уравнения [1]. Интересно, что скорости скольжения в пределах точности расчетов совпадают, но профили скорости у самой стенки отличаются значительно.

Как уже отмечалось, эта задача решалась разными методами. В таблице дано сравнение коэффициентов скольжения, полученных разными авторами. (Все результаты взяты из [9].)

3. Как указывалось выше, задача о слое Кнудсена является, по существу, задачей Куэтта с другими граничными условиями. Положив в (2.1) градиент скорости равным нулю, получаем задачу Куэтта. На фиг. 3 представлены профили скоростей течения Куэтта для разных чисел K_n, полученных методом Монте-Карло (точки *1* и *2* — 9 полос, точки *3* — 17 полос) и точным решением модельного уравнения (пунктирные кривые). Здесь также видно, что профили скоростей у стенки для полного уравнения значительно отличаются от профилей, полученных из решения модельного уравнения.

Поступило 23 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas dynamics Boltrmann equation and their application to the slip-flow problem. Ann. Phys., 1962, vol. 20, No. 2, p. 219.
3. Ceregnani C., Sernagiotto E. Cylindrical Poiseuille Flow of a Rarefied Gas, Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 1.
4. Haviland J. K., Lavin M. L. Application of the Monte-Carlo method to Heat Transfer in a Rarefied Gas. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11.
5. Bird R. B. Approach to translational Equilibrium in a Rigid Sphere Gas. Phys. Fluids. 1963, vol. 5, No. 1518.
6. Власов В. И. Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 5.
7. Власов В. И., Горелов С. Л., Коган М. Н. Математический эксперимент для вычисления коэффициентов переноса. Докл. АН СССР, 1968, 179, № 6.
8. Welander P. On the temperature jump in a rarefied gass. Arkiv fär Fysik R. Häfte, 1954, vol. 6, No. 507.
9. Willis D. R. Comparison of Kinetic Theory Analyses of Linearired Couette Flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2.
10. Albertoni S., Cercignani C., Gottusso L. Numerical Evaluation of the Slip Coefficient Phys. Fluids., 1963, vol. 6, No. 7.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА, НАХОДЯЩЕГОСЯ НАД ТВЕРДОЙ СТЕНКОЙ В ПОЛЕ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ

И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(*Москва*)

Строится решение плоской линеаризованной задачи Куэтта методом разложения функции распределения по полупространственным полиномам от скоростей с коэффициентами, зависящими от пространственных координат. Эти коэффициенты находятся из решения систем моментных уравнений. При численных расчетах, использовались значения моментов от интеграла столкновений, вычисленные аналитически для молекул в виде твердых сфер. На основании функции распределения получено выражение для скорости скольжения.

Рассматривается одна из простейших граничных задач кинетической теории газов. Рассмотрим течение газа, находящегося над твердой плоской стенкой при наличии градиента массовой скорости, который вдали от стенки принимается постоянным. Выберем систему координат, в которой начало находится на стенке, ось x направлена по нормали к стенке, а ось y — вдоль поверхности. Поведение газа описывается статистической функцией распределения $f(x, \mathbf{v})$, которая удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Больцмана

$$(\mathbf{v}\nabla) f = \frac{\delta f}{\delta t} \tag{1}$$

где $\delta f / \delta t$ — интеграл столкновений. Интеграл столкновений дается выражением [1]

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \int d\mathbf{v}_1 \int gb\, db\, d\varepsilon (f_1'f' - f_1 f) \tag{2}$$

где $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}|$, b — прицельный параметр столкновения двух молекул со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$, ε — азимутальный угол рассеяния.

Задача существенно упрощается в предположении малости изменения массовой скорости на длине свободного пробега λ. В этом случае уравнение (1) может быть линеаризовано, так как функция распределения будет мало отклоняться от некоторого равновесного распределения, описываемого максвелловской функцией. Однако решение даже линеаризованной задачи представляет с математической точки зрения существенные трудности.

Один из методов построения решения состоит в упрощении линеаризованного оператора столкновений. Выражение, которым заменяется интеграл столкновений, имеет вид [2]

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{f_{eq} - f}{\tau} \tag{3}$$

где f_{eq} — локально-максвелловская функция, τ может быть константой или функцией температуры. При использовании в качестве оператора столкновений выражения (3) уравнение Больцмана существенно упрощается, что дает возможность получить точное аналитическое решение. Аналитическое решение задачи о плоском потоке Куэтта с использованием указанной замены оператора столкновений содержится в работах [3-6]. К этому следует добавить, что обзор различных приближенных методов решения граничных задач в кинетической теории газов с использованием модельного уравнения Больцмана содержится в работе [7].

Другой метод решения линеаризованного уравнения Больцмана состоит в разложении функции распределения по ортогональным полиномам от скоростей с коэффициентами, зависящими от пространственных координат. Коэффициенты разложения находятся из системы дифференциальных уравнений, полученной из кинетического уравнения.

Будем следовать последнему методу при решении плоской линеаризованной задачи Куэтта. Будем искать функцию распределения в виде

$$f = f^{(0)}[1 + \Phi(x, \mathbf{c})]$$

$$\mathbf{c} = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\mathbf{v}, \qquad f^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT} \tag{4}$$

Поправка $\Phi(x, \mathbf{c})$ к функции распределения в стационарном состоянии найдется из решения уравнения

$$c_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} = J(\Phi) \tag{5}$$

где $J(\Phi)$ — линеаризованный оператор столкновений, который имеет вид

$$J(\Phi) = \int d\mathbf{v}_1 \int |\mathbf{c} - \mathbf{c}_1|\, b\,db\,d\varepsilon f_1^{(0)}(\Phi_1' + \Phi' - \Phi_1 - \Phi). \tag{6}$$

В качестве газокинетического граничного условия на стенке примем, что часть q молекул отражается диффузно, а часть $(1 - q)$ зеркально. Целесообразно ввести функции распределения

$$f^+(x, \mathbf{c}) \quad (c_x > 0), \qquad f^-(x, \mathbf{c}) \quad (c_x < 0)$$

Тогда граничное условие на стенке будет иметь вид

$$f^+(0, \mathbf{c}) = qf^{(0)} + (1 - q)f^-(0, -c_x, c_y, c_z) \tag{7}$$

Учитывая разрывный характер функции распределения в пространстве скоростей вблизи стенки, будем искать поправку $\Phi(x, c)$ в виде разложения по полупространственным полиномам от скоростей

$$\Phi^\pm(x, \mathbf{c}) = a_0^\pm(x)c_y + a_1^\pm(x)c_xc_y \tag{8}$$

Подставляя функцию распределения (4) с учетом (8) в граничное условие (7), получим граничные условия для функций $a_i^\pm(x)$

$$a_0^+(0) = (1 - q)a_0^-(0), \qquad a_1^+(0) = (q - 1)a_1^-(0) \tag{9}$$

На больших расстояниях от стенки на функции $a_i^\pm(x)$ наложим условия, чтобы получить линейный профиль для массовой скорости газа. Эти условия будут определены ниже. Удобно ввести вспомогательную функцию

$$\operatorname{sign} c_x = 1 \quad (c_x > 0), \qquad \operatorname{sign} c_x = -1 \quad (c_x < 0)$$

С ее помощью $\Phi(x, \mathbf{c})$ выражается через $a_i^{\pm}(x)$ следующим образом

$$\Phi(x, \mathbf{c}) = {}^1/_2(a_0^+ + a_0^-)c_y + {}^1/_2(a_0^+ - a_0^-)c_y \operatorname{sign} c_x + {}^1/_2(a_1^+ + a_1^-)c_xc_y + {}^1/_2(a_1^+ - a_1^-)c_x \operatorname{sign} c_x \quad (10)$$

Так как $J(\Phi)$ — линейный оператор, то

$$J(\Phi) = {}^1/_2(a_0^+ - a_0^-)J(c_y \operatorname{sign} c_x) + {}^1/_2(a_1^+ + a_1^-)J(c_xc_y) + {}^1/_2(a_1^+ - a_1^+)J(c_xc_y \operatorname{sign} c_x)$$

При этом $J(c_y) = 0$ в силу закона сохранения импульса.

Умножая обе части уравнения (5) последовательно на

$$c_y(1 \pm \operatorname{sign} c_x)e^{-c^2}d\mathbf{c}, \qquad c_xc_y(1 \pm \operatorname{sing} c_x)e^{-c^2}d\mathbf{c}$$

и интегрируя по всему пространству скоростей, получим систему моментных уравнений

$$\begin{aligned} da_0^+ / dx &= a_0^+A_1 - a_0^-A_1 + a_1^+A_2 + a_1^-A_3 \\ da_0^- / dx &= a_0^+A_1 - a_0^-A_1 + a_1^+A_3 + a_1^-A_2 \\ da_1^+ / dx &= a_0^+B_1 - a_0^-B_1 + a_1^+B_2 + a_1^-B_3 \\ da_1^- / dx &= -a_0^+B_1 + a_0^-B_1 - a_1^+B_3 - a_1^-B_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты A_i, B_i выражаются через моменты от интеграла столкновений и имеют следующие значения

$$A_1 = b(I_1 - {}^1/_2\sqrt{\pi}I_2), \qquad B_1 = b[I_2 - {}^1/_2\sqrt{\pi}I_1] \qquad \left(b = \frac{4}{\pi(4-\pi)}\right)$$

$$A_2 = b[I_2 - {}^1/_2\sqrt{\pi}(I_3 + I_4)], \qquad B_2 = b[I_3 + I_4 - {}^1/_2\sqrt{\pi}I_2]$$

$$A_3 = b[I_2 - {}^1/_2\sqrt{\pi}(I_3 - I_4)], \qquad B_3 = b[I_3 - I_4 - {}^1/_2\sqrt{\pi}I_2]$$

Если ввести скобки для обозначения интегралов вида $[A, B] = \int AJ(B)e^{-c^2}d\mathbf{c}$, то интегралы I_j определяются при помощи следующих символов — скобок:

$$I_1 = [c_y \operatorname{sign} c_x, c_y \operatorname{sign} c_x], \qquad I_2 = [c_y \operatorname{sign} c_x, c_xc_y]$$

$$I_3 = [c_xc_y, c_xc_y], \qquad I_4 = [c_xc_y \operatorname{sign} c_x, c_xc_y \operatorname{sign} c_x]$$

Все величины I_j вычислены аналитически для молекул, взаимодействующих как упругие сферы. Методика вычисления содержится в работе [8]. Вычисленные значения I_j существенно отличаются от приведенных в работе [9] ошибочных значений. Величины I_j имеют следующие значения

$$I_1 = \frac{1 - 8\sqrt{2}}{12}\frac{\pi}{\lambda}, \qquad I_2 = -\frac{3\pi + 8}{32}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\pi}{\lambda}$$

$$I_3 = -\frac{2}{5}\frac{\pi}{\lambda}, \qquad I_4 = \frac{-46 + 17\sqrt{2}}{120}\frac{\pi}{\lambda} \quad (12)$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\begin{aligned} a_0^+ &= A + \beta_1 B + \beta_2 Bx + \alpha_0^+ Ce^{-\alpha x}, \qquad & a_1^+ &= B + \alpha_1^+ Ce^{-\alpha x} \\ a_0^- &= A + \beta_2 Bx + Ce^{-\alpha x}, & a_1^- &= B + \alpha_1^- Ce^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь A, B, C — постоянные интегрирования, которые определим ниже из граничных условий (9) и из условия на больших расстояниях от стенки

$$\beta_1 = 0.09145, \qquad \beta_2 = -0.9475\,\lambda^{-1}$$

$$\alpha_0^+ = 4.193, \quad \alpha_1^+ = -4.127, \quad \alpha_1^- = 0.5222, \quad \alpha = 2.201\,\lambda^{-1}$$

Решение системы (13) обладает недостатком; а именно на больших расстояниях от стенки функции распределения $f^+(x, c)$ и $f^-(x, c)$ оказываются различными, что связано с недостаточным числом членов в разложении функции распределения в ряд по полиномам от скорости. Указанный недостаток можно устранить, выбирая значения I_2 и I_3 из физического требования совпадения a_0^+ и a_0^-, на больших расстояниях от стенки [10]; а также предполагая, что решение точно переходит в распределение Чепмена — Энскога. Однако, вычисленные значения I_2 и I_3 мало отличаются от значений, полученных в работе [10], поэтому величины, вычисленные на основании функции распределения (13), будут тоже мало отличаться [1].

[1] В работе [10] приведены значения

$$I_2 = -\frac{4}{5\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{\lambda}, \qquad I_3 = -\frac{2}{5}\frac{\pi}{\lambda}$$

Вычислим на основании функций распределения (13) профиль упорядоченного движения газа вдоль твердой поверхности

$$u = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} v_y f\, d\mathbf{v} = \frac{1}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\left[a_0^+ + a_0^- + \frac{a_1^+ - a_1^-}{\sqrt{\pi}}\right] \tag{14}$$

На больших расстояниях от стенки $u(x)$ будет иметь вид

$$u(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}[2A + \beta_1 B + 2\beta_2 Bx], \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\beta_2 B \tag{15}$$

Поэтому, выбирая постоянную B в виде

$$B = \frac{2}{\beta_2}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\left(\frac{du}{dx}\right)_\infty$$

получим для массовой скорости правильное поведение на больших расстояниях. Другие постоянные находятся из граничных условий (9) и имеют следующие значения

$$A = -\frac{1}{q}\left[\frac{(1-q-\alpha_0^+)(2-q)}{\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-} + \beta_1\right]B, \qquad C = -\frac{2-q}{\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-}B \tag{16}$$

Из выражения (15) легко получить скорость скольжения, которая дается следующей формулой:

$$u^* = \frac{1}{\beta_2}\left\{-\frac{1}{q}\left[\frac{(1-q-\alpha_0^+)(2-q)}{\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-} + \beta_1\right] + \frac{\beta_1}{2}\right\}\left(\frac{du}{dx}\right) \tag{17}$$

После подстановки численных значений получим для скорости скольжения $q = 1$ следующую формулу:

$$u^* = 1.126\lambda\left(\frac{du}{dx}\right)_\infty \tag{18}$$

Как было отмечено выше, функция распределения, полученная на основании использования численных значений интегралов (12), не переходит на больших расстояниях от стенки в распределение Чепмена — Энскога. Если следовать предположению, указанному С. П. Бакановым и Б. В. Дерягиным в цитируемой работе [10], то функция распределения на больших расстояниях будет точно переходить в распределение Чепмена — Энскога. В этих предположениях поправки $a_i^\pm(x)$ к функции распределения будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_0^+ &= A + \gamma Bx + \beta_0^+ Ce^{-\beta x}, \qquad & a_1^+ &= B + \beta_1^+ Ce^{-\beta x} \\ a_0^- &= A + \gamma Bx + Ce^{-\beta x}, & a_1^- &= B + \beta_1^- Ce^{-\beta x} \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\gamma = \frac{8}{5\sqrt{\pi}}\frac{1}{\lambda}, \qquad \beta_0^+ = 4.563, \qquad \beta_1^+ = -4.475$$

$$\beta_1^- = 0.4549, \qquad \beta = 2.090\frac{1}{\lambda}, \qquad B = -\frac{5}{4}\sqrt{\pi}\lambda\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\left(\frac{du}{dx}\right)_\infty$$

$$A = -\frac{(2-q)}{q}\frac{(1-q-\beta_0^+)}{\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-}B, \qquad C = -\frac{(2-q)B}{\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-}$$

Подсчитаем на основании функций (19) скорость скольжения u^*. По аналогии с (17) имеет место формула

$$u^* = \frac{1}{\gamma}\left[-\frac{(2-q)}{q}\frac{1-q-\beta_0^+}{\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-}\right]\left(\frac{du}{dx}\right)_\infty$$

После подстановки численных значений будем иметь при $q = 1$

$$u^* = 1.130\lambda \left(\frac{du}{dx}\right)_\infty \tag{20}$$

В соответствии с выше сказанным результаты (18) и (20) для скорости скольжения отличаются всего на 0.3%.

Поступило 26 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3, p. 511.
3. Welander P. On the temperature jump in a rarefied gas. Ark. Fysik, 1954, vol. 7, No. 6, p. 507.
4. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their application to the slip-flow problem. Ann. of Physics, 1962, vol. 20, No. 2, p. 219.
5. Albertoni S., Cercignani C., Gotusso L. Numerical Evaluation of the Slip Coefficient. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 7, p. 93.
6. Willis O. P. Comparison of kinetic theory analysis of linearized Couette flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2, p. 127. (Рус. перев.: «Механика», Период. сб. пер. иностр. статей, 1963, № 2.)
7. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2, p. 141 (Рус. перев.: «Механика», Период. сб. пер. иностр. статей, 1958, № 5.)
8. Дерягин Б. В., Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. О построении решений кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
9. Gross E. P., Ziering S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. of Fluids, 1968, vol. 1, No. 3, p. 215.
10. Баканов С. П., Дерягин Б. В. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, № 1, с. 71.

О НЕИЗОТРОПНОЙ РЕЛАКСАЦИИ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ГАЗА В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. М. ШАХОВ

(*Москва*)

В работе [1] автором предложен метод аппроксимации больцмановского интеграла столкновений. В качестве примера решена задача об изотропной релаксации в однородном пространстве — простейшая задача кинетической теории газов, для которой В. А. Рыковым получено точное решение [2].

С целью дальнейшей отработки метода аппроксимации интеграла столкновений была решена более типичная для теории разреженных газов задача о релаксации, в которой отличны от нуля моменты второго и третьего порядка,— задача о релаксации при наличии осевой симметрии в пространстве скоростей. В качестве начальной функции распределения была выбрана функция в виде линейной комбинации двух максвелловских функций с массовыми скоростями вдоль оси симметрии — задача о псевдоскачке [3]. Расчеты показали, что для начальных функций, симметричных относительно плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (тепловой поток равен нулю), дополнительное напряжение, обусловленное отклонением от равновесия, затухает со временем для молекул — шаров практически так же, как и для максвелловских молекул. Для несимметричной начальной функции (тепловой поток отличен от нуля), достаточно сильно отличающейся от равновесной, показатель затухания дополнительного напряжения и теплового потока для молекул-шаров несколько больше, чем для молекул Максвелла.