

Функции  $f$  и  $h$  из (2.5) связаны уравнениями

$$f + \beta f' = h', \quad ff' = -h|h| \quad (2.6)$$

Эта система не содержит явно независимой переменной и однородна по  $f$  и  $h$ , откуда следует, что она позволяет получить решение в квадратурах. Введем новую искомую функцию  $w = h/f$  и будем считать  $f$  независимой переменной, тогда для  $w$  получим уравнение с разделяющимися переменными

$$f \frac{dw}{df} = -w + \beta - \frac{1}{w|w|}$$

Окончательно имеем

$$f = \exp \left\{ \int \left[ -w + \beta - \frac{1}{w|w|} \right]^{-1} dw \right\}, \quad \eta = - \int \left\{ w|w| \left( -w + \beta - \frac{1}{w|w|} \right) \right\}^{-1} dw$$

Исследование этого решения во многом аналогично предыдущему случаю.

Инвариантные решения представляют самостоятельный интерес и могут быть применены для оценки приближенных методов. Более того, они могут служить основой для разработки новых приближенных методов, что весьма важно для решения многих задач магистрального газоснабжения.

Исследование течений по трубам, которые моделируются системой (0.1) с другими значениями  $m$  и  $n$ , имеет много общего с рассмотренным случаем.

Получено 26 II 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сухарев М. Г. Инвариантные решения уравнений, описывающих движение жидкости и газа в длинных трубопроводах. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
4. Асагурия А. Ш., Галиуллин З. Т., Черникин В. И. О неустановившихся движениях газа в трубопроводах. Изв. вузов «Нефть и газ», 1961, № 10.
5. Ходанович И. Е., Темпель Ф. Г. Об автомодельных движениях газа в трубопроводах. Тр. ВНИИГАЗа, вып. 5 (3), М., Гостоптехиздат, 1959.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.

#### ОБ ИМПУЛЬСЕ СИЛ И МОМЕНТОВ, СООБЩАЕМЫХ ТОНКОМУ КРЫЛУ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ

А. И. ГОЛУБИНСКИЙ (Москва)

При помощи теоремы обратимости, справедливой при нестационарном обтекании тонкого крыла конечного размаха, показано, что при произвольном нестационарном обтекании крыла, движущегося в газе с постоянной средней скоростью, значения импульсов нестационарных сил и моментов, приложенных к крылу, совпадают с соответствующими значениями, определенными по квазистационарной теории.

Известная теорема обратимости течения в линеаризированной теории нестационарного обтекания тонкого крыла произвольной формы в плане выражается следующим равенством [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x, y, \tau) \omega^{\circ}(x, y, t - \tau) dx dy d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^{\circ}(x, y, \tau) \omega(x, y, t - \tau) dx dy d\tau \quad (1)$$

Здесь  $\Pi(x, y, t)$  — разность давлений на верхней и нижней поверхности крыла;  $\omega(x, y, t)$  — местные значения углов скаса потока;  $x, y, t$  — декартовы координаты и время ( $x$  — направлен по потоку,  $y$  — по размаху крыла). Интегрирование рас-

пространено по поверхности крыла  $s$ . Кружочками сверху обозначены произвольные значения тех же величин для того же крыла, но при изменении направления потока на обратное.

Из теоремы обратимости можно вывести некоторые следствия, имеющие самостоятельное значение.

*Следствие 1.* Положим для крыла в обращенном потоке следующее распределение местных углов скоса  $\omega^\circ(x, y, t) = \omega_s^\circ = \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Соответствующее распределение давления обозначим через  $\Pi_s^\circ(x, y, t)$ .

Тогда для данного крыла в прямом потоке при произвольном распределении скоростей  $\omega(x, y, t)$  подъемная сила

$$Y(t) = \iint_s \Pi(x, y, t) dx dy$$

в произвольный момент времени  $t$  выражается в виде

$$Y(t) = \int_0^\infty \iint_s \Pi_s^\circ(x, y, \tau) \omega(x, y, t - \tau) dx dy d\tau \quad (2)$$

*Следствие 2.* Продольный момент, приложенный к крылу (относительно передней кромки) в момент  $t$ , выражается в виде

$$M_x(t) = \int_0^\infty \iint_s \Pi_{x\delta}^\circ(x, y, \tau) \omega(x, y, t - \tau) dx dy d\tau \quad (3)$$

Здесь  $\Pi_{x\delta}^\circ$  — распределение разности давлений по данному крылу в обращенном потоке, соответствующее распределению местных скосов потока  $\omega^\circ(x, y, t) = x\delta(t)$ .

*Следствие 3.* Поперечный момент  $M_y$ , приложенный к крылу в момент  $t$ , выражается в аналогичном виде

$$M_y(t) = \int_0^\infty \iint_s \Pi_{y\delta}^\circ(x, y, \tau) \omega(x, y, t - \tau) dx dy d\tau \quad (4)$$

Здесь  $\Pi_{y\delta}^\circ(x, y, t)$  соответствует  $\omega^\circ(x, y, t) = y\delta(t)$ .

Заметим, что пределы интегрирования по времени  $[-\infty, \infty]$  в формулах (2)–(4) заменены пределами  $[0, \infty]$  ввиду того, что функции  $\Pi_s^\circ(x, y, t)$ ,  $\Pi_{x\delta}^\circ(x, y, t)$  и  $\Pi_{y\delta}^\circ(x, y, t) \equiv 0$  при отрицательных значениях  $t$ , что очевидно из самого определения этих функций, как реакций на импульсивные возмущения, приложенные в момент  $t = 0$ .

В работах [2, 3] показано, что при обтекании движущегося двухмерного профиля падающей ударной волной с переменными параметрами за фронтом ударной волны (а также при других нестационарных возмущениях) импульс нестационарной силы, сообщаемый профилю за все время нестационарного обтекания, совпадает с импульсом силы, определенным по квазистационарной теории (при условии, если значение импульса конечно).

Указанные следствия позволяют обобщить это утверждение на случай крыла конечного размаха произвольной формы в плане.

Рассмотрим более подробно функцию  $\Pi_s^\circ(x, y, t)$ . Ее можно найти дифференцированием по параметру  $t$  функции  $\Pi_s^\circ(x, y, t)$ , описывающей распределение разности давлений по крылу заданной формы в плане при условии, что крыло в момент  $t = 0$  внезапно приобретает единичный угол атаки, причем в окрестности значний  $t = 0$  функция  $\Pi_s^\circ(x, y, t)$  будет описываться  $\delta$ -функцией  $\delta(t)$ , умноженной на начальное значение функции  $\Pi_s^\circ(x, y, 0)$ , т. е.

$$\Pi_s^\circ(x, y, t) = \Pi_s^\circ(x, y, 0)\delta(t) + \frac{\partial \Pi_s^\circ(x, y, t)}{\partial t} \quad (5)$$

Если проинтегрировать функцию  $\Pi_s^\circ(x, y, t)$  по времени в пределах от 0 до  $\infty$ , то, очевидно, получим

$$\int_0^\infty \Pi_s^\circ(x, y, t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_s^\circ(x, y, t) = \Pi^\infty(x, y) \quad (6)$$

где  $\Pi^\infty(x, y)$  — установившееся значение разности давлений на крыле в обращенном потоке с единичным углом атаки.

Отметим, что как функция  $\Pi_0^\circ$ , так и соответствующая функция  $\Pi_1^\circ$  при  $t < 0$  тождественно равны нулю.

Положим теперь, что рассматриваемое крыло до момента  $t = 0$  не возмущало потока (т. е.  $\omega(x, y, t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ), а с момента  $t = 0$  и до некоторого момента  $t^*$  на нем произвольно заданы некоторые возмущения  $\omega(x, y, t)$ , которые при  $t > t^*$  снова исчезают.

Например, это может иметь место, если на крыло, летящее под нулевым углом атаки, набежала слабая ударная волна в момент  $t = 0$ , вызвала некоторое заданное распределение скосов  $\omega(x, y, t)$ , причем сопровождающий ударную волну возмущенный поток ограничен во времени и пространстве, так что к моменту  $t = t^*$  соответствующие возмущенные скосы  $\omega(x, y, t)$  полностью (или с заданной степенью точности) затухли.

Эти скосы потока вызовут дополнительную подъемную силу  $Y(t)$ , импульс которой является конечной величиной

$$I_y = \int_0^{\infty} Y(t) dt \quad (7)$$

Для вычисления этого импульса перепишем формулу (2) в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t \int_s \int \Pi_0^\circ(x, y, t - \tau) dx dy d\tau$$

или, ввиду того, что  $\Pi_0^\circ(t - \tau) \equiv 0$  при  $\sigma > t$ , а  $\omega(\tau) \equiv 0$  при  $\tau < 0$ , можно изменить пределы интегрирования

$$Y(t) = \int_0^{\infty} \int_s \int \Pi_0^\circ(x, y, t - \tau) \omega(x, y, \tau) dx dy d\tau \quad (8)$$

Подставляя эту формулу в (7), получим

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_s \int \Pi_0^\circ(x, y, t - \tau) \omega(x, y, \tau) dx dy d\tau dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_s \int \omega(x, y, \tau) \int_0^{\infty} \Pi_0^\circ(x, y, t - \tau) dt d\tau dx dy \end{aligned}$$

Используя снова  $\Pi_0^\circ(t - \tau) \equiv 0$  при  $\tau > t$  и формулу (6), имеем

$$\int_0^{\infty} \Pi_0^\circ(x, y, t - \tau) dt = \int_0^{\infty} \Pi_0^\circ(x, y, t) dt = \Pi^\circ(x, y)$$

Таким образом, для импульса силы  $I_y$  получаем формулу

$$I_y = \int_s \int \Pi^\circ(x, y) \int_0^{\infty} \omega(x, y, t) dt dx dy$$

или, изменяя пределы интегрирования, получим

$$I_y = \int_0^{\infty} \int_s \int \Pi^\circ(x, y) \omega(x, y, t) dx dy dt \quad (9)$$

Если вычислять импульс подъемной силы по квазистационарной теории (т. е. приближенно предполагая, что в каждый момент времени течение является установившимся со стационарными значениями параметров, равными их мгновенным значениям), то при помощи теоремы обратимости для установившегося обтекания легко можно получить ту же самую формулу для импульса силы.

Таким образом, импульс нестационарной подъемной силы крыла при произвольном нестационарном обтекании равен импульсу подъемной силы при квазистационарном обтекании.

При помощи аналогичных выкладок и рассуждений легко показать, что и значения импульсов нестационарных продольных и поперечных моментов при произвольном нестационарном обтекании совпадают с соответствующими квазистационарными значениями.

Поступило 6 I 1965

### ЛИТЕРАТУРА

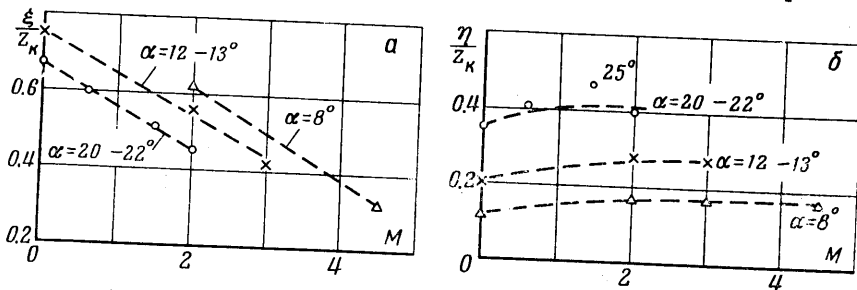
1. Майлс Дж. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Голубинский А. И. Об обтекании движущейся пластинки перемещающейся ударной волной. Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 2.
3. Голубинский А. И. Подъемная сила и момент тонкого профиля при произвольном нестационарном обтекании. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 3.

## НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О ВЛИЯНИИ ЧИСЛА МАХА НА КАРТИНУ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА И КРУГЛОГО КОНУСА

Т. И. ОКЕРБЛОМ, А. И. САРАНЦЕВ.

(Москва)

В работах [1, 2] показано, что метод высоковольтного разряда позволяет визуализировать систему вихрей, сходящих с тела, установленного под углом атаки. Ниже приводятся данные о влиянии числа Маха на траектории вихрей. Эксперименты проводились на моделях треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке  $\lambda = 75^\circ$  и круглого конуса с углом полураствора при вершине  $\theta = 10^\circ$  в закрытой аэродинамической трубе незамкнутого типа при  $M = 0.6$ ,

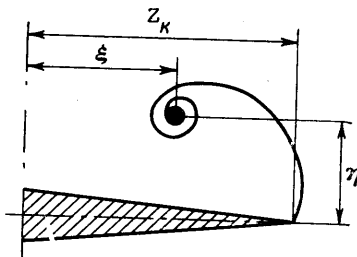


Фиг. 1

1.5, 2.0, 3.0, 4.5, статические давления в рабочей части трубы соответственно были  $p = 0.105, 0.135, 0.098, 0.04, 0.023 \text{ ата}$ , число Рейнольдса  $R$  менялось от  $1 \cdot 10^6$  до  $3 \cdot 10^6$ . Модели и методика эксперимента изложены в работе [1].

Результаты исследования влияния числа Маха на положение отошедших вихрей, существующих около треугольного крыла, представлены на фиг. 1 в виде зависимостей координат  $\xi$  и  $\eta$  вихрей фиг. 2 от числа Маха при различных углах атаки. (Для тел конической формы — треугольное крыло и конус — положение оси вихря может быть определено двумя координатами, вследствие того, что в носовой части тел ось вихря будет одним из лучей, проведенным из вершины тела фиг. 2.) Экспериментальные точки для числа Маха  $M = 0.1$  взяты из работы [3].

Из фиг. 1 видно, что при увеличении числа Маха свободные вихри приближаются к плоскости симметрии крыла — координата  $\xi$  уменьшается (фиг. 1, а) — и отходят от его поверхности — координата  $\eta$  несколько увеличивается (фиг. 1, б). При числах  $M$  больше двух (в пределах исследованного диапазона) отход вихря от поверхности крыла меняется мало.



Фиг. 2