3. Налбандян А. Б. Изучение кинетики и механизма цепных разветвленных реакций в газовой фазе. Усп. химии, 1966, т. 35, № 4, стр. 587—618.
4. Duff R. W. Calculation of reaction profiles behind steady state shock waves. I. Application to detonation waves. J. Chem. Phys., 1958, vol. 28, p. 1193.
5. Pergament H. S. A theoretical analysis of nonequilibrium hydrogen-air reactions in flow systems. AIAA — ASME Paper, April, 1963, 63—113.
6. Стулов В. П., Турчак Л. И. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха с учетом колебательной релаксации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
7. Millikan R. C., White D. R. Systematics of vibrational relaxation. J. Chem. Phys., 1963, vol. 39, No. 12, p. 3209.
8. Kiefer J. H., Lutz R. W. Vibrational relaxation of hydrogen. J. Chem. Phys., 1966, vol. 44, No. 2, p. 668.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. П. ВОРОБЬЕВ

(*Москва*)

Рассмотрена задача об устойчивости тангенциального разрыва скорости двух сред разной плотности, находящихся в акустическом поле. Из решения уравнений для малых возмущений следует, что акустические колебания, наложенные поперек поверхности раздела, стабилизируют или дестабилизируют, в зависимости от частоты, тангенциальный разрыв скорости. Решение проведено для осесимметрического и плоского случая. Воздействие акустического поля на гидродинамическую неустойчивость обусловлено скачком градиента потенциальной энергии акустического поля на поверхности разрыва плотности и скорости сред. В плоском случае имеет место аналогия между действием акустического поля и поля силы тяжести на устойчивость поверхности раздела двух сред разной плотности.

Рассмотрим устойчивость коаксиального течения с разрывом скорости и плотности в цилиндрическом канале постоянного сечения и бесконечной длины. Пусть в канале создано радиальное акустическое поле заданной частоты ω_0 (например, радиальными колебаниями стенки канала). Средние скорость и плотность среды в отсутствие акустического поля в центральной зоне $r \leqslant r_0$ есть U_{01} и ρ_{01}, для зоны $r_0 < r \leqslant R$, U_{02} и ρ_{02} соответственно.

Акустические составляющие $\mathbf{u}_1$, ρ_1, p_1 определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \nabla)\mathbf{u}_1 = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0 + \rho_1}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \nabla)\rho_1 + (\rho_0 + \rho_1)\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0 \tag{1}$$

$$(p_0 + p_1)(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = \mathrm{const}$$

причем

$$\mathbf{u}_1 = (u_{r1}(r, t), 0, 0), \qquad \rho_1 = \rho_1(r, t), \qquad p_1 = p_1(r, t)$$

На поверхности раздела двух сред непрерывны нормальные к поверхности раздела скорости и давления, т. е.

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u_{r1}^{(1)} = u_{r1}^{(2)}, \qquad p_1^{(1)} = p_1^{(2)} \quad \text{при } r = r_0 + \xi_1$$

Здесь ξ_1 — радиальное акустическое смещение поверхности раздела.

Два других граничных условия для акустического поля получим, потребовав ограниченность акустических величин на оси канала и равенство радиальной составляющей акустической скорости на стенке канала известной скорости колебаний самой стенки, т. е.

$$u_{r1}^{(2)} = u(t) \qquad \text{при } r = R + \xi_w$$

Система уравнений для малых возмущений $\mathbf{u}'$, ρ', p' в линейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}+\nabla((\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)\mathbf{u}')-\mathbf{u}'\times \operatorname{rot}(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)-(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)\times \operatorname{rot}\mathbf{u}'=-\nabla\left(\frac{p'}{\rho_0+\rho_1}\right)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\nabla)\rho'+\rho'\operatorname{div}(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)+\operatorname{div}(\rho_0+\rho_1)\mathbf{u}'=0,\quad p'=\gamma\frac{p_0+p_1}{\rho_0+\rho_1}\rho' \tag{2}$$

Радиальное акустическое поле безвихревое, поэтому уравнение движения допускает решение в виде

$$\mathbf{u}'=-\nabla\varphi \tag{3}$$

Тогда из системы (2) можно получить

$$p'=(\rho_0+\rho_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\nabla)\varphi\right) \tag{4}$$

Сама же система (2) приводится к одному уравнению для потенциала φ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\{2(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\nabla)+(\gamma-1)\operatorname{div}\mathbf{u}_1\}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left\{2\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t},\nabla+(\gamma-1)(\operatorname{div}\mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\nabla)-\right.$$

$$\left.-a^2\Delta+(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\nabla)^2+((\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\nabla)\mathbf{u}_1),\nabla\right\}\varphi=0\quad\left(a^2=\gamma\frac{p_0+p_1}{\rho_0+\rho_1}\right) \tag{5}$$

Если $\xi_s'(z,\theta,t)$ — возмущение поверхности раздела, то с каждой стороны от этой поверхности должно выполняться соотношение

$$\frac{d\xi_s'}{dt}=\frac{\partial\xi_s'}{\partial t}+U_0\frac{\partial\xi_s'}{\partial z}=u_r'\qquad\text{при } r=r_0+\xi_1$$

а из условия непрерывности давления на возмущенной поверхности раздела

$$[p']+\left[\frac{\partial p_1}{\partial r}\right]\xi_s'=0\qquad\text{при } r=r_0+\xi_1$$

где прямая скобка здесь и в дальнейшем означает скачок величины на разрыве.

Ограниченность возмущений на оси канала и обращение в нуль радиальной составляющей возмущения скорости на стенке канала $u_r'=0$ при $r=R+\xi_w$ замыкают систему граничных условий для возмущений.

Заменив u_r' и p' при помощи (3)—(4), граничные условия преобразуем к виду

$$\frac{\partial\xi_s'}{\partial t}+U_{01}\frac{\partial\xi_s'}{\partial z}=-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r},\qquad \frac{\partial\xi_s'}{\partial t}+U_{02}\frac{\partial\xi_s'}{\partial z}=-\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r} \tag{6}$$

$$\left[(\rho_0+\rho_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}+u_{r1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right]+\left[\frac{\partial p_1}{\partial r}\right]\xi_s'=0\qquad\text{при } r=r_0+\xi_1$$

$$\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}=0\qquad\text{при } r=R+\xi_w$$

Таким образом, задача об устойчивости тангенциального разрыва скорости в акустическом поле приводит к решению уравнения (5) в каждой зоне при граничных условиях (6). Так как коэффициенты уравнения и граничных условий не зависят от z, θ, то будем искать решение, пропорциональное

$$e^{i(kz+m\theta)}$$

Известно, что такое течение является абсолютно неустойчивым при любой, сколь угодно малой разности скоростей [1], причем характерная частота нарастания возмущений $\omega^*\sim ku^*$ (k — волновое число возмущений в направлении течения, u^* — характерная скорость течения среды). При наложении внешнего акустического поля с частотой ω_0 источник возникновения неустойчивости сохраняется и сохраняется присущая ему характерная частота нарастания возмущений ω^*.

Если $\omega_0\gg\omega^*$, то влияние акустического поля на устойчивость течения будем учитывать через усредненные по времени величины, характеризующие акустическое поле.

Усредняя коэффициенты уравнения (5) и граничных условий (6) по периоду вынужденных колебаний $\tau_0 = 2\pi / \omega_0$, вместо уравнения и граничных условий с быстро меняющимися по t коэффициентами получим уравнение и граничные условия с коэффициентами, не зависящими от t. Оценка членов уравнения (5) показывает в этом случае, что можно пренебречь членами, содержащими $\partial\varphi / \partial t$, так как отношение этих членов к остальным имеет порядок $M^2 = u^{*2} / a^2 \ll 1$.

Ограничиваясь рассмотрением влияния акустического поля на устойчивость с точностью до членов вплоть до порядка $\varepsilon^2 = u_1^2 / a^2 \ll 1$ и учитывая, что в граничное условие, выражающее непрерывность давления через поверхность раздела, входит коэффициент $\sim \varepsilon^2$, можно в пределах принятого приближения пренебречь действием акустического поля на возмущения в объеме, получив при этом для φ приближенное уравнение

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Представив φ в виде

$$\varphi = \Phi(r)e^{i(kz+m\theta+\omega t)}$$

получим

$$\Phi^{(1)} = C_1 I_m(kr) \qquad \text{при } 0 \leqslant r < r_0 + \xi_1$$
$$\Phi^{(2)} = C_2 I_m(kr) + C_3 K_m(kr) \qquad \text{при } r_0 + \xi_1 < r \leqslant R + \xi_w \tag{7}$$

Здесь I_m и K_m — функции Бесселя m-го порядка от чисто мнимого аргумента. Положим

$$\xi_s'(z, \theta, t) = Z(z, t)e^{i\omega t}$$

тогда система граничных условий (6) после исключения $Z(z, t)$ и усреднения коэффициентов по времени приводится к виду

$$\Omega_2 N\Phi^{(1)} = \Omega_1 N\Phi^{(2)}, \qquad [\Omega L\Phi] + \frac{1}{\Omega_1}AN\Phi^{(1)} = 0, \qquad S\Phi^{(2)} = 0 \tag{8}$$

Здесь

$$\Omega_1 = \omega + kU_{01}, \qquad \Omega_2 = \omega + kU_{02}$$
$$A = \left\langle\left[\frac{\partial p_1}{\partial r}\right]\right\rangle \equiv \left\langle\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial r}\right\rangle, \qquad N\Phi = \left\langle\frac{d\Phi}{dr}\right\rangle,$$
$$L\Phi = \langle(\rho_0 + \rho_1)\Phi\rangle \quad \text{при } r = r_0 + \xi_1$$
$$S\Phi = \left\langle\frac{d\Phi}{dr}\right\rangle \quad \text{при } r = R + \xi_w$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают усреднение по $\tau_0 = 2\pi / \omega_0$.

Подставив $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ из (7) в граничные условия (8), получим однородную систему относительно неопределенных коэффициентов C_1, C_2, C_3. Равенство детерминанта этой системы нулю, что является необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения для φ, дает квадратное уравнение относительно $i\omega$, решением которого будет

$$i\omega = \frac{1}{1+\alpha}\left\{-ik(\alpha U_{01} + U_{02}) \pm \sqrt{\alpha(k^2(U_{01} - U_{02})^2 + A\beta(1+\alpha))}\right\} \tag{9}$$

причем коэффициенты α и β имеют вид

$$\alpha = \left(\frac{SK_m}{SI_m} - \frac{NK_m}{NI_m}\right)\left(\frac{L^{(2)}K_m}{L^{(1)}I_m} - \frac{L^{(2)}I_m}{L^{(1)}I_m}\frac{SK_m}{SI_m}\right)^{-1}, \qquad \beta = \frac{NI_m}{L^{(1)}I_m} \tag{10}$$

Нарастающие по t решения будут отсутствовать, если подкоренное выражение в (9) отрицательно, а так как $\alpha > 0$, то получаем условие устойчивости

$$k^2(U_{01} - U_{02})^2 \leqslant -A\beta(1+\alpha) \tag{11}$$

Использовав систему уравнений (1) и граничные условия для акустического поля, находим, что

$$A = \left\langle\left[\frac{\partial E}{\partial r}\right]\right\rangle + o(\varepsilon^2) \qquad \text{при } r = r_0 \qquad \left(E = \frac{p_1^2}{2\rho_0 a_0^2}\right) \tag{12}$$

Здесь E — потенциальная энергия акустического поля, причем p_1 может быть взято из уравнений линейной акустики. Подставляя выражение (12) для A в (11) и используя обозначения (10), с точностью до членов порядка ε^2, получаем окончательное условие устойчивости

$$k^2(U_{01}-U_{02})^2 \leqslant -\left\langle\left[\frac{\partial E}{\partial r}\right]\right\rangle\left\{\frac{I_m'(kr_0)}{\rho_{01}I_m(kr_0)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}\frac{I_m(kr_0)}{I_m'(kr_0)}\frac{I_m'(kr_0)K_m'(kR)-K_m'(kr_0)I_m'(kR)}{-I_m(kr_0)K_m'(kR)+K_m(kr_0)I_m'(kR)}\right)\right\} \qquad (13)$$

Здесь выражение в фигурных скобках положительно при любых k, m, поэтому необходимым условием стабилизации течения будет $A<0$.

Очевидно, что $A\neq 0$ лишь в том случае, если различны скорости звука двух сред; это следует из уравнений линейной акустики.

Так как потенциальная энергия акустического поля в канале является периодической функцией от радиуса с периодом, равным половине длины волны вынужденных колебаний, то изменением частоты вынужденных колебаний или положения поверхности раздела r_0 можно сделать правую часть условия (13) положительной или отрицательной. В последнем случае акустическое поле оказывает дестабилизирующее действие.

Для выяснения смысла полученного условия устойчивости удобно от цилиндрической конфигурации системы перейти к плоской и ввести в рассмотрение ускорениэ силы тяжесть g.

Решение, аналогичное проведенному выше, приводит к условию устойчивости

$$k^2(U_{01}-U_{02})^2 \leqslant \left[-\left\langle\frac{\partial E}{\partial r}\right\rangle+\rho_0 g\right]\frac{\operatorname{th} kr_0}{\rho_{01}}\left(1+\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}\frac{\operatorname{th} k(R-r_0)}{\operatorname{th} kr_0}\right) \qquad (14)$$

Здесь r — координата поперек поверхности раздела с положительным направлением против силы тяжести. R — равновесное положение колеблющейся стенки.

Из (14) следует, что величина

$$g^* = -\frac{1}{[\rho_0]}\left\langle\left[\frac{\partial E}{\partial r}\right]\right\rangle$$

выполняет роль эффективного ускорения силы тяжести, знак которого устанавливается выбором частоты вынужденных колебаний ω_0.

Условие устойчивости (14) показывает, что наложенное акустическое поле, как и поле силы тяжести, может стабилизировать разрыв скорости лишь по отношению к достаточно длинноволновым возмущениям.

Если $U_{01}=U_{02}$, то (14) обобщает условие устойчивости плоской поверхности раздела двух сред разной плотности, находящихся в поле тяжести (задача Рэлея — Тейлора), на случай действия акустического поля

$$[\rho_0]\,g \geqslant \left\langle\left[\frac{\partial E}{\partial r}\right]\right\rangle \qquad (15)$$

откуда следует, что при $A<0$ возможна стабилизация неустойчивого равновесия, когда тяжелая среда находится над легкой, т. е. при $[\rho_0]=\rho_{01}-\rho_{02}<0$.

При отсутствии акустического поля условия устойчивости (13)—(15) согласуются с условиями, содержащимися, например, в работе [2].

Смысл полученных условий устойчивости (13)—(15) заключается, очевидно, в том, что при выходе системы из равновесия энергия возмущения затрачивается на совершение работы против сил акустического поля и возмущение не нарастает.

Решение данной задачи было предпринято под влиянием работы [3] об акустических подшипниках.

В заключение автор выражает признательность К. И. Артамонову за советы и внимание к проделанной работе.

Поступило 17 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Cearendon press. Oxford, 1961.
3. Seegal M. Acoustic radiation pressure bearing. J. Acoust. Soc. America, 1961, vol. 33, No. 5, p. 566—574.