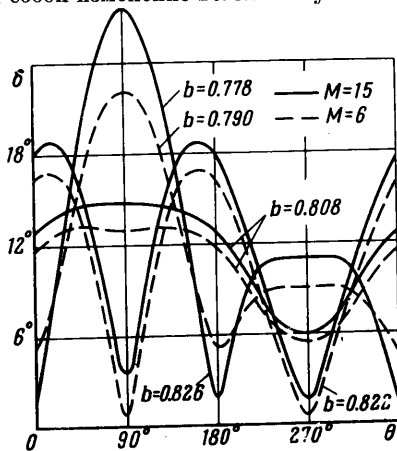
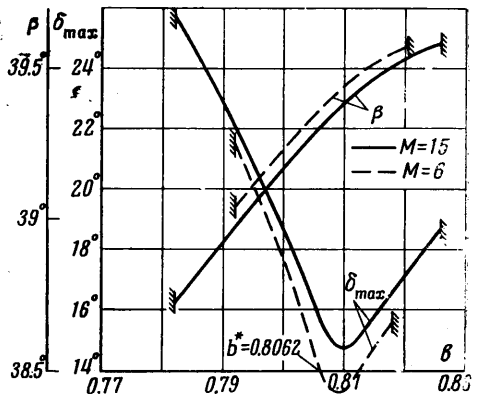


Расчеты показывают, что наибольшее возможное изменение значения  $a$  влечет за собой изменение величины углов встречи не более чем на 5–10%.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 представлены зависимости величины угла срывной зоны  $\beta$  и максимального угла встречи  $\delta_{\max}$  от изменения  $b$ . С увеличением  $b$  значение угла срывной зоны увеличивается;  $\delta_{\max}$  имеет минимальное значение при  $b$  несколько большем  $b^*$ .

В заключение автор работы [4] пользуется случаем заметить, что интегральное условие, приведенное в сноске на стр. 10 работы [4], является приближенным. Строго говоря, параметр и значения толщины вытеснения и толщины потери импульса в сечении  $O$ , определяются при расчете граничного слоя из условия периодичности течения в слое по  $l$ .

Поступило 9 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я., Таганов Г. И. О конфигурации передних срывных зон при симметричном обтекании тел сверхзвуковым потоком газа. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 2.
2. Нейланд В. Я., Таганов Г. И. Передняя срывная зона при несимметричном обтекании тел с иглой сверхзвуковым потоком газа. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 3.
3. Korst H. H. A Theory of base pressure in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
4. Таганов Г. И. К теории стационарных срывных зон. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.

### О НЕКОТОРЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА В ДЛИННЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

М. Г. СУХАРЕВ (Москва)

Нестационарные движения жидкости и газа в длинных трубопроводах описываются нелинейной системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v^n}{u^m} = 0 \quad (0.1)$$

В заметке [1] рассмотрены групповые свойства системы (0.1) и найдены все случаи, когда решение может быть получено интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие решения называют, следуя Л. В. Овсянникову, инвариантными, их частным случаем являются автомодельные движения.

Инвариантные решения изучали многие авторы [например, 2, 3]. Основное внимание в них уделено уравнению нелинейной теплопроводности, которое получается как частный случай системы (0.1) при  $m = 0$  и моделирует движение флюидов в пористых средах.

Ниже рассматриваются инвариантные решения для случаев  $m = 1$ ,  $n = 2$ , что соответствует турбулентному течению газа.

Этой же теме посвящены работы [4, 5], в которых получены некоторые результаты, однако допущены неточности.

1. Будем исследовать систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v|v|}{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  — пространственная,  $t$  — временная координата,  $u$  соответствует давлению, а  $v$  — расходу газа. Форма записи второго уравнения в (1.1) точнее, чем в (0.1), где для четных  $n$  следует предположить, что  $v$  всегда положительно.

Прежде всего рассмотрим семейство решений вида

$$u = t^{2/3} f(\eta), \quad v = t^{2/3} \alpha^{-1/3} h(\eta), \quad \eta = xt^{-2/3} \quad (1.2)$$

с произвольной постоянной  $\alpha$ .

Функции  $f$  и  $h$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\alpha f - \eta \frac{df}{d\eta} + \frac{3}{2} \frac{dh}{d\eta} = 0, \quad \frac{df}{d\eta} + \frac{h|h|}{f} = 0 \quad (1.3)$$

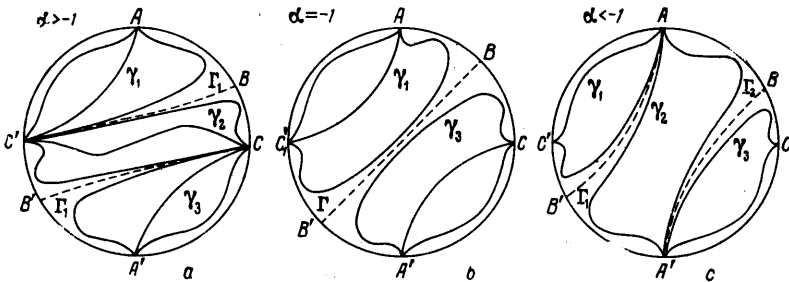
В упомянутых уже работах [2-5] отправным пунктом исследования служит физическая модель, опираясь на которую авторы формулируют начальные и граничные условия и ищут соответствующее им решение системы (0.1) при некоторых  $m$  и  $n$ . Возможен также в некотором смысле противоположный подход к задаче, который и применяется ниже. Он состоит в том, что исследуют семейство интегральных кривых системы (1.3) и пытаются найти физическую интерпретацию каждого решения. Это дает определенную уверенность, что ни одно практически важное решение не будет упущено. Уравнения (1.3) допускают группу  $f \rightarrow cf$ ,  $h \rightarrow ch$ , следовательно, порядок системы можно понизить.

Введем новую искомую функцию  $\zeta = h/f$ . Тогда

$$d\zeta/d\eta = -2/3\alpha - 2/3\eta\zeta|\zeta| + |\zeta|^3, \quad df/d\eta + f\zeta|\zeta| = 0, \quad h = \zeta f \quad (1.4)$$

Соотношения (1.4) эквивалентны системе (1.3).

Все особенности задачи достаточно полно выявляются при анализе интегральных кривых первого уравнения (1.4); правая часть этого уравнения не имеет особенностей ни в какой конечной точке плоскости  $(\eta, \zeta)$ . Введение проективных координат позволяет определить поведение фазовых траекторий в бесконечности [6]. В зависимости от  $\alpha$  получается три различных типа расположения интегральных кривых (фиг. 1). На фигуре проективная плоскость отождествлена с замкнутым



Фиг. 1

кругом, у которого диаметрально противоположные точки считаются одинаковыми.

Картина фазовых траекторий симметрична относительно начала координат, так как преобразование  $\zeta \rightarrow -\zeta$ ,  $\eta \rightarrow -\eta$  оставляет неизменным первое уравнение (1.4) и поэтому достаточно рассматривать правую полуплоскость. Особые точки  $A(\zeta/\eta = 0)$  и  $C(\zeta/\eta = \infty)$  являются узлами, а особая точка  $B(\zeta/\eta = 2/3)$  — седлом.

Интерес представляют решения, определенные при  $\eta = \infty$ , т. е. в момент времени  $t = 0$ . Интегральные кривые из семейства  $\gamma_1$  (Фиг. 1) имеют вертикальную асимптоту и, следовательно, определены на отрезке  $(0, \eta^0)$ , где  $\eta^0 < +\infty$ . В дальнейшем ограничимся случаем  $\alpha > -1$ . Существенно различную асимптотику при больших  $\eta$  имеют особая кривая  $\Gamma_1$  и пучок кривых, сходящихся в точке  $C$ .

Ординату пересечения  $\Gamma_1$  с осью  $\eta = 0$  обозначим  $\omega(\alpha)$ . Если  $\zeta(0) > \omega(\alpha)$ , то интегральная кривая принадлежит семейству  $\gamma_1$ , если же  $\zeta(0) < \omega(\alpha)$ , то семейству  $\gamma_2$ .

При больших значениях  $\eta$  для  $\Gamma_1$  справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\zeta = {}^{2/3}\eta + {}^{3/2}(1 + \alpha)\eta^{-2} + O(\eta^{-5})$$

Из (1.4) непосредственно вытекает

$$f(\eta) = f(0) \exp \left\{ - \int_0^\eta \zeta |\zeta| d\eta \right\}$$

и, следовательно, при  $\eta \rightarrow \infty$

$$f(\eta) = f(0) \exp \left\{ - \int_0^\eta {}^{4/9}\eta^2 d\eta \right\} [1 + O(\eta^{-1})]$$

Из этих оценок и формул (1.4), (1.2) вытекает  $u(x, 0) = 0$ ,  $v(x, 0) = 0$ .

Таким образом, это решение соответствует истечению в вакуум для полубесконечной трубы  $x \geq 0$  с граничными условиями<sup>1</sup>

$$u(0, t) = f(0)t^{2/3\alpha}, \quad v = f(0)\zeta(0)t^{2/3\alpha-1/3} \quad (1.5)$$

Фактическое определение отделяющей  $\Gamma_1$  сопряжено с вычислительными трудностями. Для удобства произведем замену искомой функции и независимой переменной  $z = \zeta - {}^{2/3}\eta$ ,  $y = \eta^{-1}$ . Получим уравнение

$$-y^2 dz / dy = -{}^{2/3}(1 + \alpha) + z({}^{2/3}y^{-1} + z)^2 \quad (1.6)$$

Начинать интегрирование следует от малого  $y$ , при котором соответствующее  $z$  достаточно точно определяется из асимптотического ряда

$$z = y^2(a_1 + a_2y^3 + a_3y^6 + \dots)$$

$$a_1 = {}^{3/2}(1 + \alpha), \quad {}^{4/9}a_2 = -(2a_1 + {}^{4/3}a_1^2), \quad {}^{4/9}a_3 = -(5a_2 + {}^{8/3}a_1a_2 + a_1^3), \dots$$

Шаг интегрирования по  $y$  вначале должен быть весьма мал, только тогда удается выполнить вычисления.

Расчеты проводились на вычислительной машине методом Рунге — Кутты. При  $0 \leq \eta \leq 1$  интегрировалось уравнение

$$dz / dy = -{}^{2/3}(1 + \alpha) + z({}^{2/3}\eta + z)^2 \quad (1.7)$$

а при  $1 < \eta < \infty$  уравнение (1.6). В результате расчетов получается  $\omega(0.5) = 0.848$ ,  $\omega(0) = 0.680$ ,  $\omega(-0.5) = 0.430$ .

Для функции  $\omega(\alpha)$  и кривой  $\Gamma_1$  можно установить верхнюю и нижнюю границы. Когда  $\alpha = -1$ ,  $\Gamma_1$  легко найти. Из уравнения (1.7) следует, что  $z = 0$  является интегральной кривой. Ее уравнение в исходных переменных

$$\zeta = {}^{2/3}\eta \quad (1.8)$$

Это решение разобрано ниже.

Рассматривая семейство изоклин на плоскости  $(\eta, \zeta)$ , нетрудно установить, что функция  $\omega(\alpha)$ , кривая  $\Gamma_1$  и ее производная монотонно возрастают. Значение производной изменяется от 0 до  ${}^{2/3}$ , следовательно, кривая  $\Gamma_1$  ограничена сверху изоклиной  $\zeta' = {}^{2/3}$ , а снизу изоклиной  $\zeta' = 0$ . Оценкой снизу может служить также прямая (1.8) и кривая, в любой точке которой наклон изоклин совпадает с наклоном поля. Эта кривая допускает параметрическое представление, из которого получается формула

$$\eta = \frac{5\zeta^3 - {}^{4/3}\alpha - \sqrt{\zeta^6 - (8\alpha - {}^{16/3})\zeta^3 + {}^{16/9}\alpha^2}}{{}^{8/3}\zeta^2}$$

Верхняя и нижняя границы для кривой  $\Gamma_1$ , в частности, дают следующие оценки  $\omega(\alpha)$ :

$$\max \{0, \sqrt[3]{{}^{2/3}(\alpha + {}^{1/3})}\} < \omega(\alpha) < \sqrt[3]{{}^{2/3}(\alpha + 1)}$$

Например,  $0.82 < \omega(0.5) < 1$ . Как следует из (1.2),  $\alpha = 0$  соответствует течению с постоянным давлением, а  $\alpha = 0.5$  с постоянным расходом в сечении  $x = 0$  и в начальный момент времени.

<sup>1</sup> Авторы работы [5] ошибочно интерпретировали как истечение в вакуум интегральные кривые с начальным значением  $\zeta(0) \neq \omega(\alpha)$ .

Найдем асимптотическое поведение траекторий типа  $\gamma_2$ . Из (1.4) видно, что при больших  $\eta$  для них справедливо соотношение

$$-2/3\alpha + 2/3\eta\zeta|\zeta| = o(1)$$

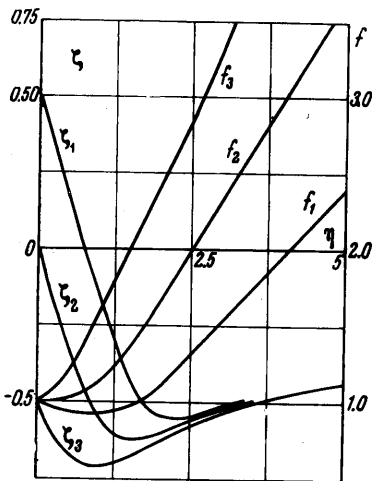
Если  $\alpha > 0$ , то

$$\zeta(\eta) = -\sqrt{\alpha/\eta} + o(\eta^{-1/2}), \quad f(\eta) = c\eta^\alpha [1 + o(1)], \quad h(\eta) = c\sqrt{\alpha}\eta^{\alpha-1/2} [1 + o(1)]$$

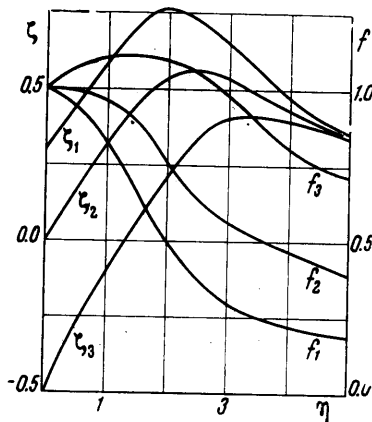
Отсюда получаем для давления и расхода в момент  $t = 0$

$$u(x, 0) = cx^\alpha, \quad v(x, 0) = -c\sqrt{\alpha}x^{\alpha-1/2} \tag{1.9}$$

граничные же условия, как и прежде, даются формулами (1.5). В зависимости от значения  $\zeta(0)$ , которое определяет расход в начальном сечении, получаются разные модели течения. Если  $\zeta(0) \leq 0$ , то поток направлен к началу координат для всех  $x$ ;  $\zeta(0) = 0$  соответствует течению



Фиг. 2



Фиг. 3

в полубесконечной трубе с закрытым концом при начальных условиях (1.9). Если  $\zeta(0) > 0$  течение разбивается на две зоны с противоположным направлением потоков. Граница между ними, на которой  $v = 0$ , движется вправо со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\eta^{\circ 2/3}) = 2/3\eta^{\circ} t^{-1/3}$$

Здесь  $\eta^{\circ}$  точка пересечения интегральной кривой  $\zeta(\eta)$  с осью абсцисс. На фигуре 2 представлено несколько интегральных кривых при  $\alpha = 1$  и различных значениях  $\zeta(0)$ . При  $\zeta(0) = 0.5$  величина  $\eta^{\circ} = 0.775$ .

Пусть теперь  $\alpha < 0$ , тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = cx^\alpha, \quad v(x, 0) = c\sqrt{-\alpha}x^{\alpha-1/2}$$

Опять-таки, или движение направлено лишь вправо, или же существуют потоки противоположных направлений, причем область, где поток движется к началу координат растет со временем. Между этими двумя случаями находится промежуточный, соответствующий выравниванию давления в закрытой трубе. Фиг. 3 демонстрирует результаты численного определения функций  $\zeta$  и  $f$  при  $\alpha = -0.5$ .

Особый интерес представляет случай  $\alpha = 0$ . Ось абсцисс является интегральной кривой.

Для других интегральных кривых справедлива асимптотическая оценка

$$\zeta(\eta) = 3\eta^{-2} + o(\eta^{-2}), \quad f(\eta) = f(0) \exp \{3\eta^{-3}\} [1 + o(1)]$$

что дает

$$u(x, 0) = f(\infty), \quad v(x, 0) = 0$$

Поскольку в данном случае  $u(0, t) = f(0) = \text{const}$ , то становится очевидным, что решением описывается процесс распространения скачка давления по первоначально покоящемуся газу. Причем величина скачка, отношение давления в момент  $t = 0$  к

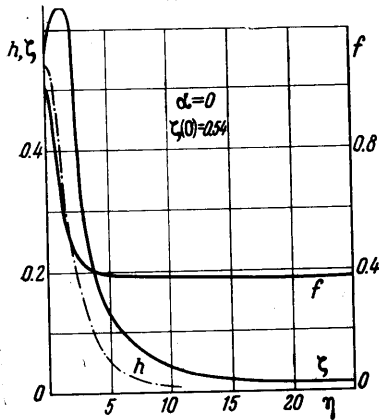
давлению в сечении  $x = 0$  при  $t > 0$  определяется интегралом

$$\frac{f(\infty)}{f(0)} = \exp\{-J\}, \quad J = \int_0^{\infty} \zeta|\zeta|d\eta$$

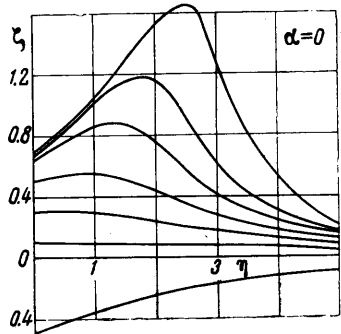
В свою очередь  $J$  можно считать однозначной функцией величины  $\zeta(0)$ . Таблица показывает характер этой взаимосвязи.

$\zeta(0)$	$f(\infty)/f(0)$	$\zeta(0)$	$f(\infty)/f(0)$	$\zeta(0)$	$f(\infty)/f(0)$	$\zeta(0)$	$f(\infty)/f(0)$
-5.0	8.804	-2.5	4.554	0.0	1.000	0.62	0.194
-4.5	7.947	-2.0	3.726	0.1	0.957	0.64	0.138
-4.0	7.092	-1.5	3.481	0.3	0.776	0.66	0.0770
-3.5	6.241	-1.0	2.141	0.5	0.459	0.67	0.0426
-3.0	5.394	-0.5	1.445	0.6	0.245	0.68	0.0029

Если  $0 < \zeta(0) < \omega(0)$ , то имеет место повышение давления<sup>1</sup> при  $\zeta(0) < 0$  — понижение давления. Ситуация весьма близка к реальным процессам заполнения или опорожнения газопровода. Общее ко-



Фиг. 4



Фиг. 5

личество газа, поданное в трубу (выпущенное из трубы), определяется формулой

$$V(t) = \int_0^t v(0, t) dt = {}^{2/3}f(0)\zeta(0)t^{1/3}$$

На фиг. 4 изображены функции  $\zeta, f, h$  ( $\zeta(0) = 0.54$ ), а на фиг. 5 несколько интегральных кривых в плоскости  $(\eta, \zeta)$ .

Выясним, в каких случаях решение можно интерпретировать как течение в трубе с движущейся непроницаемой перегородкой (невесомым поршнем). Если перегородка  $x^*(t)$  передвигается вправо со скоростью  $dx^*/dt$ , то

$$u dx^*/dt = v \quad \text{при } x = x^* \tag{1.10}$$

Это условие следует из соображений материального баланса. Пусть координата перегородки  $\eta = \eta^*$ . тогда

$$dx^*/dt = {}^{2/3}\eta^*t^{-1/3}$$

и условие (1.10) запишется так:

$$t^{1/3}f(\eta^*){}^{2/3}\eta^*t^{-1/3} = t^{1/3}{}^{2/3}h(\eta)$$

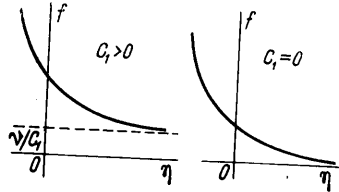
Отсюда с учетом последнего из уравнений (1.4) следует, что  $\eta^*$  должно быть корнем уравнения

$${}^{2/3}\eta - \zeta(\eta) \tag{1.11}$$

<sup>1</sup> В работе [4], вероятно в результате погрешности счета, интегральная кривая со значением  $\zeta(0) > \omega(0)$  интерпретируется как процесс заполнения трубы.

Отрезок интегральной кривой  $\xi(\eta)$  при  $0 \leq \eta \leq \eta^*$  соответствует движению по трубе непроницаемой переборки. Заметим, что рассматриваемые решения близко подходят к реальному процессу прогонки «ерша» по трубе с целью очистить газопровод. Естественно, что движение по указанному закону возможно только при определенном значении внешней силы, приложенной к поршню.

Уравнение (1.11) выполняется в точках пересечения интегральной кривой с прямой (1.8) при  $\eta > 0$ . Никакая интегральная кривая не может дважды пересечь этот луч. Действительно, рассмотрим снова функцию  $z$ , удовлетворяющую уравнению (1.7). Если  $\alpha > -1$ ,  $\omega(\alpha) > 0$ , при  $\alpha < -1$ ,  $\omega(\alpha) < 0$ , соответственно с этим отделяющая кривая на плоскости  $(z, \eta)$  монотонно возрастает или убывает. Из (1.7) непосредственно следует, что  $z$  на интегральной кривой, которая пересекает ось  $\eta$ , не меняет знака с ростом  $\eta$ . При  $\alpha > -1$  для каждого  $0 < \xi(0) < \omega(\alpha)$  существует некоторое  $\eta^*$ , удовлетворяющее уравнению (1.11). Например, для  $\alpha = 0$  значению  $\xi(0) = 0.1$  соответствует  $\eta^* = 0.150$ ;  $\xi(0) = 0.5$ ,  $\eta^* = 0.842$ ;  $\xi(0) = 0.68$ ,  $\eta = 2.499$ .



Фиг. 6

Интересное решение в элементарных функциях получается при  $\alpha = -1$ . В этом случае (1.9) является интегральной кривой первого уравнения (1.4). Из двух других уравнений (1.4) находим

$$f(\eta) = f(0) \exp\{-\frac{1}{27}\eta^3\}, \quad \frac{1}{2}h(\eta) = j(0)\eta \exp\{-\frac{1}{27}\eta^3\}$$

и далее

$$u(x, t) = f(0)t^{-2/3} \exp\{-\frac{1}{27}x^3t^{-2}\}, \quad v(x, t) = \frac{2}{3}f(0)xt^{-5/3} \exp\{-\frac{1}{27}x^3t^{-2}\}$$

Это решение определяет течение в полубесконечной трубе с закрытым концом, вызванное импульсом типа  $\delta$ -функции. Расход представляет собой положительную функцию с единственным максимумом, который равен  $\frac{2}{3}f(0) \exp\{-\frac{1}{3}\}t^{-1}$  и передвигается вправо со скоростью  $(2t/3)^{-1/3}$ . Общее количество газа в трубе не меняется со временем и равно

$$V = \int_0^{\infty} u(x, t) dx = \frac{27}{4} f(0) \int_0^{\infty} \exp\{-\eta^3\} d\eta = \frac{9}{4} f(0) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

2. Рассмотрим другие инвариантные решения, указанные в [4]. Найдем, прежде всего решение с произвольной постоянной  $\gamma$  вида

$$u = f(x - \gamma t), \quad v = h(x - \gamma t) \tag{2.1}$$

Из (1.1) находим

$$\gamma f' = h', \quad ff' = -h|h| \tag{2.2}$$

Будем обозначать буквой  $c$  с нижним индексом постоянные интегрирования. Тогда

$$\gamma f = h + c_1 \tag{2.3}$$

и решение уравнения  $ff' = (\gamma f - c_1)|\gamma f - c_1|$  получается в квадратурах

$$\eta + c_2 = \gamma^{-2}c_1 / |\gamma f - c_1| - \gamma^{-2} \text{sign}(\gamma f - c_1) \ln |\gamma f - c_1| \tag{2.4}$$

Положим  $\gamma > 0$ , что не умаляет общности. Кривая (2.4) при  $c_1 > 0$  состоит из трех однозначных ветвей, первая из которых определена в интервале  $-\infty < \eta < \leq +\infty$  и дает значения  $f > c_1/\gamma$ . Вторая и третья ветви определены в интервале  $\eta^0 < \eta < \infty$  и дают значения  $0 \leq f < c_1/\gamma$  и  $f < 0$  соответственно. Физическую интерпретацию допускает только первая ветвь (фиг. 6). Поскольку расход должен быть непрерывной функцией по  $x$ , то нельзя считать решением исходной задачи вторую ветвь, доопределив на луче  $\eta < \eta^0$  функцию  $f(f = 0)$ .

Если  $c_1 = 0$ , то физический смысл можно придать верхней ветви (2.4) (фиг. 6).

Эти решения следует толковать как течение в полубесконечной или конечной трубе со специфическими начальными и граничными условиями, которые вытекают из (2.1). Условие на правом конце продвигается с постоянной скоростью  $\gamma$  вправо вдоль трубы. Расход и давление оказываются связанными соотношением (2.3).

Решения вида

$$u = \exp\{-t\}f(x - \beta t), \quad v = \exp\{-t\}h(x - \beta t) \tag{2.5}$$

следуя Г. И. Баренблатту, будем называть предельными автомодельными движениями [7]. Они получаются как предельный случай решений типа (1.2).

Функции  $f$  и  $h$  из (2.5) связаны уравнениями

$$f + \beta f' = h', \quad ff' = -h|h| \quad (2.6)$$

Эта система не содержит явно независимой переменной и однородна по  $f$  и  $h$ , откуда следует, что она позволяет получить решение в квадратурах. Введем новую искомую функцию  $w = h/f$  и будем считать  $f$  независимой переменной, тогда для  $w$  получим уравнение с разделяющимися переменными

$$f \frac{dw}{df} = -w + \beta - \frac{1}{w|w|}$$

Окончательно имеем

$$f = \exp \left\{ \int \left[ -w + \beta - \frac{1}{w|w|} \right]^{-1} dw \right\}, \quad \eta = - \int \left\{ w|w| \left( -w + \beta - \frac{1}{w|w|} \right) \right\}^{-1} dw$$

Исследование этого решения во многом аналогично предыдущему случаю.

Инвариантные решения представляют самостоятельный интерес и могут быть применены для оценки приближенных методов. Более того, они могут служить основой для разработки новых приближенных методов, что весьма важно для решения многих задач магистрального газоснабжения.

Исследование течений по трубам, которые моделируются системой (0.1) с другими значениями  $m$  и  $n$ , имеет много общего с рассмотренным случаем.

Поступило 26 II 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сухарев М. Г. Инвариантные решения уравнений, описывающих движение жидкости и газа в длинных трубопроводах. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
4. Асагурия А. Ш., Галиуллин З. Т., Черникин В. И. О неустановившихся движениях газа в трубопроводах. Изв. вузов «Нефть и газ», 1961, № 10.
5. Ходанович И. Е., Темпель Ф. Г. Об автомодельных движениях газа в трубопроводах. Тр. ВНИИГАЗа, вып. 5 (3), М., Гостоптехиздат, 1959.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.

#### ОБ ИМПУЛЬСЕ СИЛ И МОМЕНТОВ, СООБЩАЕМЫХ ТОНКОМУ КРЫЛУ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ

А. И. ГОЛУБИНСКИЙ (Москва)

При помощи теоремы обратимости, справедливой при нестационарном обтекании тонкого крыла конечного размаха, показано, что при произвольном нестационарном обтекании крыла, движущегося в газе с постоянной средней скоростью, значения импульсов нестационарных сил и моментов, приложенных к крылу, совпадают с соответствующими значениями, определенными по квазистационарной теории.

Известная теорема обратимости течения в линеаризированной теории нестационарного обтекания тонкого крыла произвольной формы в плане выражается следующим равенством [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x, y, \tau) \omega^{\circ}(x, y, t - \tau) dx dy d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^{\circ}(x, y, \tau) \omega(x, y, t - \tau) dx dy d\tau \quad (1)$$

Здесь  $\Pi(x, y, t)$  — разность давлений на верхней и нижней поверхности крыла;  $\omega(x, y, t)$  — местные значения углов скаса потока;  $x, y, t$  — декартовы координаты и время ( $x$  — направлен по потоку,  $y$  — по размаху крыла). Интегрирование рас-