Поступило 27 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
2. Полежаев В. И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
3. Ostrach S. Laminar flows with body forces. In: «Theory of laminar flows», London, Oxford, Univ. Press, 1964, vol. 4.
4. Gebhard B. Effect of viscous dissipation on natural convection. J. Fluid Mech., 1962, No. 14, pt. 2.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.— Л., Гостехиздат, 1944.
6. Сорокин В. С. Об устойчивости неравномерно нагретого газа в поле силы тяжести. ПММ, 1953, т. 17, № 2.
7. Jeffreys H. The instability of a compressible fluid heated from below. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, 26, 170.
8. Spiegel E. A., Veronis G. On Boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophys. J., 1960. vol. 131, No. 2.
9. Полежаев В. И. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое. Тр. III Всес. Совещания по тепло- и массообмену, т. 1. Минск, 1968.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Б. ГОРСКИЙ

(*Саранск*)

В работе выводятся уравнения второго и третьего приближения для функции тока плоского и осесимметричного безвихревого околозвукового потока невязкого газа и находятся их частные решения, соответствующие некоторым трансзвуковым течениям.

Аналогичное изучение во втором приближении дозвукового и сверхзвукового потоков было проведено в работах Ван Дайка [1] и Хейса [2].

Второе приближение для потенциала скорости околозвукового потока было подробно рассмотрено Хейсом [3]. Еврар [4, 5] исследовал асимптотическое поведение трансзвукового потока далеко от тела, а С. В. Фалькович, И. А. Чернов и автор [6] — течение в горловине сопла.

В данной заметке приводится околозвуковая асимптотика для функции тока

1. Уравнения асимптотических приближений трансзвукового потока. Плоские ($\nu = 0$) и осесимметричные ($\nu = 1$) установившиеся безвихревые течения невязкого газа описываются одним уравнением для функции тока Ψ

$$\Psi_x^2\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + \Psi_y^2\Psi_{yy} - \nu y^{-1}\Psi_y(\Psi_x^2 + \Psi_y^2) +$$
$$+ (1 - M^{-2})(\Psi_x^2 + \Psi_y^2)(\nu y^{-1}\Psi_y - \Psi_{xx} - \Psi_{yy}) = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь M — число Маха; x, y — декартовы координаты в плоском случае, а в осесимметричном потоке x — координата вдоль прямолинейной оси симметрии, y — расстояние до этой оси. В таком виде уравнение движения в более общем случае присутствия продольного магнитного поля получено для $\nu = 0$ в [7] и для $\nu = 1$ в [8]. При этом функция тока Ψ введена, как обычно, при помощи уравнения неразрывности, так что

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -y^\nu\frac{\rho v_y}{\rho_* w_*}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = y^\nu\frac{\rho v_x}{\rho_* w_*} \qquad (1.2)$$

Здесь v_x, v_y — проекции скорости на оси x и y; ρ — плотность газа; w_* — критическая скорость звука; ρ_* — плотность, соответствующая w_*.

Для вывода уравнений трансзвукового потока используем теорию малых возмущений. Будем считать, что основное течение является однородным потоком со скоростью w_*, параллельной оси x. Тогда естественно положить

$$v_x = w_*(1+u), \qquad v_y = w_* v, \qquad w^2 = w_*^2(1+2u+u^2+v^2), \tag{1.3}$$

$$\Psi = 2^{-\nu} y^{\nu+1} + \psi, \qquad \Psi_x = \psi_x, \qquad \Psi_y = y^\nu + \psi_y \tag{1.4}$$

Здесь u, v — компоненты скорости возмущения; ψ — функция тока возмущения; индексы x, y при Ψ и ψ означают дифференцирование по соответствующей координате.

Представим теперь u, v, ψ в следующем виде:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \qquad v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots, \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \ldots \tag{1.5}$$

где каждое последующее слагаемое является величиной более высокого порядка малости по сравнению с предыдущим, причем, как обычно в трансзвуковой теории, полагаем

$$x = O(1) \quad y = O(\varepsilon^{-1/3}), \quad u_1 = O(\varepsilon^{2/3}), \quad v_1 = O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \text{ — малый параметр}) \tag{1.6}$$

Используя (1.3), (1.5), (1.6) и известные соотношения безвихревого адиабатического течения

$$\rho\rho_*^{-1} = [1 - {}^1\!/_2(k-1)(w^2 w_*^{-2} - 1)]^{1/(k-1)},$$
$$M^2 = w^2 w_*^{-2}[1 - {}^1\!/_2(k-1)(w^2 w_*^{-2} - 1)]^{-1} \tag{1.7}$$

и сравнивая (1.2) с (1.4), находим выражения для u_i, v_i через ψ_i

$$u_1 = (k+1)^{-1} Q, \qquad v_1 = -y^{-\nu}\psi_{1x}$$
$$u_2 = -Q^{-1}(y^{-\nu}\psi_{2y} + {}^1\!/_2 y^{-2\nu}\psi_{1x}^2) - (1 - {}^2\!/_3 k)(k+1)^{-1} y^{-\nu}\psi_{1y},$$
$$v_2 = -y^{-\nu}[\psi_{2x} + (k+1)^{-1} Q\psi_{1x}]$$
$$u_3 = -Q^{-1}(y^{-\nu}\psi_{3y} + y^{-2\nu}\psi_{1x}\psi_{2x}) - {}^1\!/_2(k+1)Q^{-3}(y^{-\nu}\psi_{2y} + {}^1\!/_2 y^{-2\nu}\psi_{1x}^2)^2 - \tag{1.8}$$
$$-(k+1)^{-1}[(1 - {}^2\!/_3 k)y^{-\nu}\psi_{2y} + (1 + {}^1\!/_6 k)y^{-2\nu}\psi_{1x}^2] + (k+1)^{-3}({}^1\!/_{36}k^2 - {}^5\!/_{24}k + {}^3\!/_8)Q^3$$
$$v_3 = -(y^{-\nu}\psi_{3x} - (k+1)^{-1}y^{-\nu}\psi_{2x}Q + (2 + {}^1\!/_3 k)(k+1)^{-1}y^{-2\nu}\psi_{1x}\psi_{1y} +$$
$$+ Q^{-1}(y^{-2\nu}\psi_{1x}\psi_{2y} + {}^1\!/_2 y^{-3\nu}\psi_{1x}^3)$$

где k — показатель адиабаты, а $Q = \sqrt{-2(k+1)y^{-\nu}\psi_{1y}}$.

Наконец, подставляя (1.4) в (1.1) и учитывая (1.3), (1.5) — (1.8), получаем уравнения для первых трех приближений трансзвукового потока:

$$\psi_{1yy} - \nu y^{-1}\psi_{1y} - Q\psi_{1xx} = 0 \tag{1.9}$$

$$\psi_{2yy} - \nu y^{-1}\psi_{2y} - Q\psi_{2xx} + (k+1)y^{-\nu}\psi_{2y}\psi_{1xx}Q^{-1} = -2y^{-\nu}\psi_{1x}\psi_{1xy} + \nu y^{-2}\psi_{1x}^2 +$$
$$+ Q(\psi_{1yy} - \nu y^{-1}\psi_{1y}) + \psi_{1xx}[(2 + {}^2\!/_3 k)y^{-\nu}\psi_{1y} - {}^1\!/_2(k+1)Q^{-1}y^{-2\nu}\psi_{1x}^2] \tag{1.10}$$

$$\psi_{3yy} - \nu y^{-1}\psi_{3y} - Q\psi_{3xx} + (k+1)y^{-1}\psi_{3y}\psi_{1xx}Q^{-1} =$$
$$= -2y^{-\nu}(\psi_{1x}\psi_{2xy} + \psi_{2x}\psi_{1xy}) + {}^2\!/_3 k y^{-\nu}\psi_{1y}(\psi_{1yy} - \nu y^{-1}\psi_{1y}) + 2\nu y^{-2}\psi_{1x}\psi_{2x} +$$
$$+ Q(\psi_{2yy} - {}^3\!/_2 \nu y^{-1}\psi_{2y} - {}^1\!/_4 \nu y^{-2}\psi_{1x}^2) - (k+1)Q^{-1}(y^{-\nu}\psi_{2y} + {}^1\!/_2 y^{-2\nu}\psi_{1x}^2) \times$$
$$\times (\psi_{2xx} + \psi_{1yy}) + (2 + {}^2\!/_3 k)y^{-\nu}(\psi_{1y}\psi_{2xx} + \psi_{2y}\psi_{1xx} + \psi_{1xx})[{}^1\!/_3 k y^{-2\nu}\psi_{1x}^2 +$$
$$+ (k+1)^{-2}({}^1\!/_{36}k^2 - {}^5\!/_{24}k - {}^1\!/_8)Q^3 - {}^1\!/_2(k+1)^2 Q^{-3}(y^{-\nu}\psi_{2y} + {}^1\!/_2 y^{-2\nu}\psi_{1x}^2)^2 -$$
$$- (k+1)Q^{-1}y^{-2\nu}\psi_{1x}\psi_{2x}] \tag{1.11}$$

Существенно заметить, что в этой системе нелинейным является только уравнение для первого приближения ψ_1, а уравнения для всех высших приближений линейны.

2. Некоторые частные решения асимптотических уравнений. При аналитическом газовом течении через сопло [9, 10] соответствующие решения уравнений (1.9) — (1.11) имеют следующий вид:

для плоского сопла

$$\psi_1 = -\frac{A^2}{2(k+1)}\left(x^2y + \frac{1}{3}Axy^3 + \frac{1}{20}A^2y^5\right) \tag{2.1}$$

$$\psi_2 = -\frac{A^3}{(k+1)^2}\left[\frac{2k-3}{6}x^3y + \frac{A(2k-1)}{4}x^2y^3 + \frac{A^2(12k-5)}{60}xy^5 + \frac{A^3(6k-1)}{252}y^7\right]$$

$$\psi_3 = -\frac{A^4}{(k+1)^3}\left[\frac{2k^2-5k+2}{8}x^4y + A\frac{12k^2-13k+1}{12}x^3y^3 + \right.$$

$$\left. + A^2\frac{210k^2-145k+19}{240}x^2y^5 + A^3\frac{460k^2-189k-17}{1680}xy^7 + A^4\frac{490k^2-119k-13}{17280}y^9\right]$$

для осесимметричного сопла

$$\psi_1 = -\frac{B^2}{k+1}\left(x^2y^2 + \frac{1}{2}Bxy^4 + \frac{1}{12}B^2y^6\right)$$

$$\psi_2 = -\frac{B^3}{(k+1)^2}\left[\frac{4k-6}{3}x^3y^2 + B(3k-2)x^2y^4 + B^2\frac{6k-3}{4}xy^6 + B^3\frac{44k-15}{192}y^8\right]$$

$$\psi_3 = -\frac{B^4}{(k+1)^3}\left[(2k^2-5k+2)x^4y^2 + B(12k^2-16k+3)x^3y^4 + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + B^2\frac{56k^2-52k+7}{4}x^2y^6 + B^3\frac{544k^2-411k+27}{96}xy^8 + B^4\frac{724k^2-412k+15}{960}y^{10}\right]$$

Здесь A и B — произвольные постоянные.

При сверхзвуковом течении в канале вблизи звуковой поверхности [11] решения уравнений (1.9) — (1.11) получаем в виде

в плоском канале

$$\psi_1 = \frac{1}{6(k+1)}\frac{x^4}{y^3}, \quad \psi_2 = -\frac{6k+10}{45(k+1)^2}\frac{x^6}{y^5}, \quad \psi_3 = \frac{270k^2+819k+685}{2520(k+1)^3}\frac{x^8}{y^7} \tag{2.3}$$

в осесимметричном канале

$$\psi_1 = \frac{1}{9(k+1)}\frac{x^4}{y^2}, \quad \psi_2 = -\frac{8(k+2)}{81(k+1)^2}\frac{x^6}{y^4}, \quad \psi_3 = \frac{6k^2-17k-27}{243(k+1)^3}\frac{x^8}{y^6} \tag{2.4}$$

Приведем еще решения асимптотических уравнений для потока, который интерпретируется в первом приближении как симметричное течение через сопло с изломом стенки [8]

$$\psi_1 = cxy^{\nu+1}, \quad \psi_2 = -\frac{3c^2}{9-\nu}y^{\nu+3}, \quad \psi_3 = \frac{3c^2}{3-\nu}x^2y^{\nu+1} \tag{2.5}$$

где c — произвольная постоянная, на которую наложено лишь условие $cx \leqslant 0$ (это следует из (1.8)). Формулы (1.8) позволяют легко найти компоненты скорости каждого потока, а линии тока с точностью третьего приближения описываются уравнением

$$2^{-\nu}y^{\nu+1} + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \text{const} \tag{2.6}$$

В заключение отметим, что при помощи уравнений (1.9) — (1.11) можно исследовать и любые другие трансзвуковые течения идеального газа.

Поступило 6 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Dyke M. D. The similarity rules for second-order subsonic and supersonic flow. NACA Rept., 1958, No. 1374.
2. Hayes W. D. Second-order pressure law for two-dimensional compressible flow. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, pp. 284—286.
3. Hayes W. D. La seconde approximation pour les ecoulements transsoniques non visqueux. J. de mecanique, 1966, vol. 5, N 2, p. 163—206.
4. Euvrard D. Developement asymptotique du potentiel des vitesses a grande distance, d'un profil plan transsonique. Compt. rend. Acad. sci. colon., 1964, vol. 259, No, 14, pp. 2171—2173.
5. Euvrard D. Ecoulement transsonique a grande distance d'un corps de revolution. Compt. rend. Acad. sci. colon., 1965, vol. 260, No. 22, p. 5691—5694.
6. Фалькович С. В., Чернов И. А., Горский В. Б. Обратная задача сопла Лаваля. Трансзвуковые течения газа. Изд-во Саратовск. ун-та, 1968, сб. 2, стр. 152—168.
7. Seebaass R. Mixed flows in magnetogasdynamics. Symposium Transsonicum. Springer — Verlag, Berlin, 1964, pp. 471—490.
8. Горский В. Б. Осесимметричные смешанные течения в магнитной газодинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 64—71.
9. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, № 4.
10. Рыжов О. С. Некоторые вырожденные околозвуковые течения. ПММ, 1958, т. 22, № 2.
11. Morgan A. On a class of two-dimensional channel flows with a straight sonic line. J. Aeronaut. Sci., 1955, No. 8, pp. 573—575.

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ОБТЕКАНИИ ЭЛЛИПСОИДА С ПЕРЕДНЕЙ СРЫВНОЙ ЗОНОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

А. Ю. ЗАВАДСКИЙ, Г. И. ТАГАНОВ

(*Москва*)

Рассмотрена задача об обтекании сверхзвуковым потоком воздуха эллипсоида под углом атаки 60° с расположенной впереди него иглой, образующей замкнутую срывную зону. Численные расчеты проводились для совершенного газа ($\varkappa = 1.4$) при значениях числа Маха $M_\infty = 6$ и 15; числа Прандтля $P = 1$ и в предположении, что произведение плотности на динамический коэффициент вязкости не меняется поперек области перемешивания.

Найдены значения углов встречи вдоль линии пересечения срывной зоны с эллипсоидом. Определена область допустимых изменений осей эллипсоида из условия существования решения.

Обтекание тел с иглами сверхзвуковым потоком газа исследовалось многими авторами. Здесь используются результаты работ [1, 2], причем для решения применяется метод, предложенный для расчета обтекания тел при углах атаки, отличных от нуля [2].

1. Постановка задачи и метод решения. Схема течения и сечение эллипсоида плоскостью zx показаны на фиг. 1.

Перед эллипсоидом *1* образуется коническая застойная зона *2* и конический скачок уплотнения *3*. Между газом, сжатым за коническим скачком уплотнения, и газом в застойной зоне находится свободный ламинарный пограничный слой *4*. При подходе к поверхности эллипсоида часть газа, имеющая полное давление, большее, чем статическое за присоединенным скачком *5*, поворачивается на угол встречи δ. Статическое давление на теле за областью присоединения было вычислено для случая отклонения сверхзвукового потока в косом скачке. Течение в зоне отрыва считается стационарным.

В общем случае возможен поворот потока через отошедший скачок уплотнения, здесь этот случай не рассматривается.

Вершина зоны отрыва фиксируется положением конца иглы. Направление оси срывной зоны совпадает с направлением набегающего потока и не зависит от угла атаки.