационарного режима, когда упругая волна находится далеко за пределами интервала $(0, \xi_*)$. При очень малых значениях времени, когда происходит быстрое изменение напоров, необходим учет упругого режима движения и в области $\xi \in (0, \xi_*)$. В этом случае, в виду малости $\xi_*(t)$ величиной перетока жидкости сквозь слабопроницаемую кровлю можно пренебречь, и для определения напоров будем иметь следующую систему уравнений:

$$\beta \Delta h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial t} (0 < \xi < \xi_*(t)), \quad \beta \Delta h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial t} (\xi_* < \xi < \infty)$$

Присоединяя сюда условия (1.4) — (1.6), приходим к частному случаю задачи Стеффана, имеющей автомодельное решение

$$h_1 = \begin{cases} h_0 + \frac{h_* - h_0}{\operatorname{erf} \mu} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta t}} \right) \\ h_* - \frac{q}{2} \left[\operatorname{Ei}(-\mu^2) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{\xi^2}{4\beta t} \right) \right] \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{cases} 1 - \frac{1 - h_*}{1 - \operatorname{erf} \mu} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta t}} \right) \right] \\ 1 - \frac{1 - h_*}{1 - \operatorname{Ei}(-\mu^2)} \left[1 - \operatorname{Ei} \left(-\frac{\xi^2}{4\beta t} \right) \right] \end{cases}$$

$$\xi_*(t) = 2\mu\sqrt{\beta t}$$

Здесь

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{Ei}(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$\mu = \begin{cases} \operatorname{inv} \operatorname{erf} \left(\frac{h_* - h_0}{1 - h_0} \right) \\ (\operatorname{inv} \{-\operatorname{Ei}[1 - 2(1 - h_*)/q]\})^{1/2} \end{cases}$$

inv — оператор взятия обратной функции.

Поступило 6 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика грунтов. М.—Л., Госстройиздат, 1951.
2. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельными градиентами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
4. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Изд. 3, М., Физматгиз, 1962.
5. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостехиздат, 1959.
6. Чарный И. А. О продвижении границы изменения агрегатного состояния при охлаждении или нагреве тел Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 2.

ПРИТОК ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

В. Т. ИВАНОВ, Г. Ш. КАРИМОВ

(Уфа)

Предлагается получисленный метод решения осесимметрической задачи об установившемся притоке несжимаемой вязкой жидкости к несовершенной скважине в z -неоднородном пласте [1] с непроницаемой кровлей.

1. Пусть $K_r = K(z)$ — горизонтальная проницаемость, $K_z = K_z(z)$ — вертикальная проницаемость пласта, r_0 — радиус скважины, R — радиус контура, питания, H — мощность пласта, (a, b) — интервал вскрытия пласта, γ — удельный вес жидкости, μ — вязкость жидкости. В этих обозначениях задача притока жидкости к несовершенной скважине математически формулируется следующим образом.

Пусть требуется в области $\Pi(r_0 < r < R, 0 < z < H)$ найти решение уравнения

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\Phi = P + \gamma z$$