РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

С. Л. ГОРЕЛОВ, М. Н. КОГАН

(*Москва*)

Кинетическое уравнение Больцмана представляет собой весьма сложное интегро-дифференциальное уравнение, которое очень трудно решать и анализировать. Поэтому в последние годы большое число работ посвящается решению линеаризованного уравнения (соответствующую библиографию можно найти, например, в [1]. На линейных задачах выявляются многие свойства полного уравнения Больцмана и апробируются методы его решения. Кроме того, ряд практически интересных явлений с хорошей точностью описывается линеаризованным уравнением Больцмана (медленные движения, звуковые колебания, течение в пристеночном слое Кнудсена, определение коэффициентов переноса и другие). Однако решение даже одномерных задач и для линеаризованного уравнения Больцмана оказывается весьма трудным и подобные задачи решаются приближенными методами (разложения по числам Кнудсена, метод моментов, разложение в ряды и т. д.). Весьма эффективные методы развиты для решения линеаризованного модельного уравнения Больцмана [2,3,9,10].

В данной работе для решения линейных задач применяется метод статистических испытаний (Монте-Карло). Для решения уравнения Больцмана методы Монте-Карло применялись и ранее [4–6]. Но непосредственно для решения линейных задач эти методы не применимы, так как при состояниях, близких к равновесным, все процессы, происходящие в газе, определяются малыми отклонениями от равновесия. Поэтому ошибки, возникающие при расчете несущественной для задачи равновесной части, становятся определяющими. Для преодоления этой трудности в работе применен метод, предложенный в [7], где он использовался для определения коэффициентов переноса. В данной работе решаются задачи о течении в слое Кнудсена (определение скорости скольжения на стенке) и о линеаризованном течении Куэтта.

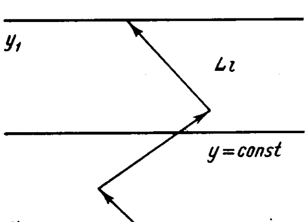
Обозначения

f — функция распределения молекул в слое
φ — малая добавка к равновесной функции распределения,
m — масса молекулы,
n — плотность,
K — постоянная Больцмана,
T — температура,
ξ — скорость молекулы,
c — тепловая скорость молекулы,
x, y — координаты,
L_i — траектория молекулы,
P — вероятность пролета данного расстояния,
p_{xy} — компоненты тензора напряжений,
p — давление,
W — вероятность пролета слоя по данной траектории,
N — число траекторий,
u — средняя скорость молекул,
λ — длина свободного пробега,
μ — коэффициент вязкости,
K_n — число Кнудсена,
g — относительная скорость молекул при столкновении,
σ — сечение молекулы.

1. Рассмотрим слабо возмущенное одномерное течение (параметры потока меняются вдоль оси y), функцию распределения которого можно представить в виде

$$f = f_{00}(1+\varphi), \qquad f_{00} = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2}\exp\frac{-m\xi^2}{KT_0} \tag{1.1}$$

Здесь f_{00} — равновесная функция; n_0 и T_0 — соответственно равновесная плотность и температура газа; m — масса молекулы, ξ — ее скорость; K — постоянная Больцмана; $\varphi = \varphi(y, \xi)$ — малая добавка, квадратом которой пренебрегается.



Фиг. 1

Пусть интересующее нас течение расположено между плоскостями $y = y_0$ и $y = y_1$ (фиг. 1), и пусть на этих плоскостях задан закон отражения молекул.

Рассмотрим следующую схему метода. Положим вначале, что молекулы распределены с плотностью f_{00}. И пусть пробная молекула пролетает слой по какой-либо траектории L_i. Вероятность W_0 того, что молекула пролетит по этой траектории, складывается из вероятности вылета молекулы с одной из границ со скоростью ξ, равной $f_{00}(\xi)$, вероятности $P_0(r, \xi)$ пролета данного расстояния r (плотность вероятности свободного пробега r, соответствующая функция $f_{00}(\xi)$), вероятности столкновения с молекулой, летящей со скоростью ξ_1, пропорциональной $g\sigma(g)f_{00}(\xi_1)$, где $g = |\xi - \xi_1|$ — относительная скорость и $\sigma(g)$ — сечение молекулы и т. д.).

Очевидно, вероятность пролета слоя по данной траектории равна (события независимы)

$$W_0 = f_{00}(\xi)P_0(r, \xi)g\sigma(g)f_{00}(\xi_1)\ldots \tag{1.2}$$

Пусть теперь в слое молекулы распределены с функцией $f(y, \xi)$. Тогда вероятность W пролета молекулы по той же траектории L_i, аналогично (1.2), равна

$$W = f(y, \xi)P(r, \xi)g\sigma(g)f(y, \xi_1)\ldots \tag{1.3}$$

Если, например, поток импульса, переносимый молекулой через сечение $y =$ $=$ const по данной траектории L_i, обозначить через $\Delta p_{xyi}(y)$, то поток импульса, осредненный по большому числу траекторий N, для функции f_{00} с точностью до случайных флуктуаций, равен

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta p_{xyi}(y) = 0 \tag{1.4}$$

Среди множества всех траекторий для функции f каждая траектория L_i встречается в W / W_0 раз чаще, чем для f_{00}, поэтому для получения потока импульса $p_{xy}(y)$ надо поток импульса, переносимый по каждой траектории в соответствии с f_{00}, умножить на W_i / W_{0i}; таким образом

$$p_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta p_{xyi}\frac{W_i}{W_{0i}} \tag{1.5}$$

Для исключения ошибок, вносимых f_{00}, вычтем из (1.5) выражение (1.4)

$$p_{xy}(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{W_i}{W_{0i}} - 1\right)\Delta p_{xyi}(y) \tag{1.6}$$

Содержимое скобок после линеаризации отношения W_i / W_{0i} явно выражается через φ. Заметим, что

$$p_{xy} = \int \xi_x\xi_y f_{00}\varphi\, d\xi = \sum_{jk}\xi_{xj}\xi_{yk}f_{00j}\varphi_{jk}\Delta\xi = \sum_{jk}p_{xyjk} \tag{1.7}$$

$$d\xi = d\xi_y d\xi, \quad \Delta\xi = \Delta\xi_x\Delta\xi_y\Delta\xi_z$$

$$p_{xyjk} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{W_i}{W_{0i}} - 1\right)\Delta p_{xyjk} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7), находим

$$\varphi_{jk} = \frac{1}{N\xi_{xj}\xi_{yk}f_{00jk}\Delta\xi}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{W_i}{W_{0i}} - 1\right)\Delta p_{xyijk} \tag{1.9}$$

Задача решается методом последовательных приближений. Пусть заданы $\varphi_{ju}{}^{(N)}(y, \xi)$ — значения φ в N-м приближении. Тогда по (1.9) находятся значения $\varphi_{ju}{}^{(N+1)}$ и т. д. Зная φ, можно найти любые макроскопические функции.

2. Рассмотрим задачу о кнудсеновском слое. Исследование течения в кнудсеновском слое и условий скольжения начато еще Максвеллом. Условия скольжения автоматически получаются при исследовании течения Куэтта при малых числах Кнудсена. Строго задача о течении в слое Кнудсена решена лишь для модельного уравнения [8–10] (см. также [1]). Полученное ниже решение можно рассматривать как точное решение задачи для полного уравнения Больцмана.

Известно, что разложение Гильберта Энскога — Чепмена во внутренних точках течения дает решение, асимптотически сходящееся к решению уравнения Больцмана при числах Кнудсена, стремящихся к нулю. Однако при любом сколь угодно малом числе Кнудсена вблизи границ имеется область, в которой этот ряд не представляет решения уравнения Больцмана. Толщина этой области, названной слоем Кнудсена, порядка длины свободного пробега λ.

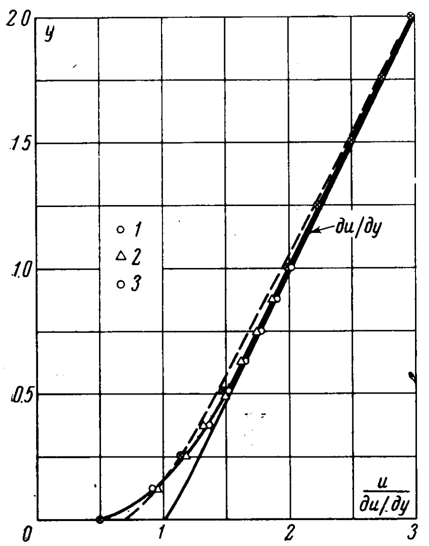
Рассмотрим течение вне слоя Кнудсена в Навье — Стоксовском приближении. Можно показать [1], что течение в слое Кнудсена описывается линеаризованным уравнением Больцмана. Нужно найти функцию распределения $f(y, \xi)$, которая на стенке удовлетворяет закону отражения молекул, а на бесконечности переходит в функцию распределения Навье — Стоксовского приближения. Вне слоя Кнудсена могут существовать градиенты $\partial u / \partial y$, $\partial T / \partial y$, $\partial T / \partial x$ и т. д.

Так как задача линейна, то общее решение можно представить как сумму решений, полученных при наличии лишь одного из градиентов. Рассмотрим задачу о скорости скольжения, в которой отлична от нуля лишь производная $\partial u / \partial y$. Для простоты примем на стенке диффузный закон отражения. На бесконечности (практически на расстоянии нескольких длин свободного пробега) задается Навье — Стоксовская функция распределения. В данном случае она имеет вид

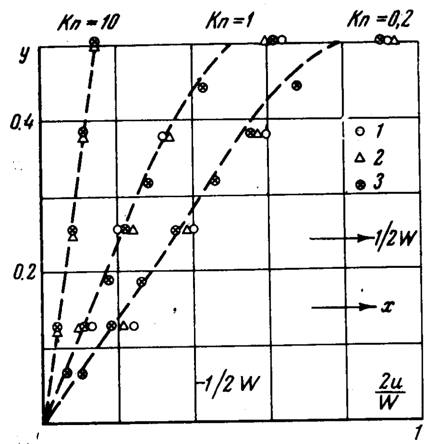
$$f = f_0\left[1 + \frac{p_{xy}}{2p}\left(\frac{m}{kT}\right)c_x c_y\right] \tag{2.1}$$

$$f_0 = n(x, 0)\left(\frac{m}{2\pi kT(x, 0)}\right)^{3/2} \exp(\xi - u)^2, \qquad p_{xy} = -\mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

При задании данных на линии, отстоящей на некотором расстоянии от стенки (в расчетах эта линия выбирается на расстоянии одной и двух длин свободного пробега), можно задать лишь функцию распределения для молекул, идущих к стенке. При выбранном градиенте скорости в функции (2.1) можно задавать произвольное значение скорости u, входящее в f_0. По существу, эта задача Куэтта с одной неподвижной стенкой, отражающей диффузно, и второй — двигающейся со скоростью u и отражающей с функцией распределения (2.1) для молекул с $\xi_y < 0$. Задавая произвольные значения скорости при заданном градиенте скорости (в расчетах равен 1) получаем решение для этого «течения Куэтта».



Фиг. 2



Фиг. 3

Однако лишь при одном значении скорости u функция распределения падающих на верхнюю границу молекул определяется той же функцией (2.1) (точно она может определяться формулой (2.1) лишь при переносе границы на бесконечность). При этой скорости u полученный из решения градиент скорости у верхней границы равен заданному. Имеется простой алгоритм выбора необходимого значения u. Если выбрать значение u меньше (больше) нужного, то получаемая в результате решения скорость на границе оказывается еще меньше (больше) выбранного значения.

Уравнение		Литература
линейное	модельное	
—	1.012	Wellis
1.047	1.021	Gross, Jaskson Ziering
0.886	0.886	Lees
1.016	—	Wang Ghang Uhlenbeck
—	1.092	Welander
1.015	—	Данная работа

На фиг. 2 показан получающийся в результате расчетов профиль скоростей в слое Кнудсена. О точности метода можно судить из сравнения профилей, полученных при различном выборе случайных чисел (точки *1* и *2*), и кривой, полученной при удвоенной толщине слоя Кнудсена (точки *3*). Точность определения скорости скольжения примерно $2 \div 3\%$. Для сравнения пунктиром нанесен профиль скорости, полученный точным решением модельного уравнения [1]. Интересно, что скорости скольжения в пределах точности расчетов совпадают, но профили скорости у самой стенки отличаются значительно.

Как уже отмечалось, эта задача решалась разными методами. В таблице дано сравнение коэффициентов скольжения, полученных разными авторами. (Все результаты взяты из [9].)

3. Как указывалось выше, задача о слое Кнудсена является, по существу, задачей Куэтта с другими граничными условиями. Положив в (2.1) градиент скорости равным нулю, получаем задачу Куэтта. На фиг. 3 представлены профили скоростей течения Куэтта для разных чисел K_n, полученных методом Монте-Карло (точки *1* и *2* — 9 полос, точки *3* — 17 полос) и точным решением модельного уравнения (пунктирные кривые). Здесь также видно, что профили скоростей у стенки для полного уравнения значительно отличаются от профилей, полученных из решения модельного уравнения.

Поступило 23 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas dynamics Boltrmann equation and their application to the slip-flow problem. Ann. Phys., 1962, vol. 20, No. 2, p. 219.
3. Ceregnani C., Sernagiotto E. Cylindrical Poiseuille Flow of a Rarefied Gas, Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 1.
4. Haviland J. K., Lavin M. L. Application of the Monte-Carlo method to Heat Transfer in a Rarefied Gas. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11.
5. Bird R. B. Approach to translational Equilibrium in a Rigid Sphere Gas. Phys. Fluids. 1963, vol. 5, No. 1518.
6. Власов В. И. Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 5.
7. Власов В. И., Горелов С. Л., Коган М. Н. Математический эксперимент для вычисления коэффициентов переноса. Докл. АН СССР, 1968, 179, № 6.
8. Welander P. On the temperature jump in a rarefied gass. Arkiv fär Fysik R. Häfte, 1954, vol. 6, No. 507.
9. Willis D. R. Comparison of Kinetic Theory Analyses of Linearired Couette Flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2.
10. Albertoni S., Cercignani C., Gottusso L. Numerical Evaluation of the Slip Coefficient Phys. Fluids., 1963, vol. 6, No. 7.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА, НАХОДЯЩЕГОСЯ НАД ТВЕРДОЙ СТЕНКОЙ В ПОЛЕ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ

И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(*Москва*)

Строится решение плоской линеаризованной задачи Куэтта методом разложения функции распределения по полупространственным полиномам от скоростей с коэффициентами, зависящими от пространственных координат. Эти коэффициенты находятся из решения систем моментных уравнений. При численных расчетах, использовались значения моментов от интеграла столкновений, вычисленные аналитически для молекул в виде твердых сфер. На основании функции распределения получено выражение для скорости скольжения.

Рассматривается одна из простейших граничных задач кинетической теории газов. Рассмотрим течение газа, находящегося над твердой плоской стенкой при наличии градиента массовой скорости, который вдали от стенки принимается постоянным. Выберем систему координат, в которой начало находится на стенке, ось x направлена по нормали к стенке, а ось y — вдоль поверхности. Поведение газа описывается статистической функцией распределения $f(x, \mathbf{v})$, которая удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Больцмана

$$(\mathbf{v}\nabla) f = \frac{\delta f}{\delta t} \tag{1}$$

где $\delta f / \delta t$ — интеграл столкновений. Интеграл столкновений дается выражением [1]

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \int d\mathbf{v}_1 \int gb\, db\, d\varepsilon (f_1'f' - f_1 f) \tag{2}$$

где $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}|$, b — прицельный параметр столкновения двух молекул со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$, ε — азимутальный угол рассеяния.