

После подстановки численных значений будем иметь при $q = 1$

$$u^* = 1.130\lambda \left(\frac{du}{dx} \right)_{\infty} \quad (20)$$

В соответствии с выше сказанным результаты (18) и (20) для скорости скольжения отличаются всего на 0.3%.

Поступило 26 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3, p. 511.
3. Welander P. On the temperature jump in a rarefied gas. Ark. Fysik, 1954, vol. 7, No. 6, p. 507.
4. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their application to the slip-flow problem. Ann. of Physics, 1962, vol. 20, No. 2, p. 219.
5. Albertoni S., Cercignani C., Gotusso L. Numerical Evaluation of the Slip Coefficient. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 7, p. 93.
6. Willis O. P. Comparison of kinetic theory analysis of linearized Couette flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2, p. 127. (Рус. перев.: «Механика», Период. сб. пер. иностр. статей, 1963, № 2.)
7. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2, p. 141 (Рус. перев.: «Механика», Период. сб. пер. иностр. статей, 1958, № 5.)
8. Дерягин Б. В., Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. О построении решений кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
9. Gross E. P., Ziering S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. of Fluids, 1968, vol. 1, No. 3, p. 215.
10. Баканов С. П., Дерягин Б. В. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, № 1, с. 71.

О НЕИЗОТРОПНОЙ РЕЛАКСАЦИИ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ГАЗА В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

В работе [1] автором предложен метод аппроксимации больцмановского интеграла столкновений. В качестве примера решена задача об изотропной релаксации в однородном пространстве — простейшая задача кинетической теории газов, для которой В. А. Рыковым получено точное решение [2].

С целью дальнейшей отработки метода аппроксимации интеграла столкновений была решена более типичная для теории разреженных газов задача о релаксации, в которой отличны от нуля моменты второго и третьего порядка. — задача о релаксации при наличии осевой симметрии в пространстве скоростей. В качестве начальной функции распределения была выбрана функция в виде линейной комбинации двух максвелловских функций с массовыми скоростями вдоль оси симметрии — задача о псевдоскачке [3]. Расчеты показали, что для начальных функций, симметричных относительно плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (тепловой поток равен нулю), дополнительное напряжение, обусловленное отклонением от равновесия, затухает со временем для молекул — шаров практически так же, как и для максвелловских молекул. Для несимметричной начальной функции (тепловой поток отличен от нуля), достаточно сильно отличающейся от равновесной, показатель затухания дополнительного напряжения и теплового потока для молекул-шаров несколько больше, чем для молекул Максвелла.

Показано, что моменты интеграла столкновений для любых моделей молекул могут быть выражены через моменты функции распределения.

1. Уравнение Больцмана для задачи о релаксации в однородном пространстве имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int (f'f_1' - ff_1) |\xi - \xi_1| b db d\epsilon d\xi_1 \quad (1.1)$$

Перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$b' = \frac{b}{\sigma}, \quad c(u, v, w) = \frac{\xi}{\sqrt{2RT}}, \quad t' = 4n\sigma^2 \sqrt{\pi RT} t, \quad f = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} F$$

Здесь n — числовая плотность молекул, σ — диаметр молекул. Молекулы будем считать для определенности твердыми шариками.

Уравнение Больцмана в безразмерных переменных принимает вид (штрихи над безразмерными величинами опущены)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2}{9\pi^2} \int (F'F_1' - FF_1) |c - c_1| b db d\epsilon dc_1 \equiv J(F) \quad (1.2)$$

Начальное условие возьмем в форме

$$F(0, c) = \Phi(c) = a_1 \theta_1^{3/2} e^{-\theta_1[(u-U)^2 + v^2]} + a_2 \theta_2^{3/2} e^{-\theta_2[(u+U)^2 + v^2]} \quad (1.3)$$

$$V^2 = v^2 + w^2$$

Здесь постоянные $a_1, a_2, U_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ не независимы, а связаны соотношениями постоянства плотности, отсутствия массовой скорости и постоянства температуры.

$$\int \Phi dc = \int F^{(0)} dc, \quad \int u \Phi dc = 0, \quad c^2 = u^2 + V^2 \quad (1.4)$$

$$\int c^2 \Phi dc = \int c^2 F^{(0)} dc, \quad F^{(0)} = \frac{9}{4\sqrt{2}} e^{-c^2}$$

Здесь $F^{(0)}$ — максвелловская функция распределения. Условия (1.4) дают для $a_1, a_2, U_1, U_2, \theta_1, \theta_2$ следующие соотношения:

$$a_1 + a_2 = \frac{c}{8\sqrt{2}}, \quad a_1 U_1 - a_2 U_2 = 0$$

$$a_1 \left(U_1^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{\theta_1} \right) + a_2 \left(U_2^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{\theta_2} \right) = \frac{27}{8\sqrt{2}} \quad (1.5)$$

Вид начальной функции позволяет легко вычислить все необходимые моменты функции распределения. В частности

$$P_{11}(0) = \int u^2 \Phi dc = \pi^{3/2} a_1 \left(U_1^2 + \frac{1}{2\theta_1} \right) + \pi^{3/2} a_2 \left(U_2^2 + \frac{1}{2\theta_2} \right) \quad (1.6)$$

$$S_{11}(0) = \int u c^2 \Phi dc = \pi^{3/2} a_1 U_1 \left[(U_1^2 - U_2^2) + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right]$$

Если $U_1 = U_2$, то $\theta_1 = \theta_2, a_1 = a_2$. В этом случае начальная функция симметрична относительно плоскости $u = 0$, тепловой поток $2S_{11}$ равен нулю, а для напряжения имеем равенство

$$\frac{P_{11}(0)}{p} = 2 \left(1 - \frac{1}{\theta_1} \right), \quad P_{11} = P_{11} - p \quad (1.7)$$

Здесь p — давление, p_{11} — дополнительное напряжение, обусловленное отклонением от равновесного состояния.

Соотношение (1.7) показывает, что в симметричном случае дополнительное напряжение не может превышать давление в газе более чем в два раза (при $\theta_1 = \theta_2 \rightarrow \infty$ начальная функция переходит в δ -функцию с предельными значениями $U_1 = U_2 = \sqrt{2/2}$).

Начальная функция вида (1.3) оказывается удобной и в том отношении, что позволяет вычислить частоту столкновений

$$N_0 = \frac{2}{9\pi} \int \Phi |c - c_1| dc_1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{\theta_1}} P(\lambda_1) + \frac{a_2}{\sqrt{\theta_2}} P(\lambda_2) \right\} \quad (1.8)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\theta_1[(u - U_1)^2 + V^2]}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\theta_2[(u + U_2)^2 + V^2]}$$

Здесь $P(c)$ — частота столкновений равновесного состояния [4]

$$P(c) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left\{ e^{-c^2} + \left(2c + \frac{1}{c} \right) \int_0^c e^{-x^2} dx \right\} \quad (1.9)$$

2. Вместо уравнения Больцмана (1.2) будем решать соответствующее аппроксимирующее уравнение с приближенным интегралом столкновений

$$\partial F / \partial t = P(c) (F^+ - F) \quad (2.1)$$

Частота $P(c)$ определяется согласно (1.9).

Поскольку нас интересуют моменты функции распределения

$$\int Fdc, \quad \int uFdc, \quad \int c^2Fdc, \quad \int u^2Fdc, \quad \int uc^2Fdc$$

выбираем F^+ в виде

$$F^+ = F^{(0)}(1 + \alpha + \beta u + \gamma c^2 + \delta u^2 + \epsilon uc^2) \quad (2.2)$$

Тогда моментные соотношения

$$\int \psi P(F^+ - F) dc = \int \psi Jdc, \quad \psi = 1, u, c^2, u^2, uc^2 \quad (2.3)$$

будут представлять собой линейную алгебраическую систему уравнений относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ с коэффициентами, не зависящими от времени. Правые части этих уравнений

$$b_i = \int \psi P(F - F^{(0)}) dc + \int \psi Jdc$$

со времени изменяются и равны нулю при равновесии. Интегралы от интеграла столкновений равны нулю для инвариантов столкновений. Для ψ , равных u^2, uc^2 , можно проинтегрировать по параметрам столкновений

$$I_{11} = \int u^2 Jdc = \frac{2}{9\pi} \int \left[-u^2 + uu_1 + \frac{1}{4}(u - u_1)^2 + \frac{1}{12}g^2 \right] FF_1 gdc_1 dc_1$$

$$I_{1jj} = \int uc^2 Jdc = \frac{2}{9\pi} \int \left[-uc^2 + \frac{1}{4}(u + u_1)(c^2 + c_1^2) + \frac{1}{12}(u + u_1)g^2 \right] FF_1 gdc_1 dc_1 \quad (2.4)$$

С использованием осевой симметрии функции распределения трехмерные интегралы сводятся к двумерным, а шестимерные интегралы (2.4) — к четырехмерным

$$I_{11} = \frac{4}{9} \int FF_1 VV_1 \left\{ \left[-u^2 + uu_1 + \frac{1}{4}(u - u_1)^2 \right] 4qA(k) + \frac{1}{3}q^3B(k) \right\} dudVdu_1dV_1$$

$$I_{1jj} = \frac{4}{9} \int FF_1 VV_1 \left\{ \left[-uc^2 + \frac{1}{4}(u + u_1)(c^2 + c_1^2) \right] 4qA(k) + \frac{1}{3}(u + u_1)q^3B(k) \right\} dudVdu_1dV_1$$

$$q^2 = (u + u_1)^2 + (V + V_1)^2, \quad 0 \leq k = \frac{4VV_1}{q^2} \leq 1 \quad (2.5)$$

$$A(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k \cos^2 \psi)^{1/2} d\psi, \quad B(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k \cos^2 \psi)^{3/2} d\psi$$

Расчеты проводились следующим образом. Для начальной функции (1.3) вычислялись правые части уравнений (2.3). Функции $A(k)$ и $B(k)$ вычислялись заранее и табулировались в памяти машины. Далее из (2.3) определялись коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. По известной правой части уравнения (2.1) с шагом 0.1 по методу Эйлера определялась функция распределения в момент времени $t = 0.1$ и т. д. Все интегралы вычислялись по методу Симпсона с шагом $\Delta u = \Delta V = 0.25$ в пределах $-5 < u < 5, 0 < V < 5$.

3. Некоторые результаты расчетов представлены в виде графиков на фиг. 1—5. Расчеты проводились как для симметричного ($U_1 = U_2$), так и несимметричного случаев. При наличии симметрии относительно плоскости $u = 0$ дополнительное напряжение с точностью до ошибок вычислений затухает по закону

$$p_{11} = p_{11}(0) e^{-0.8t}$$

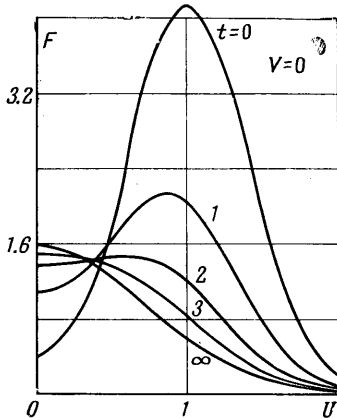
т. е. так же как для молекул Максвелла, несмотря на существенное отклонение начального состояния от равновесного. Расчет проводился для $U_1 = U_2 = 1, p_{11}(0) / p = 4/3$.

Этот факт отмечался ранее в работе [3].

Эволюция функции распределения (фиг. 1) несколько отличается от той, которая получалась в работе [4]. Некоторое различие в качественном поведении функции распределения, по-видимому, обусловлено тем, что в работе [3] плотность и температура значительно уменьшались со временем (около 10% за время одного столкновения).

Значительно больший интерес представляет случай несимметричной функции распределения. На фиг. 2—4 представлены результаты расчетов варианта $U_1 = 0.25, U_2 = 2.75, \theta_1 \approx 1.79, \beta = 2.75$. При этом в начальный момент

$$\frac{p_u}{p} \approx 0.9, \quad \frac{S_1}{\rho(2RT)^{3/2}} \approx 1.6$$



Фиг. 1

Несмотря на то, что начальная функция сильно отличается от равновесной, соответствующая ей частота столкновений N_0 мало отличается от равновесной P . На фиг. 2 изображены разрезы $V = 0$ равновесной и начальной (пунктир) функций распределения и соответствующих частот столкновений.

Эволюция функции распределения представлена на фиг. 3 (разрез $V = 0$). Обращает на себя внимание тот факт, что ее поведение не соответствует поведению функции распределения согласно уравнению Крука. По модели Крука функция распределения для каждого значения скорости релаксирует независимо от остальных скоростей, в то время как фиг. 3 иллюстрирует сложное взаимодействие частиц, обладающих различными скоростями.

Затухание дополнительного напряжения p_{11} / p и теплового потока $s = S_1 / \rho(2RT)^{3/2}$ изображено на фиг. 4, 5. Затухание заметно быстрее, чем для молекул Максвелла (штриховые линии); затухание S_1 медленнее, чем по модели Крука (штрих-пунктир). В начальный момент

$$\frac{1}{p_{11}} \frac{dp_{11}}{dt} = -1.08, \quad \frac{1}{S_1} \frac{dS_1}{dt} = -0.714$$

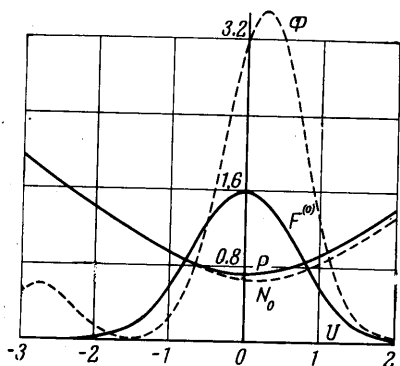
в то время как для молекул Максвелла соответствующие значения равны $-4/5$ и $-8/15$. По мере приближения к равновесию показатель затухания практически стремится соответственно к $-4/5$ и $-8/15$, т. е. к показателям затухания для максвелловских молекул.

Все расчеты были проведены с F^+ , включающей в себя степенные одночлены не выше третьего порядка. В случае симметрии относительно плоскости $u = 0$ из системы линейных уравнений (2.4) имеем

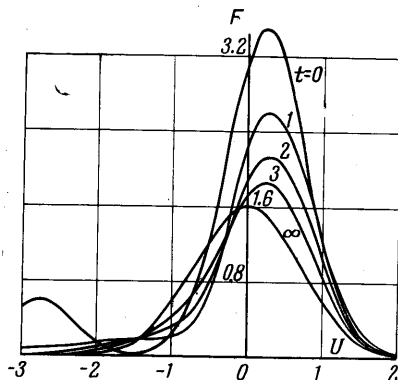
$$\beta = \epsilon = 0$$

так что добавление степенного одночлена uc^2 в (2.3) несущественно. Проведенные расчеты для несимметричного случая с F^+ , включающей в себя степенные одночлены не выше второго порядка, показали, что поведение p_{11} практически не зависит от того, ограничиваемся ли мы при выборе F^+ степенными одночленами второго или третьего порядка.

Возможно, что учет степенных одночленов четвертого порядка для поведения p_{11} имеет более существенное значение, чем учет слагаемого uc^2 в (2.3). Однако четвертые степени в F^+ значительно осложняют техническую сторону дела и, по-видимому, не существенно влияют на результат, поскольку в любом приближении, начиная со второго (т. е. учитывающем в F^+ одночлены u^2, c^2) кривые $p_{11}(t)$ имеют общую касательную в точке $t = 0$, а при $t \rightarrow \infty$ имеют практически один и тот же закон затухания.

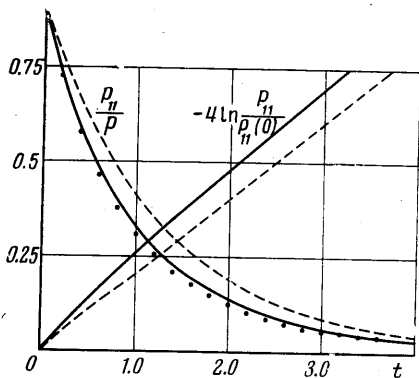


Фиг. 2

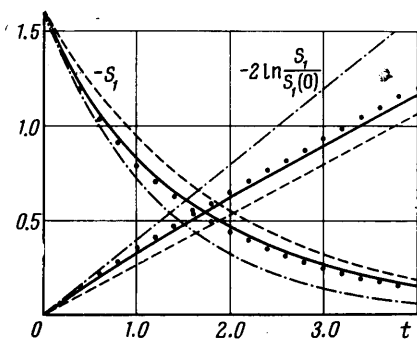


Фиг. 3

4. Одна из целей, которую преследовал автор при выполнении работы, состояла в выяснении возможности аппроксимации моментов интеграла столкновений. Приведенные результаты показывают, что даже для функций, сильно отличающихся от равновесной функции, значения моментов интеграла столкновений не сильно отличаются от соответствующих значений, вычисляемых для максвелловских молекул.



Фиг. 4



Фиг. 5

Это обстоятельство позволяет предположить, что моменты интеграла столкновений и для существенно неравновесных функций распределения можно выразить через моменты функции распределения.

Для молекул Максвелла (в принятых безразмерных переменных)

$$I_{11} = -^4/_{15}p_{11}, \quad I_{1jj} = -^8/_{15}S_1, \dots \quad (4.1)$$

точно так же, как для псевдомаквелловских молекул, для которых сечение столкновений обратно пропорционально относительной скорости сталкивающихся молекул [5]

$$\sigma|\xi - \xi_1| = \text{const} \quad (4.2)$$

Строго говоря, неизвестно, какая модель молекул справедлива. О сечении столкновений судят обычно по вязкости. Если для пространственно неоднородных движений модель молекул определяет зависимость вязкости от температуры, то в задаче о релаксации эта зависимость не имеет значения.

Условия (4.1) будут справедливыми и для твердых шаров (как и принималось в расчетах), если в интегралах, представляющих собой моменты от интеграла столкновений, относительную скорость g можно считать постоянной, причем такой, чтобы выполнялось условие (4.2). Впрочем, сама постоянная в (4.2) выбирается из условий удовлетворения равенствам (4.1).

С другой стороны, по теореме о среднем значении интеграла

$$I_{11} = g_0 \frac{1}{9\pi} \int \left[-u^2 + uu_1 + \frac{1}{4}(u - u_1)^2 + \frac{1}{12}g^2 \right] FF_1 dcdc_1 = -^{1/8}\sqrt{2\pi} g_0 p_{11}$$

$$I_{ijj} = -^{1/12}\sqrt{2\pi} g_0 S_1 \quad (4.3)$$

Здесь g_0 — некоторое среднее значение g .

Соотношения (4.1) показывают, каким нужно выбрать среднее значение g_0 , чтобы правые части (4.3) давали основной вклад в значение интегралов для широкого класса функций распределения. Положим таким образом

$$g_0 = ^{16/5}\sqrt{2\pi}^{-1}$$

Точность равенств (4.3) зависит от вида функций F . Значения интегралов можно уточнить, представляя g в виде степенного ряда относительно g_0

$$g = \sqrt{g^2} = g_0 + ^{1/2}g_0^{-1}(g^2 - g_0^2) + \dots \quad (4.4)$$

В соответствии с этим произвольный момент интеграла столкновений получим тоже в виде ряда, каждый член которого выражается через моменты функции распределения. Ограничиваясь линейной поправкой к g_0 , получаем

$$I_{11} = -\frac{4}{5}p_{11} + \left\{ \frac{2}{5}p_{11} + \frac{1}{9\pi g_0} \left[-\frac{7}{2}pp_{11} - \frac{1}{2}p_{11}^2 - p \int \left(u^2c^2 - \frac{1}{3}c^4 \right) Fdc \right] \right\}$$

$$I_{ijj} = -\frac{8}{15}S_1 + \left\{ \frac{4}{15}S_1 + \frac{1}{9\pi g_0} \left[-\frac{2}{3}p \int uc^4 Fdc - 2p_{11}S_1 + p_{11}S_{111} \right] \right\} \quad (4.5)$$

Расчеты показали, что для симметричного случая поправка в правых частях (4.5) мала. В частности в начальный момент

$$\frac{1}{p_{11}} \frac{dp_{11}}{dt} = -0.77 \quad \text{при } U_1 = U_2 = 1$$

что совпадает с точным численным значением I_{11} .

Для несимметричного случая линейные поправки уменьшают ошибки в начальных значениях показателей затухания от 26 до 7%. Результаты расчетов затухания p_{11} и S_1 с использованием аппроксимаций (4.5) на фиг. 4, 5 нанесены точками.

Расчеты проводились на БЭСМ-6 ВЦ АН СССР. Время расчета одного варианта до $t = 4$ без аппроксимации моментов интеграла столкновений ~ 5.5 час, использование аппроксимации моментов интеграла столкновений в линейном приближении позволило сократить это время до 45 сек, т. е. больше чем в 400 раз.

Поступило 26 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
2. Рыков В. А. О релаксации газа, описываемого кинетическим уравнением Больцмана. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. Washman M., Hamel B. A discrete ordinate technique for non-linear Boltzmann equation with application to pseudo-shock relaxation. In: «Rereliefed gas dynamics», vol. 1. N. Y., London, Acad. Press, 1967.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.