ки *II* вдоль отрезка 3 на фигуре лежат с завышением на 10—20%, однако на относительном положении этих отрезков это слабо сказывается.

В заключение отметим, что обнаруженное различие между двумя полимерами в отношении снижения сопротивления в шероховатых трубах (полимерами, которые в гладких трубах дают примерно одинаковое снижение сопротивления) коррелируется с многочисленными уже известными различиями их гидродинамического поведения [8]. Подчеркнем различие, имеющее непосредственное отношение к влиянию шероховатости: добавление полиэтиленоксида в поток приводит к понижению частоты схода вихрей с цилиндрической проволочки малого диаметра [9], в то время как полиакриламид (несколько отличный от использованного в данной работе) действует весьма слабо.

Авторы благодарят Г. И. Баренблата и В. Н. Калашникова за обсуждение, И. Г. Булину — за любезное содействие в проведении эксперимента.

Поступило 21 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Toms B. A. Some observations. on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers. Proc. Internat. Congress on Rheolog. Holland. 1948, Amsterdam, North-Holland, Pabl. Co., 1949, p. 135.
2. Баренблатт Г. И., Булина И. Г., Мясников В. П., Шоломович Г. И. О влиянии малых добавок растворимых высокомолекулярных соединений на режим движения жидкости. ПМТФ, 1965, № 4.
3. Gadd G. E. Turbulence damping and drag reduction produced by certain additives in water. Nature, 1965, vol. 206, No. 4983.
4. Rubin H., Elata C. Stability of couette flow of dilute polymer solutions. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 10.
5. Elata C., Lehrer J., Kahanovitz A. Turbulent shear flow of polymer solutions. Israel J. Technol., 1966, vol. 4, No. 1—2.
6. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
7. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. М.— Л., ОНТИ, 1936.
8. Gadd G. E. Reduction of turbulent triction in liquids by dissolved additives. Nature, 1966, vol. 212, No. 5065.
9. Gadd G. E. Effects of long — chain molecule additives in water on vortex streets. Nature, 1966, vol. 211, No. 5045.

СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ЗАТУХАНИЕ СЛАБЫХ СКАЧКОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ДАВЛЕНИЯ В НАСЫЩЕННОЙ, ПРОИЗВОЛЬНО СЦЕМЕНТИРОВАННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Ф. ГИМАЛИТДИНОВ (*Ташкент*)

Для системы линеаризованных уравнений динамики упругих насыщенных пористых сред выписывается система характеристических уравнений в нормальном виде. Проведен расчет скорости распространения и коэффициентов затухания для слабых разрывов при произвольной цементации среды.

Линеаризованная система динамических уравнений насыщенной жидкостью пористой среды может быть сведена к следующей системе для одномерных плоских волн [1]:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\rho_1(1-m_0)\frac{\partial u}{\partial t}+\rho_2(1-m_0)\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)(w-u)=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_2\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)(w-u)=0$$

$$(1-m_0)(1-\alpha_1K)\frac{\partial u}{\partial x}+m_0\frac{\partial w}{\partial x}+\alpha\frac{\partial p}{\partial t}=0,\qquad \frac{1-m_0}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}+(1-m_0)\alpha_1K\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

$$\beta=\frac{1}{\lambda_1+2\lambda_2},\qquad \alpha=\alpha_2m_0+\alpha_1(1-m_0)(1-\alpha_1K)$$

Здесь σ — напряжение в твердой фазе, p — давление в жидкости, u, w — скорости движения твердой и жидкой фаз, m_0 — пористость, ρ_1, ρ_2 — плотности, α_1, α_2 — коэффициенты сжимаемости материала твердых частиц и жидкости, μ — вязкость жидкости, K — объемный модуль, $k = a_0(1 - m_0)^{-1}$ — стационарное значение проницаемости среды, λ_1, λ_2 — первый и второй коэффициенты Ламэ.

Уравнение характеристических поверхностей системы имеет вид

$$\varepsilon\rho_1 / \rho_2 v_i^4 - c^2\{r + \varepsilon[1 - 2(1 - m_0)f_1] + \varepsilon^2 f_1^2(1 - m_0)\}v_i^2 + rc^4 = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

из которого следуют выражения для $v_{1,3}$ $v_{2,4}$ — скоростей распространения слабых разрывов вдоль характеристик C_i

$$v_{1,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{\alpha\rho_\infty}}\left(F - \frac{\varepsilon\rho_1}{r\rho F}\right)^{1/2}, \quad v_{2,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{\rho\beta F}} \quad \left(\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}\right) \tag{2}$$

$$F = 1 + \frac{\varepsilon}{r}[f - (1 - m_0)f_1 + \varepsilon f_1^2(1 - m_0)], \qquad f_1 = K\beta\frac{\alpha_1}{\alpha}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta}}$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2\frac{1 - m_0}{m_0}, \quad r = \frac{m_0\rho}{\rho_2}, \quad f = h + \frac{\rho_1}{\rho}, \quad h = (1 - m_0)\left(\frac{1}{r} - f_1\right)$$

Система уравнений (1) приводится [2] к так называемому нормальному (характеристическому) виду

$$dU_i = [R_i(U_1 - U_2) + Q_i(U_3 - U_4)]dt \tag{3}$$

где дифференцирование производится вдоль соответствующих характеристик C_i. Здесь использованы обозначения

$$R_i = \frac{d_i(a_{33} + a_{34})}{2g_2}, \qquad Q_i = -\frac{d_i(a_{13} + a_{14})}{2g_2}$$

$$g_2 = a_{13}a_{34} - a_{33}a_{34}, \qquad a_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{U}_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$u_1 = \sigma, \quad u_2 = p, \quad u_3 = u, \quad u_4 = w, \quad a_{i1} = -1$$

$$a_{12} = a_{22} = \frac{\rho_1\alpha v_1^2 - g_3}{1 - \varepsilon f_1}, \quad a_{32} = a_{42} = \frac{\rho_1\alpha v_2^2 - g_3}{1 - \varepsilon f_1}, \quad g_3 = \varepsilon f + \varepsilon^2 f_1^2(1 - m_0)$$

$$a_{13} = -a_{23} = \rho_1(1 - m_0)v_1, \qquad a_{33} = -a_{43} = \rho_1(1 - m_0)v_2$$

$$a_{14} = -a_{24} = \frac{-\rho_2 v_1[1 - m_0 - \rho_1\alpha v_1^2 - \varepsilon(1 - m_0)f_1 + g_3]}{1 - \varepsilon f_1}$$

$$a_{34} = -a_{44} = \frac{-\rho_2 v_2[1 - m_0 - \rho_1\alpha v_2^2 - \varepsilon(1 - m_0)f_1 + g_3]}{1 - \varepsilon f_1}$$

$$d_1 = -d_2 = \frac{2b_2\rho v_1 m_0(1 - m_0)(\rho_1\alpha v_1^2 - 1 + \varepsilon f_1 - g_3)}{1 - \varepsilon f_1}$$

$$d_3 = -d_4 = \frac{2b_2\rho v_2 m_0(1 - m_0)(\rho_1\alpha v_2^2 - 1 + \varepsilon f_1 - g_3)}{1 - \varepsilon f_1}$$

Из представления уравнений в виде (3) легко определить скачки напряжения, давления и скоростей смещения твердой и жидкой фаз, если воспользоваться методикой, изложенной в [3]. Обозначим через $[U_1]$ скачок переменной U_1 при переходе через характеристику C_1. Тогда решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$d[U_1] - R_1[U_1]dt = 0$$

определяет интенсивность затухания

$$[U_1] = 2D_1e^{-b_1t}, \qquad b_1 = -R_1$$

Аналогично при переходе через характеристику C_3 получим

$$[U_3] = 2D_2e^{-b_2t}, \qquad b_2 = -Q_3$$

Константы D_1 и D_2 определяются из начальных условий формулируемых краевых задач (см., например, [1]).

Обратный переход к искомым переменным осуществляется по формулам

$$\sigma(x, t) = \frac{a_{32}(U_1 + U_2) - a_{12}(U_3 + U_4)}{2(a_{12} - a_{32})}, \qquad p(x, t) = \frac{U_1 + U_2 - U_3 - U_4}{2(a_{12} - a_{32})}$$

$$u(x, t) = \frac{a_{34}(U_1 - U_2) - a_{14}(U_3 - U_4)}{2g_2}, \qquad w(x, t) = \frac{-a_{33}(U_1 - U_2) + a_{13}(U_3 - U_4)}{2g_2}$$

Можно показать, что при рассмотрении только «мягких» грунтов и горных пород, характеризуемых [4] условием $\varepsilon = \alpha\beta^{-1} \ll 1$, получаемые таким путем выражения для скачков напряжения и давления полностью совпадают с приведенными в [1]. Выпишем также выражения для скачков скоростей движения фаз.

На первой волне в точке $x = v_1 t$ получены

$$[\sigma]_1 = \frac{a_{32}[U_1]}{2(a_{12} - a_{32})}, \qquad [p]_1 = \frac{[U_1]}{2(a_{12} - a_{32})}, \qquad [u]_1 = \frac{a_{34}[U_1]}{2g_2}, \qquad [w]_1 = -\frac{a_{33}[U_1]}{2g_2}$$

А на второй волне в точке $x = v_2 t$ можно получить

$$[\sigma]_2 = -\frac{a_{12}[U_3]}{(2a_{12} - a_{32})}, \qquad [p]_2 = -\frac{[U_3]}{2(a_{12} - a_{32})} [u]_2 = -\frac{a_{14}[U_3]}{2g_2}, \qquad [w]_2 = \frac{a_{13}[U_3]}{2g_2}$$

Вычисляются теперь значения скоростей и коэффициентов затухания слабых скачков по времени и по пройденному расстоянию для различных значений ε: v_1, v_2, b_1, b_2, δ_1, δ_2. Необходимо отметить, что при варьировании ε коэффициент Пуассона среды сохраняется постоянным и равным $\nu = 0.25$, а также принимается, что $\alpha_1 = 0.5 \cdot 10^{-5}$ *атм*$^{-1}$, $\alpha_2 = 4.4 \cdot 10^{-5}$ *атм*$^{-1}$, $m_0 = 0.4$. Тогда произведение

$$K\beta = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)}$$

будет тоже постоянным, а параметр β будет меняться

$$\beta_i = H_i + (H_i^2 - N_i)^{1/2}, \qquad H_i = \frac{\alpha_1(1 - m_0) + \alpha_2 m_0}{2\varepsilon_i}, \qquad N_i = \frac{K\beta\alpha_1^2(1 - m_0)}{\varepsilon_i}$$

Здесь и ниже индекс i соответствует задаваемым различным значениям ε.

При вычислениях скоростей $(v_1)_i$, $(v_2)_i$ формулы (2) представлялись в виде

$$(v_{1,3})_i = \left(\frac{E_i \pm \sqrt{E_i^2 - 4\varepsilon_i r \rho_1/\rho_2}}{2\rho_1\alpha_i}\right)^{1/2}$$

$$E_i = r + \varepsilon_i[1 - 2(1 - m_0)(f_1)_i] + \varepsilon_i^2(f_1^2)_i(1 - m_0)$$

$$\alpha_i = \varepsilon_i\beta_i, \qquad (f_1)_i = K\beta\alpha_1 / \alpha_1 \quad f_i = h_i + \rho_1 / \rho, \qquad h = (1 - m_0)\{r^{-1} - (f_1)_i]$$

Значения $(b_1)_i$, $(b_2)_i$, $(\delta_1)_i$, $(\delta_2)_i$ вычислялись по формулам

$$(b_1)_i = -\frac{b_2(A_1)_i(B_2)_i}{\rho_\infty(B_3)_i} \qquad (b_2)_i = \frac{b_2(A_2)_i(B_1)_i}{\rho_\infty(B_3)_i}$$

$$(A_1)_i = \rho_1\alpha_i(v_1^2)_i - (A_3)_i, \qquad (A_2)_i = \rho_1\alpha_i(v_2^2)_i - (A_3)_i$$

$$(B_1)_i = \rho_1\rho_2\alpha_i(v_1^2)_i + (B_4)_i, \qquad (B_2)_i = \rho_1\rho_2\alpha_i(v_2^2)_i + (B_4)_i$$

$$(A_3)_i = 1 + \varepsilon_i[f_i - (f_1)_i] + \varepsilon_i^2(f_i^2(f_1^2)_i(1 - m_0),$$

$$(B_3)_i = \rho_1\alpha_i[(v_1^2)_i - (v_2^2)_i][1 - \varepsilon_i(f_1)_i]$$

$$(B_4)_i = (\rho_1 - \rho_2)(1 - m_0) - \varepsilon_i[\rho_2 f_i + (\rho_1 - \rho_2)(1 - m_0)(f_1)_i] - \varepsilon_i^2(f_1^2)_i(1 - m_0)$$

$$(\delta_1)_i = -\frac{(b_1)_i}{(v_1)_i} \qquad (\delta_2)_i = -\frac{(b_2)_i}{(v_2)_i}$$

$$b_2 = \frac{1}{2\tau}, \qquad \tau = a_0\rho/\mu, \qquad \rho_\infty = \rho_1/r$$

Кроме того, принималось, что

$$\mu / a_0 = 9.81 \cdot 10^5 \ г/см^3\ сек, \quad \rho_1 = 2.65 \ г/см^3 \ (кварц), \quad \rho_2 = 1 \ г/см^3 \ (вода)$$

Вычисления по выписанным формулам были произведены на ЭВМ М-20. Результаты вычислений коэффициентов затухания слабых скачков по времени приведены в таблице. Отметим, что с увеличением степени сцементированности значение v_2 возрастает более чем в 19 раз, тогда как скорость v_1 увеличивается значительно слабее.

ε	$10^5\ \beta$, *атм*$^{-1}$	$10^5\ \alpha$, *атм*$^{-1}$	v_1, *м/сек*	v_2, *м/сек*	b_1, *сек*$^{-1}$	b_2, *сек*$^{-1}$
0.002	980.9	2.0599	1727	49	29087	118248
0.01	206.0	2.0596	1728	107	28878	118457
0.05	41.2	2.0580	1733	239	27818	119517
0.10	20.6	2.0559	1740	337	26482	120853
0.15	13.7	2.0539	1746	412	25138	122197
0.20	10.3	2.0519	1753	474	23789	123546
0.25	8.2	2.0498	1760	528	22438	124897
0.30	6.8	2.0478	1768	577	21089	126246
0.35	5.8	2.0457	1775	621	19747	127589
0.40	5.1	2.0437	1783	662	18414	128921
0.50	4.1	2.0396	1799	734	15797	131539
0.60	3.4	2.0354	1817	798	13276	134100
0.70	2.9	2.0313	1836	855	10890	136445
0.80	2.5	2.0271	1856	906	8678	138657
0.90	2.2	2.0229	1877	952	6675	140660

Нужно подчеркнуть далее, что в мягких грунтах ($\varepsilon = 2.1 \cdot 10^{-3}$) затухание второй волны происходит в 150 раз сильнее, чем первой. В сцементированных грунтах это различие несколько слабее, но вывод о практическом затухании волны второго рода и о возможности наблюдения только волн первого рода сохраняет свою силу.

Поступило 26 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев П. П., Николаевский В. Н. О распространении скачков напряжения и давления в водонасыщенном грунте. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Гималитдинов Ф. Метод характеристик в задачах о слабых волнах в насыщенной пористой среде. В сб. «Вопросы кибернетики и вычислительной математики».
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
4. Николаевский В. Н. Об основных уравнениях динамики насыщенных жидкостью упругих пористых сред. В кн. «Добыча нефти», 1963, М., «Недра», 1964.

ОБ ИНЪЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТУЮ СРЕДУ В СЛУЧАЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Н. Н. ВЕРИГИН, Е. С. ДЗЕКЦЕР

(*Москва*)

В работе [1] была поставлена задача об инъекции жидкости в пористый пласт, насыщенный жидкостью с иной плотностью, вязкостью и сжимаемостью. Там же приведены автомодельные решения этой задачи для линейного случая (галерея с постоянным давлением) и для осесимметричного случая (скважина с постоянным дебитом). В дальнейшем методам решения рассматриваемой задачи в общей постановке и различным частным ее решениям было посвящено много работ [2–9 и др.]

Здесь рассматривается инъекция жидкости или газа в пласт через скважину с короткой рабочей частью или через открытый забой скважины. В этих условиях можно считать, что инъекция происходит из точки пласта, и пренебречь при этом силой тяжести из-за ее малости по сравнению с силами давления. Тогда фильтрационный поток будет иметь сферическую симметрию, и задача сведется к одномерной.