Кроме того, принималось, что

$$\mu / a_0 = 9.81 \cdot 10^5 \ г/см^3 \, сек, \quad \rho_1 = 2.65 \ г/см^3 \ (кварц), \quad \rho_2 = 1 \ г/см^3 \ (вода)$$

Вычисления по выписанным формулам были произведены на ЭВМ М-20. Результаты вычислений коэффициентов затухания слабых скачков по времени приведены в таблице. Отметим, что с увеличением степени сцементированности значение v_2 возрастает более чем в 19 раз, тогда как скорость v_1 увеличивается значительно слабее.

ε	$10^5\,\beta$, *атм*$^{-1}$	$10^5\,\alpha$, *атм*$^{-1}$	v_1, *м/сек*	v_2, *м/сек*	b_1, *сек*$^{-1}$	b_2, *сек*$^{-1}$
0.002	980.9	2.0599	1727	49	29087	118248
0.01	206.0	2.0596	1728	107	28878	118457
0.05	41.2	2.0580	1733	239	27818	119517
0.10	20.6	2.0559	1740	337	26482	120853
0.15	13.7	2.0539	1746	412	25138	122197
0.20	10.3	2.0519	1753	474	23789	123546
0.25	8.2	2.0498	1760	528	22438	124897
0.30	6.8	2.0478	1768	577	21089	126246
0.35	5.8	2.0457	1775	621	19747	127589
0.40	5.1	2.0437	1783	662	18414	128921
0.50	4.1	2.0396	1799	734	15797	131539
0.60	3.4	2.0354	1817	798	13276	134100
0.70	2.9	2.0313	1836	855	10890	136445
0.80	2.5	2.0271	1856	906	8678	138657
0.90	2.2	2.0229	1877	952	6675	140660

Нужно подчеркнуть далее, что в мягких грунтах ($\varepsilon = 2.1 \cdot 10^{-3}$) затухание второй волны происходит в 150 раз сильнее, чем первой. В сцементированных грунтах это различие несколько слабее, но вывод о практическом затухании волны второго рода и о возможности наблюдения только волн первого рода сохраняет свою силу.

Поступило 26 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев П. П., Николаевский В. Н. О распространении скачков напряжения и давления в водонасыщенном грунте. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Гималитдинов Ф. Метод характеристик в задачах о слабых волнах в насыщенной пористой среде. В сб. «Вопросы кибернетики и вычислительной математики».
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
4. Николаевский В. Н. Об основных уравнениях динамики насыщенных жидкостью упругих пористых сред. В кн. «Добыча нефти», 1963, М., «Недра», 1964.

ОБ ИНЪЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТУЮ СРЕДУ В СЛУЧАЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Н. Н. ВЕРИГИН, Е. С. ДЗЕКЦЕР

(*Москва*)

В работе [1] была поставлена задача об инъекции жидкости в пористый пласт, насыщенный жидкостью с иной плотностью, вязкостью и сжимаемостью. Там же приведены автомодельные решения этой задачи для линейного случая (галерея с постоянным давлением) и для осесимметричного случая (скважина с постоянным дебитом). В дальнейшем методам решения рассматриваемой задачи в общей постановке и различным частным ее решениям было посвящено много работ [2–9 и др.]

Здесь рассматривается инъекция жидкости или газа в пласт через скважину с короткой рабочей частью или через открытый забой скважины. В этих условиях можно считать, что инъекция происходит из точки пласта, и пренебречь при этом силой тяжести из-за ее малости по сравнению с силами давления. Тогда фильтрационный поток будет иметь сферическую симметрию, и задача сведется к одномерной.

Чтобы получить автомодельное решение ее, заменим скважину постоянно действующим точечным источником с интенсивностью, пропорциональной величине $\sqrt{t}$ (t — время). В случае относительно малой вязкости нагнетаемой жидкости простое автомодельное решение получается и при постоянной интенсивности источника. Такая точечная инъекция в пласт представляет интерес при определении фильтрационных параметров горных пород и пластов, когда удобно и выгодно вести нагнетание через опытный интервал скважины малой длины. Эта же схема применима для расчета инъекций жидкости (газа) в пластах большой мощности, во много раз превышающей длину рабочей части скважины.

При инъекции в пласт жидкости (газа) возникают две зоны, разделенные подвижной границей с координатой $R(t)$. Эта граница отделяет нагнетаемую в породу жидкость (газ) от вытесняемой пластовой жидкости (газа).

В соответствии с этим в случае сферической симметрии движение жидкости (газа) описывается системой из двух уравнений вида

$$\frac{\partial p}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2\partial p}{r\partial r}\right) \tag{1}$$

$$p=p_1,\qquad a=a_1,\qquad r_0\leqslant r\leqslant R(t),\qquad p=p_2,\qquad a=a_2,\qquad R(t)\leqslant r\leqslant\infty$$

Здесь $p_1(r, t)$ — давление в нагнетаемой жидкости, $p_2(r, t)$ — давление в вытесняемой жидкости, $a_{1,2}$ — коэффициенты пьезопроводности для зон, занятых нагнетаемой и вытесняемой жидкостями (газом). Для жидкости и газа пьезопроводность будет

$$a=a_{(1)}=\frac{k_0}{\mu\,[n\alpha_{(1)}+(1-n)\alpha_{(2)}]},\qquad a=a_{(2)}=\frac{k_0\langle p\rangle}{\mu n}$$

Здесь $\alpha_{(1)}$ и $\alpha_{(2)}$ — коэффициенты сжимаемости жидкости и породы соответственно, $\langle p\rangle$ — давление, среднее за период нагнетания, k_0, n — проницаемость и пористость пласта; μ — вязкость. Начальные и граничные условия примем в виде

$$p_2(r,0)=p_2(\infty,t)=p_0=\text{const},\qquad Q=-2\pi\varepsilon\frac{k_0}{\mu_1}\left|\,r^2\frac{\partial p_1(r,t)}{\partial r}\right|_{r\to 0}=Q_s\left(\frac{t}{t_s}\right)^{1/2} \tag{2}$$

$$p_1(R,t)=p_2(R,t),\qquad \frac{k_0}{\mu_1}=\frac{\partial p_1(R,t)}{\partial r}=\frac{k_0}{\mu_2}\frac{\partial p_2(p,t)}{\partial r},\qquad -\frac{k_0}{\mu_1}\frac{\partial p_1(R,t)}{\partial r}=n\frac{dR}{dt} \tag{3}$$

Здесь Q_s — расходы жидкости в конце нагнетания (для времени $t=t_s$ p_0 — начальное давление в пласте, ε — коэффициент, равный единице при примыкании забоя скважины в кровле пласта (полусфера) и равный двум при расположении скважины внутри пласта (сферы).

Для рассматриваемых условий существует простое автомодельное решение задачи. Подстановка $p_1=u(\lambda_1)$ и $p_2=u(\lambda_2)$ приводит систему (1) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{d^2u_{1,2}}{d\lambda_{1,2}}+2\left(\frac{1}{\lambda_{1,2}}+\lambda_{1,2}\right)\frac{du_{1,2}}{d\lambda_{1,2}}=0\qquad\left(\lambda_{1,2}=\frac{r}{2\sqrt{a_{1,2}t}}\right) \tag{4}$$

Решение этих уравнений будет

$$p_{1,2}=A_{1,2}\left[\frac{1}{\lambda_{1,2}}\exp(-\lambda_{1,2}{}^2)-\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}\lambda_{1,2}\right]+B_{1,2}=A_{1,2}\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_{1,2}}\operatorname{ierfc}\lambda_{1,2}+B_{1,2} \tag{5}$$

$$\left(\operatorname{ierfc}\lambda_{1,2}=\int\limits_{\lambda}^{\infty}\operatorname{erfc}x\,dx=\frac{\exp(-\lambda^2)}{\sqrt{\pi}}-\lambda\operatorname{erfc}\lambda\right)$$

Принимая во внимание условия (2), определим коэффициенты A_1 и B_2

$$A_1=\frac{Q_s\mu_1}{4\pi k_0\varepsilon\sqrt{a_1t_s}},\qquad B_2=p_0 \tag{6}$$

Согласно первым двум условиям (3), имеем

$$A_2 = A_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\rho} \exp(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) = \frac{Q_s \mu_2}{4\pi k_0 \varepsilon \sqrt{a_2 t_s}} \exp(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) \tag{7}$$

$$B_1 = p_0 + \frac{A_s \mu_2}{4k_0 \varepsilon \sqrt{\pi t_s}} \left[\frac{\exp(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)}{\sqrt{a_2}} \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_{01}}{\lambda_{02}} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\sqrt{a_2}} \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_{01}}{\lambda_{01}} \right] \tag{8}$$

$$\left(\lambda_{01} = \frac{R(t)}{2\sqrt{a_1 t}}, \ \lambda_{02} = \frac{R(t)}{2\sqrt{a_2 t}}, \ \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{02}} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/2} = \rho \right)$$

Так как A_1 и A_2 постоянные, то равенство (7) может выполняться только при условии

$$R^2 / t = \gamma = 4a_1\lambda_{01}^2 = 4a_2\lambda_{02}^2 = \text{const} \tag{9}$$

Здесь γ — параметр, определяющий скорость распространения нагнетаемой жидкости (газа) в пласте.

Решение системы уравнений (1) при условиях (2) и (3) имеет вид (10)

$$p_1(r, t) = p_0 + \frac{Q_s}{4\varepsilon k_0 \sqrt{\pi a_1 t_s}} \left[\mu_2 \frac{\exp(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)}{\rho} \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_{02}}{\lambda_{02}} - \mu_1 \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_{01}}{\lambda_{01}} + \mu_1 \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_1}{\lambda_1} \right].$$

$$p_2(r, t) = p_0 + \frac{Q_s \mu_2}{4k_0 \varepsilon \sqrt{\pi a_2 t_s}} \exp(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_2}{\lambda_2} \tag{11}$$

Здесь λ_1 и λ_2 принимаются согласно (4).

Из кинематического условия на границе раздела двух флюидов (3) с учетом (9) и (10) определится параметр γ или λ_{01}, а именно

$$\left(\frac{\gamma}{a_1} \right)^{3/2} \exp \frac{\gamma}{4a_1} = \frac{Q_s}{\pi \varepsilon n a_1 \sqrt{a_1 t_s}}, \qquad \lambda_{01}^3 \exp \lambda_{01}^2 = \frac{Q_s}{8\pi \varepsilon n \sqrt{a_1^3 t_s}} \tag{12}$$

Учитывая, что обычно $\gamma / 4a_1$ очень мало, параметр γ или λ_{01} в первом приближении может быть определен по формуле

$$\gamma = \left(\frac{Q_s}{\pi \varepsilon n \sqrt{t_s}} \right)^{2/3}, \qquad \lambda_{01} = \left(\frac{Q_s}{8\pi \varepsilon n \sqrt{a_1^3 t_s}} \right)^{1/3} \tag{13}$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи: $\mu_1 \gg \mu_2$, $\mu_2 \gg \mu_1$ и $\mu_1 = \mu_2$.

а) При нагнетании жидкости в породу, насыщенную газом, можно принять, что $\mu_2 \approx 0$, тогда

$$p_1(r, t) = p_0 + \frac{Q_s \mu_1}{4\varepsilon k_0 \sqrt{\pi a_1 t_s}} \left(\frac{1}{\lambda_1} \operatorname{ierfc} \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_{01}} \operatorname{ierfc} \lambda_{01} \right), \qquad p_2(r, t) = p_0 \tag{14}$$

Здесь γ и λ_{01} определяются по формулам (12);

б) при нагнетании газа в породу, насыщенную жидкостью, можно считать, что $\mu_1 \approx 0$, отсюда

$$p_1(r, t) = p_0 + \frac{Q_s \mu_2}{4\varepsilon k_0 \sqrt{\pi a_2 t_s}} \exp(\lambda_{02}^2) \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_{02}}{\lambda_{02}} = \text{const} \tag{15}$$

$$p_2(r, t) = p_0 + \frac{Q_s \mu_2}{4\varepsilon k_0 \sqrt{\pi a_2 t_s}} \exp(\lambda_{02}^2) \frac{\operatorname{ierfc} \lambda_2}{\lambda_2}$$

Для определения параметров γ и λ_{02} условие (3) заменяется соотношением

$$n \frac{dR}{dt} = - \frac{k_0}{\mu_2} \frac{\partial p_2(R, t)}{\partial r} \tag{16}$$

Из уравнения (15) и условия (16) находим расчетные зависимости для определения параметров γ и λ_{02}. Они совпадают с формулами (13), в которые вместо a_1 подставляется a_2.

В рассматриваемом случае точное решение может быть получено и при постоянном давлении в скважине, при следующих условиях:

$$p_2(R,\ t) = p_c = \text{const},\qquad p_2(r,\ 0) = p_2(\infty,\ t) = p_0 = \text{const} \tag{17}$$

$$n\frac{dR}{dt} = -\frac{k_0}{\mu_1}\frac{\partial p_2(R,t)}{\partial r} \tag{18}$$

Из уравнения (5) и условий (17) и (18) получим

$$A_2 = \frac{p_c - p_0}{\left[\dfrac{1}{\lambda_{02}}\exp(-\lambda_{02}^2) - \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\,\lambda_{02}\right]},\qquad B_2 = p_0 \tag{19}$$

Вводя (19) в (5), будем иметь

$$p_2 = p_0 + (p_c - p_0)\frac{\lambda_{02}\,\mathrm{ierfc}\,\lambda_2}{\lambda_2\,\mathrm{ierfc}\,\lambda_{02}} \tag{20}$$

Из уравнений (16) и (20) определяется параметр γ или λ, т. е.

$$\gamma\exp\frac{\gamma}{4a_2}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\gamma}{4a_2}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{k_0}{\mu_2}\frac{p_c - p_0}{n} \tag{21}$$

$$\lambda_{02}^2\exp(\lambda_{02}^2)\,\mathrm{ierfc}\,\lambda_{02} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{k_0}{\mu_2}\frac{p_c - p_0}{a_2 n} \tag{22}$$

Расход нагнетаемого газа будет

$$Q = 4\varepsilon\sqrt{\pi a_2 t}\,\frac{k_0}{\mu_2}\frac{(p_c - p_0)\lambda_{02}^2}{\mathrm{ierfc}\,\lambda_{02}}\exp(-\lambda_{02}^2) \tag{23}$$

т. е., при постоянном давлении в скважине расход Q пропорционален $\sqrt{t}$;

в) при нагнетании жидкости (газа) в породу, насыщенную той же жидкостью (газом), вязкость и сжимаемость их будут одинаковыми; поэтому $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $a_1 = a_2 = a$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае вместо (10) и (11) получим

$$p_1(r,\ t) = p_2(r,\ t) = p_0 + \frac{Q_s\mu}{4\varepsilon k_0\sqrt{\pi a t_s}}\frac{\mathrm{ierfc}\,\lambda}{\lambda}\qquad\left(\lambda = \frac{r}{2\sqrt{at}}\right) \tag{24}$$

Здесь λ или γ определяются по (12). Заметим, что при $\mu_1 \to 0$ дебит скважины в осесимметричной задаче [1], в отличие от рассмотренного здесь случая сферической симметрии, будет постоянным.

Поступило 13 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
2. Абасов М. Т., Алекперов С. И. О вытеснении одной жидкости другой в неоднородном пласте. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3, стр. 470—474.
3. Веригин Н. Н. О перемещении контура газоносности при эксплуатации месторождений природных газов. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
4. Камынин Л. И. О существовании решения задачи Веригина. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5.
5. Мирзаджанзаде А. Х., Мустафаев В. В. О вытеснении газа водой в пористой среде. Докл. АН Азерб. ССР, 1958, т. 14, № 1, стр. 17—21.
6. Рубинштейн Л. И. О решении задачи Н. Н. Веригина. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 1.
7. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига, «Звайгзне», 1967.
8. Сафрончик А. Н. Некоторые задачи о вытеснении газа и нефти водой при упруго-водонапорном режиме разработки залежей. В сб. «Теоретические и экспериментальные исследования разработки нефтяных месторождений». Казань, Казанск. ун-т., 1964, стр. 62—66.
9. Филинов М. В., Чарный И А. Приближенный метод расчета нагнетания газа в водоносный пласт и его сравнение с некоторыми точными решениями. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1959, № 1.