О ДИФФУЗИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ю. А. БУЕВИЧ

(Москва)

Предложена модель турбулентного движения, позволяющая оценить характеристики пульсаций и коэффициенты диффузии диспергированной фазы, а также описать влияние взвешенных частиц на турбулентность дисперсионной среды. Конкретные расчеты проведены для ситуации, когда невозмущенное турбулентное поле изотропно.

Диффузия инерционной примеси в турбулентном потоке исследовалась ранее на основе предположения, что пространственные характеристики турбулентности практически не влияют на поведение взвешенных частиц, так что случайное движение последних описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, содержащим единственную независимую переменную — время движения [1–4]. Во многих случаях такое допущение оказывается неверным, а соответствующая теория — явно недостаточной. Например, основной результат этой теории, утверждающий равенство коэффициентов турбулентной диффузии частиц и жидких молей при большом времени диффузии, заведомо неверен, если существенно относительное движение примеси [5].

1. Модель турбулентного движения. Определяем скорость турбулизованной однородной жидкости путем усреднения по «физическим» объемам, линейный размер которых равен L. Имеем тогда $\mathbf{v}_L = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}_L'$, где $\langle\ \rangle$ означает усреднение по ансамблю. Если $L \ll \lambda$, где λ — внутренний пространственный масштаб турбулентности, то $\mathbf{v}_L$ практически совпадает с истинной случайной скоростью жидкости, а $\mathbf{v}_L'$ представляет собой истинную пульсационную скорость. Если же $L \gg \Lambda$, где Λ — масштаб энергосодержащих вихрей (внешний пространственный масштаб турбулентности), то $\langle v_{Li}' v_{Lj}' \rangle \sim L^{-3}$, и $\mathbf{v}_L$ практически совпадает со средней скоростью $\langle \mathbf{v} \rangle$. Последнее соответствует учету лишь наиболее крупномасштабных составляющих турбулентных вихрей; мелкомасштабные детали движения при таком усреднении оказываются как бы сглаженными (см. по этому поводу обсуждение в [6], где аналогичное усреднение применяется в анализе специфических псевдотурбулентных движений в плотных дисперсных системах).

Мелкомасштабные пульсации, исчезающие при усреднении, вносят определенный вклад в полный перенос импульса в системе и в этом отношении подобны молекулярным движениям, вызывающим появление обычных вязких напряжений. Представим турбулентные напряжения, обусловленные такими пульсациями, в виде

$$\boldsymbol{\tau}_f^{(L)} = \|\tau_{f,ij}^{(L)}\|, \quad \tau_{f,ij}^{(L)} = \eta_{f,ik}^{(L)} \frac{\partial v_{Lj}}{\partial x_k} + \eta_{f,jk}^{(L)} \frac{\partial v_{Li}}{\partial x_k}, \quad \boldsymbol{\eta}_f^{(L)} = d_1 \boldsymbol{\nu}_f^{(L)} \qquad (1.1)$$

Здесь d_1 — плотность жидкости, а $\boldsymbol{\nu}_f^{(L)}$ — тензор кинематической турбулентной вязкости (тензор диффузии), зависящий от масштаба L. В частности, при $L \to \infty$ он обращается в обычный тензор турбулентной диффузии $\boldsymbol{\nu}_f$, при $L \ll \lambda$ имеем $\boldsymbol{\nu}_f^{(L)} \approx 0$.

Уравнения Рейнольдса, получаемые обычным путем после усреднения уравнений Навье — Стокса, имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\langle \mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle \mathbf{v}\rangle=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{d_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\langle \boldsymbol{\tau}_0\rangle+\langle \boldsymbol{\tau}_f^{(L)}\rangle)+\mathbf{g}-$$
$$-\frac{\langle \mathbf{P}_f^{(L)}\rangle}{\partial \mathbf{r}},\qquad \mathbf{P}_f^{(L)}=\|P_{f,ij}^{(L)}\|=\|v_{Li}'v_{Lj}'\| \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{g}$ — ускорение внешнего массового поля, $d_1 p$ — давление, $\boldsymbol{\tau}_0$ — тензор обычных вязких напряжений в жидкости с вязкостью μ_0, а $-d_1\langle \mathbf{P}_f\rangle$ — тензор напряжений Рейнольдса, обусловленных достаточно крупномасштабными пульсациями. Очевидно, $\langle \mathbf{P}_f^{(L)}\rangle\to 0$ при $L\to\infty$ и $-d_1\langle \mathbf{P}_f^{(L)}\rangle$ обращается в обычный тензор напряжений Рейнольдса при $L\to 0$.

Отметим, что, начиная еще с известной гипотезы Буссинеска, соотношения типа (1.1) при $L\to\infty$ неоднократно использовались в полуэмпирических теориях турбулентности. Различные представления для $\boldsymbol{\nu}_f$, постулировавшиеся ранее, критически обсуждены в [2]; все они обладают рядом дефектов, имеющих принципиальный характер. В частности, необходимость удовлетворения закона сохранения момента импульса (симметричность тензора $\boldsymbol{\tau}_f$) налагает определенные ограничения на значения компонент тензора турбулентной диффузии, смысл которых остается неясным. Дополнительные противоречия возникают при свертывании тензора $\boldsymbol{\tau}_f$ и использовании уравнения неразрывности [2]. В какой-то мере все эти недостатки характерны и для модели в [6]. Легко видеть, что предлагаемая модель свободна от указанных дефектов; она не требует введения вязкостного тензора четвертого ранга и легко получается после рассуждений, обычных в полуэмпирических теориях, и учета сохранения момента количества движения.

Заметим еще, что предлагаемое в (1.1), (1.2) разбиение полных турбулентных напряжений на рейнольдсовскую и вязкую части представляет собой некоторое обобщение известной гипотезы Гейзенберга [7, 8] о спектральном переносе турбулентной энергии. Однако, как видно из дальнейшего, рассматриваемая модель приводит к вполне определенной функциональной зависимости $\boldsymbol{\nu}_f$ от спектральных функций, т. е. позволяет сделать выбор между различными математическими оформлениями гипотезы Гейзенберга, предлагавшимися ранее (исчерпывающий обзор различных форм зависимости $\boldsymbol{\nu}_f$ от спектральных характеристик турбулентности содержится в [8]).

Вычитая (1.2) из уравнений Навье — Стокса и учитывая (1.1), получим уравнение для пульсаций $\mathbf{v}_L'$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\langle \mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}_L'+\left(\mathbf{v}_L'\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle \mathbf{v}\rangle= \tag{1.3}$$
$$=-\frac{\partial p_L'}{\partial \mathbf{r}}+\left((\nu_0\mathbf{I}+\boldsymbol{\nu}_f^{(L)})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}_L'+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\langle \mathbf{P}_f^{(L)}\rangle-\mathbf{P}_f^{(L)}),\quad \nu_0=\frac{\mu_0}{d_1}$$

Пусть задано начальное случайное поле $\mathbf{v}_L'(t_0,\mathbf{r})$. Уравнения (1.3) описывают, во-первых, вырождение этого флуктуационного поля со временем, а во-вторых, накопление новой флуктуации, вызванное действием случайной силы в последнем члене правой части (1.3). Положим

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\langle \mathbf{P}_f^{(L)}\rangle-\mathbf{P}_f^{(L)})=\mathbf{F}_f^{(L)} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{F}_f^{(L)}$ — случайная функция координат и времени. Время изменения $\mathbf{F}_f^{(L)}$ имеет порядок «внутреннего временного масштаба» турбулентности τ, аналогичного по смыслу масштабу λ и представляющему собой характерное время жизни наиболее мелкомасштабных вихрей. Напротив, характерное время вырождения начальной флуктуации $\mathbf{v}_L'(t_0,\mathbf{r})$ определяет «внешний временной масштаб» турбулентности T, совпадающий по порядку величины со временем жизни энергосодержащих вихрей. Ясно, что $\tau \ll T$ подобно тому, как $\lambda \ll \Lambda$, следовательно, в пренебрежении процессами, протекающими за время $\sim\tau$, величину $\mathbf{F}_f^{(L)}$ можно считать марковской случайной функцией времени.

Идея введения в регуляризованные уравнения движения некоторых дополнительных случайных членов не нова. Ранее такого же типа идея использовалась в теории флуктуаций электромагнитного поля в сплошной среде [9]; возможность введения «сторонних» локально независимых случайных сил и тепловых потоков в уравнения гидродинамики отмечается Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем в работе [10]. К теории турбулентного движения эта идея применялась, например, Е. А. Новиковым [11, 12] и Эдвардсом [13]. Предлагаемая модель обобщает эвристический подход работ [11–13], в которых были использованы простейшие стохастические соотношения типа уравнений Ланжевена и Онзагера, и одновременно придает ясный физический смысл величинам, входящим в эти соотношения. Физически введение случайной величины (1.4) в уравнения (1.3) в некотором смысле эквивалентно введению шума в работе [6].

Заметим, что (1.3) вместе с уравнением неразрывности позволяет в общем случае выразить полный тензор спектральной плотности процесса $\mathbf{v}_L'$ в виде некоторой функции частоты пульсаций ω и частичного тензора спектральной плотности (тензора энергетического спектра), определяемого по одновременным корреляционным функциям. Последнее дает возможность выразить $\mathbf{v}_f^{(L)}$ или $\mathbf{v}_f(k)$, где k — волновое число, соответствующее размеру L, в виде функционала от тензора энергетического спектра и тем самым произвести замыкание уравнений турбулентного движения. На самом деле, используя этот функционал в уравнении энергетического спектра турбулентности, получаем нелинейное тензорное интегро-дифференциальное уравнение, определяющее указанный спектр. Применение модели к анализу турбулентности в различных течениях и вычисление соответствующих энергетических спектров представляет самостоятельный интерес. Здесь отметим лишь, что предварительные результаты, касающиеся формы спектра изотропной турбулентности и турбулентности с поперечным сдвигом, представляются весьма обнадеживающими.

В заключение подчеркнем, что смысл предложенной модели состоит в конкретизации типа влияния случайных волн с различными волновыми числами k' на поведение волны с определенным волновым числом k. Воздействие волн с $k' \gtrsim k$ приводит к квазивязкой диссипации энергии рассматриваемой волны за счет передачи энергии к мелкомасштабным возмущениям, а воздействие волн с $k' \lesssim k$ проявляется в возникновении обычных турбулентных напряжений Рейнольдса. Возможно и дальнейшее развитие этой модели, в котором делалось бы аналогичное различие между влиянием волн с различной частотой ω' на волну частоты ω. Последнее можно сделать, вводя в уравнения тензор турбулентной вязкости, соответствующий не бесконечному, как выше, а конечному времени диффузии, зависящему от частоты ω. О целесообразности такого обобщения можно судить, конечно, лишь после сравнения результатов, основанных на предложенной модели, с экспериментальными данными.

2. Турбулентные движения разбавленной дисперсной системы. Рассматриваем ниже систему невзаимодействующих частиц, взвешенных в турбулизованной жидкости, предполагая, что объемная концентрация частиц в смеси $\rho \ll 1$, а их радиус $a < \lambda$. Для силы взаимодействия одиночных частиц с жидкой фазой в расчете на единицу объема смеси примем выражение

$$d_1\mathbf{f}_L = -\rho d_1\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F}_f^{(L)}\right) + \frac{1}{2}\rho d_1 \frac{D(\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L)}{Dt} + \rho c d_1(\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L) +$$

$$+ \rho c' d_1 \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{D(\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L)}{Dt'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}_L \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

$$c = \frac{9\nu_0 s}{2a^2}, \quad c' = \frac{9s'}{2a}\left(\frac{\nu_0}{\pi}\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

Здесь s, s' — постоянные порядка единицы (при стоксовом движении жестких сфер $s = s' = 1$), $\mathbf{w}_L$ — скорость диспергированной фазы, а дифференцирование по времени в (2.1) производится вдоль линий тока этой фазы. Члены в правой части (2.1) описывают силы, связанные с градиентом давления (обычного и турбулентного) и ускорением присоединенной массы жидкости, линейное вязкое сопротивление относительному движению частиц и нестационарную инерционную силу, описывающую влияние предыстории движения (сила Бассе).

Уравнения пульсационного движения фаз получаются совершенно аналогично уравнениям (1.3). Рассматривая фактически лишь одиночные частицы, пренебрегаем ниже пульсациями концентрации ρ_L' $(\rho_L = \langle\rho\rangle = \rho)$. Считая для простоты масштабы изменения средних параметров течения большими по сравнению с турбулентными масштабами (так что можно пренебречь вторым членом в левой части (1.3) и аналогичными членами в (2.1)), получаем уравнения сохранения импульса и массы в пульсационном движении в форме

$$\left(\frac{D}{Dt}+\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}_L' = -\frac{\partial p_L'}{\partial\mathbf{r}} + \mathbf{F}_L + \left(\left(\nu_0\frac{1+{}^5/_2\rho}{1-\rho}\mathbf{I}+\boldsymbol{\nu}_f^{(L)}\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}_L' -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{D(\mathbf{v}_L'-\mathbf{w}_L')}{Dt} - \frac{\rho}{\varepsilon}c(\mathbf{v}_L'-\mathbf{w}_L') - \frac{\rho}{\varepsilon}c'\int_{-\infty}^{t}\frac{D(\mathbf{v}_L'-\mathbf{w}_L')}{Dt'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\mathbf{w}_L' - \frac{\varkappa}{2}(\mathbf{v}_L'-\mathbf{w}_L')\right] = -\varkappa\frac{\partial p_L'}{\partial\mathbf{r}} + \varkappa\mathbf{F}_L + \left(\boldsymbol{\nu}_p^{(L)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{w}_L' +$$

$$+\varkappa c(\mathbf{v}_L'-\mathbf{w}_L') + \varkappa c'\int_{-\infty}^{t}\frac{D(\mathbf{v}_L'-\mathbf{w}_L')}{Dt'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \qquad \mathbf{u} = \langle\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{w}\rangle \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_L'}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathbf{w}_L'}{\partial\mathbf{r}} = 0, \quad \varkappa = \frac{d_1}{d_2}, \quad \varepsilon = 1-\rho, \quad \mathbf{F}_L = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\langle\mathbf{P}_L\rangle - \mathbf{P}_L)$$

$$\mathbf{P}_L = \|P_{L,\,ij}\| = \|(v_{Li}'-w_{Li}')v_{Lj}'\|$$

где d_2 — плотность частиц. Тензоры динамической турбулентной вязкости фаз связаны с диффузионными тензорами при помощи равенств

$$\boldsymbol{\eta}_f^{(L)} = (1-\rho)d_1\boldsymbol{\nu}_f^{(L)}, \qquad \boldsymbol{\eta}_p^{(L)} = \rho d_2\boldsymbol{\nu}_p^{(L)}$$

Сравнивая уравнения (1.3), (1.4) с уравнениями (2.2) при $\rho\to 0$, приходим к выводу об одинаковости статистических свойств векторов $\mathbf{F}_L$ и $\mathbf{F}_f^{(L)}$.

Представим все случайные процессы φ_L в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса [8] со случайными интегрирующими функциями Z_φ. Для дифференциалов последних получим из (2.2) уравнения

$$[i(\omega+\mathbf{ku}) + \nu_0k^2 + \boldsymbol{\nu}_f^{(L)}\mathbf{kk}]d\mathbf{Z}_v = -i\mathbf{k}dZ_p + d\mathbf{Z}_F - {}^7/_2\rho\nu_0k^2d\mathbf{Z}_v -$$
$$-\rho\varepsilon^{-1}[{}^1/_2i\omega + c + (1+i\,\mathrm{sign}\,\omega)b|\omega|^{1/2}](d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w), \qquad \mathbf{k}d\mathbf{Z}_v = 0$$

$$[i(1+{}^1/_2\varkappa)\omega + \boldsymbol{\nu}_p^{(L)}\mathbf{kk} + \varkappa c + \varkappa(1+i\,\mathrm{sign}\,\omega)b|\omega|^{1/2}]d\mathbf{Z}_w = \tag{2.3}$$
$$= -i\varkappa\mathbf{k}dZ_p + \varkappa d\mathbf{Z}_F + \varkappa[{}^1/_2i\omega + c + (1+i\,\mathrm{sign}\,\omega)b|\omega|^{1/2}]d\mathbf{Z}_v$$
$$\mathbf{k}d\mathbf{Z}_w = 0, \qquad b = c'({}^1/_2\pi)^{1/2}$$

В соответствии с обычным методом [8] примем ниже $\mathbf{v}_f^{(L)}$ и $\mathbf{v}_p^{(L)}$ функциями $k \sim L^{-1}$, т. е.

$$\mathbf{v}_f(k, T_d) = \alpha \int\limits_0^{T_d} d\tau \int\limits_\omega d\omega \int\limits_{k<k'} e^{i(\omega+\mathbf{k}'\mathbf{u})\tau} \Phi_v(\omega, \mathbf{k}') d\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{v}_p(k, T_d) = \alpha' \int\limits_0^{T_d} d\tau \int\limits_\omega d\omega \int\limits_{k<k'} e^{i\omega\tau} \Phi_w(\omega, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_f(k) = \lim \mathbf{v}_f(\mathbf{k}, T_d), \qquad \mathbf{v}_p(k) = \lim \mathbf{v}_p(k, T_d), \qquad T_d \to \infty$$

Здесь T_d — время диффузии, а постоянные α и α' имеют порядок единицы и феноменологически описывают связь между лагранжевыми и эйлеровыми временными корреляционными функциями; Φ_v и Φ_w — спектральные тензоры случайных скоростей фаз.

Считая ρ достаточно малой, так что искажение невозмущенного турбулентного поля сравнительно невелико, в нулевом приближении по ρ имеем из (2.3) следующие уравнения для жидкой фазы:

$$[i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu_0 k^2 + \mathbf{v}_f \mathbf{kk}] d\mathbf{Z}_v = -i\mathbf{k} dZ_p + d\mathbf{Z}_F, \qquad \mathbf{k} d\mathbf{Z}_v = 0 \qquad (2.5)$$

Отсюда получим тождество

$$(-i\mathbf{k} dZ_p + d\mathbf{Z}_F)\mathbf{k} \equiv 0$$

Вводя векторы $\mathbf{l}^{(j)} = [\mathbf{k}\mathbf{e}_j]$, где $\mathbf{e}_j$ — векторы орта, запишем наиболее общее представление для вектора $-i\mathbf{k}dZ_p + d\mathbf{Z}_F$ в виде [1]

$$-i\mathbf{k}dZ_p + d\mathbf{Z}_F = \mathbf{l}^{(m)} dA_m, \qquad dZ_p = -ik^{-2}(\mathbf{k}d\mathbf{Z}_F), \qquad \mathbf{k}\mathbf{l}^{(m)} = 0 \qquad (2.6)$$

$$\mathbf{l}^{(1)} = k_3\mathbf{e}_2 - k_2\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{l}^{(2)} = -k_3\mathbf{e}_1 + k_1\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{l}^{(3)} = k_2\mathbf{e}_1 - k_1\mathbf{e}_2$$

Здесь dA_m определяют некоторые случайные процессы со спектральными плотностями, не зависящими от ω. В общем случае из (2.5) и (2.6) имеем

$$d\mathbf{Z}_v = \frac{\mathbf{l}^{(m)} dA_m}{i(\omega + \mathbf{ku}) + \mathbf{vkk}}, \qquad \Phi_{v,ij} = \frac{l_i^{(m)} l_j^{(n)} A_{mn}(\mathbf{k})}{(\omega + \mathbf{ku})^2 + (\mathbf{vkk})^2} \qquad (2.7)$$

$$\mathbf{v} = \nu_0 \mathbf{I} + \mathbf{v}_f(k), \qquad \langle d\bar{A}_m dA_n \rangle = A_{mn}(\mathbf{k}) d\omega d\mathbf{k}$$

Ниже рассматриваем только изотропную турбулентность. Из условия изотропии, записанного в форме

$$\int\limits_\omega d\omega \int\limits_{k<k'} \Phi_{v,ij}(\omega, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' = \begin{cases} \langle v_{Li}'^2 \rangle, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

после интегрирования по углам в волновом пространстве получим

$$A_{mn}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ A(k), & m = n \end{cases} \qquad (2.8)$$

[1] Для тензорного потенциала $-\mathbf{I}dZ_p + d\mathbf{Z}_P$ этого вектора имеем представление: $-\mathbf{I}d\mathbf{Z}_p + d\mathbf{Z}_P = \mathbf{\Omega}_m dA_m$, причем антисимметричные тензоры $\mathbf{\Omega}_m$ однозначно определены равенствами $i\mathbf{k}\mathbf{\Omega}_m = \mathbf{l}^{(m)}$.

Учитывая, что $\mathbf{v}_f(k) = \nu_f(k)\mathbf{I}$, из (2.7) и (2.8) имеем соотношения

$$\Phi_{v,\,ij} = \delta_{ij}\frac{\nu(k)}{\pi}\frac{\Sigma_m l_i^{(m)2}\,E'(k)}{(\omega+\mathbf{ku})^2+(\nu(k)k^2)^2}, \quad \frac{\mathbf{v}(\ )}{\pi}E'(k) = A(k)$$

$$E_{v,\,ij} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\Phi_{v,\,ij} = \delta_{ij}\,\Sigma_m l_i^{(m)2}\,k^{-2}E'(k) \tag{2.9}$$

В частности, отсюда и из (2.4) следует:

$$\langle v_i'^2(k)\rangle = \int_{k<k'} d\mathbf{k}' \sum_m l_i^{(m)2}\frac{E'(k')}{k'^2} = \frac{2}{3}\int_k^{\infty} E(k)\,dk$$

$$\nu_f(k) = \alpha\int_{k<k'} d\mathbf{k}' \sum_m l_i^{(m)2}\frac{E'(k')}{\nu(k')k'^4} = \frac{2}{3}\alpha\int_k^{\infty}\frac{E(k)\,dk}{k^2\nu(k)} \tag{2.10}$$

$$E(k) = 4\pi k^2 E'(k)$$

Здесь $E(k)$ — функция трехмерного энергетического спектра изотропной турбулентности [2, 8]. При интегрировании по τ в (2.4) использовано фурье-разложение δ-функции. Из второго соотношения (2.10) имеем уравнение для $\nu_f(k)$

$$\frac{d}{dk}\left(\nu_0\nu_f(k) + \frac{1}{2}\nu_f^2(k)\right) = -\frac{2}{3}\alpha\frac{E(k)}{k^2} \tag{2.11}$$

$$\nu_f(k) = -\nu_0 + \left[\nu_0^2 + \frac{4}{3}\alpha\int_k^{\infty}\frac{E(k)\,dk}{k^2}\right]^{1/2} \approx \left(\frac{4}{3}\alpha\int_k^{\infty}\frac{E(k)\,dk}{k^2}\right)^{1/2}$$

Приближенное выражение для $\nu_f(k)$, получаемое при пренебрежении молекулярным переносом импульса по сравнению с турбулентным, соответствует одной из зависимостей, предложенных Стюартом и Таунсендом [14] из размерных соображений.

В прежнем нулевом приближении по ρ из (2.3) имеем также

$$d\mathbf{Z}_w = \frac{i(^3/_2\omega + \mathbf{ku} + b|\omega|^{1/2}\operatorname{sign}\omega) + \nu(k)k^2 + c + b|\omega|^{1/2}}{i[(1+{}^1/_2\varkappa)\omega + \varkappa b|\omega|^{1/2}\operatorname{sign}\omega] + \mathbf{v}_p(k)\mathbf{kk} + \varkappa c + \varkappa b|\omega|^{1/2}}\varkappa d\mathbf{Z}_v$$

$$\mathbf{\Phi}_w = \frac{(^3/_2\omega + \mathbf{ku} + b|\omega|^{1/2}\operatorname{sign}\omega)^2 + (\nu(k)k^2 + c + b|\omega|^{1/2})^2}{[(1+{}^1/_2\varkappa)\omega + \varkappa b|\omega|^{1/2}\operatorname{sign}\omega]^2 + (\mathbf{v}_p(k)\mathbf{kk} + \varkappa c + \varkappa b|\omega|^{1/2})^2}\varkappa^2\mathbf{\Phi}_v \tag{2.12}$$

Эти выражения полностью определяют характеристики случайного движения частиц в изотропном турбулентном поле.

3. Диффузия взвешенных частиц. Рассмотрим тензор турбулентной диффузии взвешенной примеси при большом времени диффузии ($T_d \to \infty$). Направляя вектор $\mathbf{e}_1$ вдоль $\mathbf{u}$ и интегрируя в (2.4) сначала по τ, затем по ω, получаем соотношения для собственных значений тензора $\mathbf{v}_p(k)$

$$\nu_{p,i}(k) = \alpha'\varkappa^2\int_{k<k'} d\mathbf{k}'\frac{u^2k_1'^2 + (\nu(k')k'^2 + c)^2}{(\mathbf{v}_p(k')\mathbf{k}'\mathbf{k}' + \varkappa c)^2}\frac{\Sigma_m l_i^{(m)2}}{k'^2}\frac{E'(k')}{\nu(k')} \tag{3.1}$$

Отсюда непосредственно следует, что при большом времени диффузии коэффициенты диффузии примеси не зависят от величин, определяющих интенсивность силы Бассе. Этот вывод, разумеется, неверен при конечных

T_d, сравнимых или меньших внешнего временного масштаба турбулентности T. Например, при $T_d \ll T$ имеем приближенно $\nu_{p,i}(k) \approx \approx \langle w_i'^2(k) \rangle T_d$, что существенно зависит от действия силы Бассе [1].

Вводя время релаксации частиц T_r к условиям внешнего течения, получаем очевидные оценки

$$\omega \sim \nu k^2 \sim \frac{\langle v_i'^2 \rangle^{1/2}}{\Lambda} \sim \frac{1}{T}, \quad c \sim \frac{1}{T_r}, \quad b \sim \frac{1}{(TT_r)^{1/2}}, \quad k_1 u \sim \frac{|1-\varkappa| g T_r}{\varkappa \Lambda} \tag{3.2}$$

Обычно рассматриваемому случаю отвечает неравенство $T_r \ll T$ и полное пренебрежение скольжением фаз [1, 2]. В этом случае, считая c в (3.1) много больше всех остальных величин, получим $\nu_p(k) = \nu_p(k)\mathbf{I}$ и $\nu_p(k) = (\alpha'/\alpha)\nu_f(k)$. Сравнивая это с известным результатом о равенстве $\nu_p(k)$ и $\nu_f(k)$ в рассматриваемом предельном случае [1, 2], видим, что необходимо принять $\alpha' = \alpha$.

В самом общем случае из (3.1) получаем уравнения для $\nu_{p,i}(k)$

$$\begin{gathered}
\frac{d\nu_{p,1}}{dk} = -\frac{\alpha\varkappa^2}{2}\left[u^2k^2\left(\frac{3\varphi^2+1}{\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varphi} - 3\right) + (\nu(k)k^2+c)^2 \times \right. \\
\left. \times \left(-\frac{\varphi^2-1}{\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varphi} + 1\right)\frac{1}{\varphi^2}\right]\frac{E(k)}{\nu(k)[\nu_{p,1}(k)-\nu_{p,2}(k)]^2k^6} \\
\frac{d\nu_{p,2}}{dk} = -\frac{\alpha\varkappa^2}{4}\left[u^2k^2\left(-\frac{3\varphi^2-1}{\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varphi} + \frac{3\varphi^2+1}{\varphi^2+1}\right) + \right. \\
\left. + (\nu(k)k^2+c)^2\left(\frac{\varphi^2+1}{\varphi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\varphi} - \frac{\varphi^2-1}{\varphi^2+1}\right)\frac{1}{\varphi^2}\right]\frac{E(k)}{\nu(k)[\nu_{p,1}(k)-\nu_{p,2}(k)]^2k^6}, \\
\nu_{p,1} > \nu_{p,2} \\
\frac{d\nu_{p,1}}{dk} = -\frac{\alpha\varkappa^2}{2}\left[u^2k^2\left(\frac{3\varphi^2-1}{2\varphi}\ln\frac{\varphi+1}{|\varphi-1|} - 3\right) + (\nu(k)k^2+c)^2 \times \right. \\
\left. \times \left(\frac{\varphi^2+1}{2\varphi}\ln\frac{\varphi+1}{|\varphi-1|} - 1\right)\frac{1}{\varphi^2}\right]\frac{E(k)}{\nu(k)[\nu_{p,1}(k)-\nu_{p,2}(k)]^2k^6} \\
\frac{d\nu_{p,2}}{dk} = -\frac{\alpha\varkappa^2}{4}\left[u^2k^2\left(-\frac{3\varphi^2+1}{2\varphi}\ln\frac{\varphi+1}{|\varphi-1|} + \frac{3\varphi^2-1}{\varphi^2-1}\right) + \right. \\
\left. + (\nu(k)k^2+c)^2\left(-\frac{\varphi^2-1}{2\varphi}\ln\frac{\varphi+1}{|\varphi-1|} + \frac{\varphi^2+1}{\varphi^2-1}\right)\frac{1}{\varphi^2}\right] \times \\
\times \frac{E(k)}{\nu(k)[\nu_{p,1}(k)-\nu_{p,2}(k)]^2k^6} \qquad \nu_{p,1} < \nu_{p,2} \\
\varphi^2 = (\nu_{p,2}(k)k^2 + c)[k^2|\nu_{p,1}(k) - \nu_{p,2}(k)|]^{-1}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Решения этих уравнений должны удовлетворять условиям

$$\lim \nu_{p,i}(k) = 0, \quad k \to \infty$$

---

[1] Влияние силы Бассе на среднеквадратичную скорость пульсаций частиц в гармонически осциллирующей жидкости подробно рассмотрено в [3].

В общем случае уравнения (3.3) могут быть проинтегрированы только численно. Рассмотрим здесь лишь простейшие предельные случаи. Движение частиц тоже будет изотропным, если можно пренебречь межфазовым скольжением, т. е. последняя величина в (3.2) намного меньше остальных. Переходя в (3.3) к асимптотике $\nu_{p,2}(k) \approx \nu_{p,1}(k)$ и $\varphi \gg 1$, получаем для изотропных пульсаций частиц соотношения (здесь и ниже считаем для простоты $\nu(k) \approx \nu_f(k)$), т. е. пренебрегаем молекулярной вязкостью жидкости

$$\frac{d\nu_{p,1}}{dk} = -\frac{2}{3}\alpha\varkappa^2 \frac{[{}^1/_5 u^2k^2 + (\nu_f(k)k^2 + c)^2]}{(\nu_{p,2}(k)k^2 + \varkappa c)^2} \frac{E(k)}{\nu_f(k)k^2}$$
$$\frac{d\nu_{p,2}}{dk} = -\frac{2}{3}\alpha\varkappa^2 \frac{[{}^2/_5 u^2k^2 + (\nu_f(k)k^2 + c)^2]}{(\nu_{p,2}(k)k^2 + \varkappa c)^2} \frac{E(k)}{\nu_f(k)k^2} \quad (3.4)$$

По предположению первые члены в квадратных скобках в (3.4) намного меньше вторых. Отметим в этой связи, что оценка (3.2) относится к свободному движению частицы под действием внешнего силового поля; если градиент давления в течении велик, то, например, $u \neq 0$ даже при $\varkappa = 1$. Из (3.4) следует, что при изотропном случайном движении примеси последнюю нельзя считать пассивной даже при большом времени диффузии. Исключение составляют лишь равноплотные взвеси ($\varkappa = 1$) и предельный случай $T_r \ll T$, рассмотренный Ченом [1,2] ранее[1]. В противоположном предельном случае $T_r \gg T$ из (3.4) и (2.11) получим приближенное соотношение

$$\nu_p(k) \approx \varkappa^{2/3}\nu_f(k)$$

Отметим, что зависимости (3.4) описывают также малые отклонения от изотропии. При этом коэффициент поперечной диффузии примеси оказывается несколько выше коэффициента продольной диффузии.

Рассмотрим теперь существенно неизотропные пульсации частиц, когда конвективный перенос пульсационного импульса средним движением примеси играет преобладающую роль, т. е. последняя величина в (3.2) намного больше других. Примем $\nu_{p,2}(k) = \gamma\nu_{p,1}(k)$, где γ — постоянная. Если $T_r \gg T$, уравнение для γ (или $\varphi^2 = \gamma|\gamma - 1|^{-1}$) при $\gamma > 1$ или $\gamma < 1$ получается из уравнений (3.3). Анализ показывает, что уравнение, отвечающее $\gamma < 1$, решений не имеет. Уравнение для φ при $\gamma > 1$ имеет форму

$$\ln\frac{\varphi + 1}{\varphi - 1} = \frac{18\varphi^3 - 2\varphi}{9\varphi^4 - 4\varphi^2 - 1}, \quad \varphi > 1 \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что это уравнение имеет единственный корень φ; численный расчет дает $\varphi \approx 1.163$. Соответствующие коэффициенты диффузии частиц выразятся согласно (3.3) в виде

$$\nu_{p,1}^3(k) \approx 0.084\alpha\varkappa^2u^2 \int_k^\infty \frac{E(k)dk}{\nu_f(k)k^4}, \quad \nu_{p,2}(k) \approx 3.78\nu_{p,1}(k) \quad (3.6)$$

Напротив, при $T_r \ll T$ из (3.4) получим

$$\nu_{p,1}(k) \approx \frac{2}{15}\frac{\alpha u^2}{c^2}\int_k^\infty \frac{E(k)dk}{\nu_f(k)}, \quad \nu_{p,2}(k) \approx 2\nu_{p,1}(k) \quad (3.7)$$

---

[1] Подчеркнем, что этот вывод, как и некоторые последующие, относится лишь к достаточно мелким частицам ($a < \lambda$). При $a \gg \lambda$ становится существенной интерференция случайных сил, действующих на отдельные участки поверхности частицы. Эта интерференция приводит к некоторому обрыву в коротковолновой области эффективного спектра случайных движений примеси.

Для крупных частиц, когда пульсации существенно анизотропны, реализация неравенства $T_r \ll T$ вероятна лишь при слабо развитой турбулентности. В обоих предельных случаях (3.6) и (3.7) коэффициент диффузии в направлении скорости относительного движения $\mathbf{u}$ значительно ниже, чем в перпендикулярном направлении. Используемое обычно [5] эмпирическое выражение для коэффициента продольной диффузии, линейное по u, оказывается некоторым средним между соотношениями (3.6) и (3.7) для этой величины, которые дают оценки $\nu_{p,i} \sim u^{2/3}$ и $\nu_{p,i} \sim u^2$. Из выражений (2.4) можно получить также представления для коэффициентов диффузии примеси при конечном времени диффузии, используя найденные функции $\nu_{p,i}(k)$.

Распределение тяжелой примеси по вертикали в изотропном турбулентном поле представляется в форме [15]

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{ux_1}{\nu_{p,1}}\right) \qquad \mathbf{u} = u\mathbf{e}_1, \quad \nu_{p,1} = \nu_{p,1}(0) \tag{3.8}$$

4. Влияние частиц на турбулентность жидкой фазы. Изменение характеристик турбулентности жидкости при наличии взвешенных частиц можно рассмотреть, исследуя уравнение энергетического спектра для взвеси, как это было сделано, например, в работах [16, 17] при анализе влияния частиц на конечный период вырождения изотропной турбулентности. Здесь используем другой метод, непосредственно вычисляя следующие члены разложения спектральной меры процесса v_L' по малой ρ. Для поправки $d\mathbf{Z}_v^*$ к $d\mathbf{Z}_v$, вычисленной в 2, из (2.3) получим уравнение

$$\begin{aligned}[i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu(k)k^2]d\mathbf{Z}_v^* = -{}^7/_2\rho\nu_0 k^2 d\mathbf{Z}_v - \rho\varepsilon^{-1}[{}^1/_2 i\omega + c + \\ + (1 + i\,\mathrm{sign}\,\omega)b|\omega|^{1/2}](d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w) - (\boldsymbol{\nu}_f^*(k))\mathbf{kk})d\mathbf{Z}_v\end{aligned} \tag{4.1}$$

Отсюда с точностью до членов $\sim \rho$ получим соотношение для поправки $\Phi_{v,ij}^*$ к спектральному тензору $\Phi_{v,ij}$ из (2.9)

$$\begin{aligned}\Phi_{v,ij}^* = -7\rho\nu_0 k^2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\Phi_{v,ij}}{i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu(k)k^2}\right\} - \\ - 2\rho\boldsymbol{\nu}_f^*(k)\mathbf{kk}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\Phi_{v,ij}}{i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu(k)k^2}\right\} - \\ - \frac{2\rho}{\varepsilon}\mathrm{Re}\left\{\frac{{}^1/_2 i\omega + c + (1 + i\,\mathrm{sign}\,\omega)b|\omega|^{1/2}}{i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu(k)k^2}\Phi_{uv,ij}\right\} \\ \Phi_{uv,ij}\,d\omega\,d\mathbf{k} = \langle(d\bar{Z}_{vi} - d\bar{Z}_{wi})dZ_{vj}\rangle\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь и в (4.1) $\boldsymbol{\nu}_f^*(k)$ — поправка к тензору турбулентной диффузии жидкости, обусловленная искажением невозмущенного турбулентного поля взвешенными частицами. Вычисляя $d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w$ из (2.12) и подставляя в (4.2), получаем окончательно

$$\begin{aligned}\Phi_{v,ij}^* = -\rho\,\mathrm{Re}\Big\{\Big[7\nu_0 + 2\boldsymbol{\nu}_f^*(k)\mathbf{kk} + 2({}^1/_2 i\omega + c + (1 + i\,\mathrm{sign}\,\omega)b|\omega|^{1/2}) \times \\ \times \frac{i[\omega - \varkappa(\omega + \mathbf{ku})] + \boldsymbol{\nu}_p(k)\mathbf{kk} - \varkappa\nu(k)k^2}{i[(1 + {}^1/_2\varkappa)\omega + \varkappa b|\omega|^{1/2}\mathrm{sign}\,\omega] + \boldsymbol{\nu}_p(k)\mathbf{kk} + \varkappa c + \varkappa b|\omega|^{1/2}}\Big] \times \\ \times \frac{\Phi_{v,ij}}{i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu(k)k^2}\Big\}\end{aligned}$$

Выражения (4.1) и (4.3) полностью определяют искажение турбулентности взвешенной примесью с точностью до членов высшего порядка по ρ. Для упрощения выкладок рассмотрим ниже только взвеси достаточно мелких частиц, когда можно считать $T_r \ll T$, а также $T_r \ll \varkappa T$. Тогда из (4.3) имеем приближенно

$$\Phi_{v,\,ij}^* \approx -\rho \operatorname{Re}\{[(7\nu_0 + 2\nu_f^*(k))k^2 + 2\varkappa^{-1}[i(\omega - \varkappa(\omega + \mathbf{ku})) + \\ + (1-\varkappa)\nu_f(k)k^2]][i(\omega + \mathbf{ku}) + \nu(k)k^2]^{-1}\Phi_{v,\,ij}\} \tag{4.4}$$

В соответствии с результатами п. 3, в (4.4) принято $\nu_p(k) = \nu_f(k)$, а кроме того, $\nu_f(k) \approx \nu(k)$. Используя формулу (2.4), получаем после вычислений уравнение для $\nu_f^*(k)$

$$\frac{d\nu_f^*}{dk} \approx \frac{4}{3}\alpha\rho \frac{\varkappa^{-1}(1-\varkappa)\nu_f(k) + \nu_f^*(k)}{\nu_f^2(k)} \frac{E(k)}{k^2} \tag{4.5}$$

Считая $\nu_f^*(\infty) = 0$, имеем отсюда представление

$$\nu_f^*(k) = -\frac{4(1-\varkappa)}{3\varkappa}\alpha\rho \exp\left(-\frac{4}{3}\alpha\rho\int_0^k \frac{E(k)dk}{\nu_f^2(k)k^2}\right) \times \\ \times \int_k^\infty \exp\left(\frac{4}{3}\alpha\rho\int_0^k \frac{E(k')dk'}{\nu_f(k')k'^2}\right)\frac{E(k)dk}{\nu_f(k)k^2} \tag{4.6}$$

После ряда преобразований из (4.6) с учетом (2.11) получим соотношение

$$\nu_f^*(k) \approx -\frac{4}{3}\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\alpha\rho\psi^{-\rho}\int_k^\infty \psi^\rho \frac{E(k)dk}{\nu_f(k)k^2} \\ \psi(k) = \nu_f^2(k) \approx \frac{4}{3}\alpha\int_k \frac{E(k)dk}{k^2} \tag{4.7}$$

Отметим, что в области больших k, где нельзя пренебрегать ν_0 по сравнению с $\nu_f(k)$ (см. соотношение (2.11)), ошибка формулы (4.7) может быть весьма значительной.

Из формулы (4.7) следует, что влияние взвешенной примеси на турбулентность жидкой фазы может быть большим даже при $\rho \ll 1$, если $\varkappa \ll 1$, т. е. если частицы взвешены в газе. Для равноплотных суспензий имеем $\nu_f^*(k) \approx 0$; при $\varkappa < 1$ (частицы тяжелее жидкости) $\nu_f^*(k) < 0$, т. е. присутствие частиц приводит к некоторому ослаблению интенсивности перемешивания и снижению турбулентной вязкости, при $\varkappa > 1$ имеем обратный эффект — $\nu_f^*(k) > 0$. Эта же закономерность сохраняется и для поправки к тензору турбулентной диффузии при конечном времени диффузии, например, для поправки к турбулентной вязкости в логарифмическом пристенном слое.

Вычислим дополнительную диссипацию энергии турбулентности, связанную с несовпадением по величине и по фазе пульсационных скоростей жидкости и частиц, т. е. обусловленную работой силы (2.1). Рассматривая по-прежнему весьма мелкие частицы, имеем приближенно

$$\varepsilon' \approx \rho c d_1 \int_k E_{u,ii}\,dk = 2\rho\frac{(1-\varkappa)^2}{\varkappa(1+{}^1/_2\varkappa)} d_1\nu_f(k)\int_0 k^2E(k)\,dk \tag{4.8}$$

Аналогично нетрудно рассмотреть и более общий случай, когда неравенства $T_r \ll T$ и $T_r \ll \varkappa T$ не выполняются.

Таким образом, взвешенные частицы способствуют, во-первых, появлению дополнительной диссипации энергии ε' в тепло, равной работе сил межфазового взаимодействия на перемещениях частиц относительно жидкой фазы, а во-вторых, изменению обычной турбулентной диссипации на величину $\Delta\varepsilon$, обусловленному влиянием частиц на интенсивность турбулентного смешения в жидкости. Последняя величина равна

$$\Delta\varepsilon \approx \frac{1}{2}\nu_f^*(0)\left(\frac{\partial\langle v\rangle_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\langle v\rangle_k}{\partial x_i}\right)^2 \tag{4.9}$$

Здесь величина $\nu_f^*(k)$ при $T_r \ll T$ описывается выражением (4.7).

Легко видеть, что $\Delta\varepsilon$ отрицательна при $\varkappa < 1$, причем, если $1-\varkappa \ll 1$, т. е. плотность частиц лишь ненамного превосходит плотность жидкости, $|\Delta\varepsilon| \sim 1-\varkappa$, $\varepsilon' \sim (1-\varkappa)^2$, так что $\Delta\varepsilon + \varepsilon' < 0$. Таким образом, изменение полной диссипации энергии в течении однородной жидкости при добавлении более тяжелых частиц может быть отрицательным, что позволяет до некоторой степени понять известные опыты по снижению гидравлического сопротивления при добавлении частиц. Напротив, введение в турбулентный поток более легких частиц всегда приводит к увеличению полной диссипации энергии, а следовательно, и к увеличению гидравлического сопротивления. Для количественного анализа снижения сопротивления в течениях различных типов необходимо, вообще говоря, рассматривать влияние частиц на более сложные турбулентные поля — неизотропные и, возможно, неоднородные, что представляет отдельную проблему.

Поступило 16 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Tchen C.-M., Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. Hague, 1947.
2. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.
3. Hjemfelt A. T., Mockros L. F. Motion of discrete particles in a turbulent fluid. Appl. Scient. Res., 1966, vol. 16, No. 2.
4. Левич В. Г., Кучанов С. И. Движение частиц, взвешенных в турбулентном потоке. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 4.
5. Синельщиков В. С. О коэффициенте турбулентной диффузии частиц взвеси. ПМТФ, 1967, № 6.
6. Буевич Ю. А. Неньютоновская гидромеханика дисперсных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
7. Heisenberg W. Zur Statistischen Theorie der Turbulenz. Zs. Phys., 1948, Bd. 124, Nr. 7—12.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 2. М., Физматгиз, 1967.
9. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. Изд-во АН СССР, 1953.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. О гидродинамических флуктуациях. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 3.
11. Новиков Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6.
12. Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 5, (11).
13. Edwards S. F. The statistical dynamics of homogeneous turbulence. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 2.
14. Stewart R. W., Townsend A. A. Similarity and self — preservation in isotropic turbulence. Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A, 1951, vol. 243, No. 867.
15. Фукс Н. А. О вертикальном распределении частиц, взвешенных в турбулентном потоке. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 2.
16. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. О влиянии взвешенных частиц на вырождение изотропной турбулентности. ПМТФ, 1965, № 4.
17. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Искажение энергетического спектра вырождающейся изотропной турбулентности под влиянием взвешенных частиц. ПМТФ, 1965, № 5.