

## ОБТЕКАНИЕ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА, УСТАНОВЛЕННЫХ ПОД УГЛОМ АТАКИ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

А. И. ГОЛУБИНСКИЙ

(Москва)

Изучается обтекание треугольного крыла малого удлинения гиперзвуковым потоком невязкого идеального газа под конечным углом атаки. Устремляя число Маха  $M_\infty$  набегающего потока в бесконечность при постоянном значении геометрического параметра, характеризующего возмущение потока (например, относительной толщины тела или угла атаки), приходим, как известно, к предельной гиперзвуковой картине обтекания тела, когда предельно сильный скачок уплотнения приближается близко к телу, образуя тонкий сжатый слой возмущенного течения газа. Такое течение можно рассмотреть при помощи метода малого параметра  $\epsilon$ , характеризующего отношение плотностей на скачке уплотнения [1, 2].

В работах [3, 4] анализируется обтекание конических крыльев, удлинение которых имеет порядок единицы. В этом случае скачок уплотнения будет присоединенным к передней кромке. В работе [5] рассматривается обтекание крыльев, малого удлинения, уменьшающегося вместе с параметром  $\epsilon$  таким образом, что угол полураствора крыла по порядку величины совпадает с углом конуса Маха внутри сжатого слоя.

При этом угол атаки остается конечным (порядка единицы), так что при  $M_\infty \rightarrow \infty$  выполняется гиперзвуковой закон плоских сечений для тонких тел при больших углах атаки [6], который вместе с дополнительным предельным переходом  $\epsilon \rightarrow 0$  приводит к закону подобия, установленному в работе [5]. В этом случае возможны как случаи отошедшего скачка (когда параметр подобия  $\Omega < 2$ ), рассматриваемый в работах [5, 7], так и случай присоединенного скачка уплотнения ( $\Omega > 2$ ).

В монографии [2] воспроизводятся результаты упомянутых работ с некоторыми дополнениями, а также рассматривается прямая задача обтекания треугольной пластины с присоединенным скачком, решение которой, как оказалось, содержит ряд особых точек, нуждающихся в дальнейшем изучении.

В данной работе, рассматривая обратную задачу, удалось построить замкнутую картину обтекания крыльев некоторого класса с толщиной и с присоединенным скачком уплотнения, причем поле газодинамических параметров, форма поверхности крыла и ударной волны всюду оказываются непрерывными и не содержащими каких-либо особых точек, за исключением известного тонкого энтропийного слоя вблизи критической точки, проявляющего себя лишь в высших приближениях [2, 4].

1. Рассмотрим нижнюю поверхность крыла треугольной симметричной формы в плане с некоторым распределением толщины  $y_w = x f(z/x)$ , отсчитываемой от некоторой базовой плоскости крыла, проходящей через вершину крыла. Координатная плоскость  $xoz$  расположена в этой плоскости (фиг. 1). На крыло набегают гиперзвуковой поток газа под углом атаки  $\alpha$  к базовой плоскости.

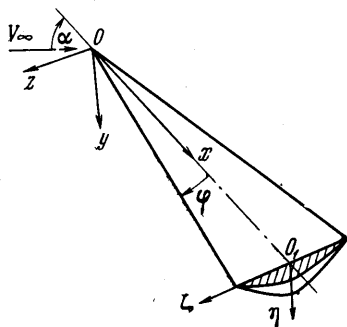
Если в потоке число Маха  $M_\infty \rightarrow \infty$ , причем так, что  $M_\infty \sin \alpha \rightarrow \infty$ , и если при этом одновременно отношение теплоемкостей газа  $\kappa \rightarrow 1$ , то известная «ньютоновская» теория обтекания дает следующие оценки порядков величин:

$$\frac{q}{V_\infty} \rightarrow \cos \alpha, \quad \frac{p}{\rho_0 V_\infty^2} \rightarrow \sin^2 \alpha, \quad \epsilon \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow 1$$

Здесь  $V_\infty$ ,  $p_\infty$ ,  $\rho_\infty$  — скорость, давление и плотность перед скачком уплотнения, а  $q$ ,  $p$ ,  $\rho$  — те же величины за скачком. За малый параметр примем

$$\varepsilon = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{2}{(\kappa + 1)M_\infty^2 \sin^2 \alpha}$$

Выберем, следуя работе [5], такой предельный переход, при котором  $(\kappa - 1)M_\infty^2 \sin^2 \alpha = \text{const} = O(1)$ . В частности, возможен предельный переход при  $\alpha = \text{const} = O(1)$ . Угол Маха за скачком оценивается величиной  $\varepsilon^{1/2} \text{tg } \alpha$ . Пусть при предельном переходе  $\varepsilon \rightarrow 0$  угол передней кромки  $\varphi$  уменьшается так, что остается постоянной величина  $\Omega = \varphi / \varepsilon^{1/2} \text{tg } \alpha$ , являющаяся параметром подобия [5].



В поперечной плоскости  $x = \text{const} = 1$  координата скачка  $y_s$  имеет порядок  $\varepsilon \text{tg } \alpha$ . Пусть толщина крыла  $y_w$  в этой плоскости имеет тот же порядок. Вводя конические координаты

$$\eta = \frac{y}{x \varepsilon \text{tg } \alpha}, \quad \zeta = \frac{z}{x \varepsilon^{1/2} \text{tg } \alpha} \quad (1.1)$$

Фиг. 1

и используя оценки величин за косым скачком уплотнения, подставим следующие разложения величин в известные уравнения конического течения:

$$\begin{aligned} u / V_\infty &= \cos \alpha + \varepsilon \sin^2 \alpha u_* + O(\varepsilon^2) \\ \frac{v}{V_\infty} &= \varepsilon \sin \alpha v_* + O(\varepsilon^2), \quad \frac{w}{V_\infty} = \varepsilon^{1/2} \sin \alpha w_* + O(\varepsilon^2) \\ \frac{p - p_\infty}{p_\infty V_\infty^2} &= \sin^2 \alpha + \varepsilon \sin^2 \alpha p_* + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \varepsilon + \varepsilon^2(1 + p_*) - \frac{\kappa - 1}{2} \varepsilon(2u_* + w_*^2) + O(\varepsilon^3)$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — составляющие вектора скорости за скачком уплотнения соответственно по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ ; переменные величины со звездочками имеют порядок единицы в сжатом слое. Форму скачка уплотнения  $y_s(z)$  и распределение толщины крыла  $y_w(z)$  выразим в виде

$$\frac{y_s(z)}{x} = \varepsilon \text{tg } \alpha \eta_s(\zeta), \quad \frac{y_w(z)}{x} = \varepsilon \text{tg } \alpha \eta_w(\zeta)$$

Тогда в первом приближении уравнения движения и краевые условия на скачке и на поверхности крыла примут вид (звездочки здесь и в дальнейшем опустим)

$$\begin{aligned} v_\eta + w_\zeta &= 0, & (v - \eta)w_\eta + (w - \zeta)w_\zeta &= 0 \\ (v - \eta)v_\eta + (w - \zeta)v_\zeta &= -p_\eta \\ w &= -\eta_s', & v &= -\eta_s'^2 - 1 + \eta_s - \zeta\eta_s' \\ p &= -\eta_s'^2 - 1 + 2\eta_s - 2\zeta\eta_s' & \text{при } \eta &= \eta_s \\ v - \eta_w &= \frac{d\eta_w}{d\zeta}(w - \zeta) & \text{при } \eta &= \eta_w \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения для  $u$  и  $\rho$  отделяются от этой системы и при необходимости могут быть решены дополнительно. Это соответствует гиперзвуковому закону плоских сечений [6] при дополнительном предельном переходе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Система уравнений (1.3) с краевыми условиями представляет собой обобщение постановки задачи [5, 7] на случай крыла, имеющего распределение толщины и присоединенный скачок уплотнения. Кроме того, здесь иначе будут выбраны основные искомые функции и переменные при выводе основного уравнения задачи, принимающего в итоге более простой вид, удобный для анализа.

Вводя новые независимые переменные  $\psi, \zeta$ , где  $\psi$  — некоторая функция тока, постоянная вдоль конической проекции поверхности тока на плоскость  $x = 1$  и равная значению координаты  $\zeta$ , соответствующему пересечению проекции поверхности тока со скачком уплотнения, можно [3, 5] записать общее решение системы с четырьмя произвольными функциями:

$$\begin{aligned} w &= w(\psi), & \eta &= \eta_w(\zeta) + \int_{\psi_w(\zeta)} [w(\psi) - \zeta] Q(\psi) d\psi \\ v &= - \left[ w(\psi) - \zeta \right] \int_{\psi_w(\zeta)} Q(\psi) d\psi + \left[ w(\psi) - \zeta \right] \frac{d\eta_w}{d\zeta} + \eta \\ p &= \int_{\psi_w(\zeta)} \left[ w(\psi) - \zeta \right] \frac{\partial v}{\partial \zeta} \Big|_{\psi} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \Big|_{\psi} d\psi + P(\zeta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Произвольные функции  $w(\psi), Q(\psi), \psi_w(\zeta), P(\zeta)$  используются для удовлетворения краевым условиям. Отметим, что функция  $\psi_w(\zeta)$  выражает собой распределение функции тока по поверхности крыла, т. е.  $\psi = \psi_w(\zeta)$  при  $\eta = \eta_w(\zeta)$ , что соответствует второму уравнению системы (1.4).

Рассмотрим условия обтекания поверхности крыла. Третье уравнение системы (1.4) при  $\eta = \eta_w$  и  $\psi = \psi_w$  совпадает с условием обтекания поверхности крыла. Второе уравнение системы (1.4) после дифференцирования по  $\zeta$  (при  $\psi = \text{const}$ ) дает наклон поверхностей тока, равный на крыле

$$\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{d\eta_w}{d\zeta} + \frac{d\psi_w(\zeta)}{d\zeta} Q(\psi_w) \left\{ \zeta - w[\psi_w(\zeta)] \right\} \quad (1.5)$$

и, чтобы выполнить условие обтекания, выражающее собой равенство наклонов поверхности тока и поверхности крыла, необходимо положить либо  $\psi_w = \text{const}$  (т. е. функция тока постоянна вдоль поверхности крыла), либо

$$w[\psi_w(\zeta)] = \zeta \quad (1.6)$$

Во втором случае функция тока переменна вдоль поверхности крыла, проекции поверхностей тока оканчиваются на крыле. Условие (1.6) означает, что функции  $w(\zeta)$  и  $\psi_w(\zeta)$  являются взаимно обратными.

Можно предположить, что в общем случае на некоторой части крыла в диапазоне  $0 \leq \zeta \leq \zeta^*$  имеет место условие (1.6), а на остальной части вплоть до передней кромки, соответствующей  $\zeta = \zeta^*$ , функция тока постоянна. Ниже будет подтверждено это предположение.

Рассмотрим вначале диапазон  $0 \leq \zeta \leq \zeta^*$ . Условие на скачке (1.3) дает

$$w(\zeta) = - \frac{d\eta_s}{d\zeta} \quad (1.7)$$

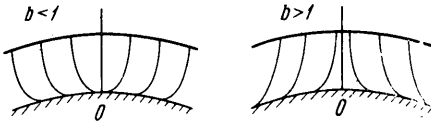
Тогда с учетом (1.7) остальные уравнения (1.3) дают

$$Q(\zeta) = \frac{1}{[w(\zeta) - \zeta]^2}$$

Кроме того, из выражения для формы скачка уплотнения

$$\eta_s = \eta_w + \int_{\psi_w(\zeta)}^{\zeta} [w(\zeta_1) - \zeta] Q(\zeta_1) d\zeta_1 \quad (1.8)$$

с учетом (1.6) и (1.7) получаем основное уравнение задачи, связывающее координату тела  $\eta_w(\zeta)$  и наклон скачка уплотнения  $\eta_s'(\zeta)$  в рассматриваемом диапазоне  $\zeta$



Фиг. 2

$$\eta_w''(\zeta) = \eta_s''(\zeta) \left( 1 - \frac{1}{[\eta_s'(\zeta) + \zeta]^2} \right) - \psi_w'(\zeta) \frac{1}{[\psi_w(\zeta) - \zeta]^2} \quad (1.9)$$

причем уравнения (1.6), (1.7) дают дополнительную связь

$$-\eta_s'[\psi_w(\zeta)] = \zeta \quad (1.10)$$

Таким образом, распределения по координате  $\zeta$  функции тока на поверхности крыла и наклонов скачка (с обратным знаком) описываются взаимно обратными функциями.

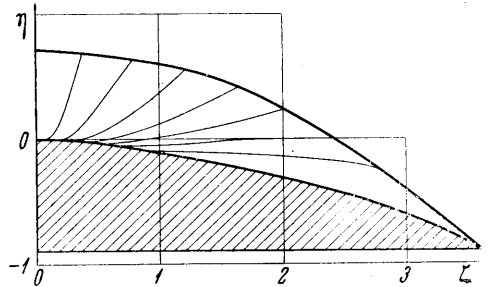
В диапазоне  $\zeta^* < \zeta \leq \zeta^{**}$  поверхность крыла совпадает с некоторой поверхностью тока. Тогда ее форма может быть найдена по уравнению для проекции поверхности тока, которое после дифференцирования (1.4) с учетом (1.8) можно записать в виде

$$\eta_w''(\zeta) = \eta_s''(\zeta) \times \left( 1 - \frac{1}{[\eta_s'(\zeta) + \zeta]^2} \right) \quad (1.11)$$

Для вычисления распределения давления по крылу используется формула

$$p = -1 + 2\eta_s - 2\zeta\eta_s' - \eta_s'^2 -$$

$$- \eta_w'' \int_{\psi_w(\zeta)}^{\zeta} \frac{[\eta_s'(\zeta_1) + \zeta_1]^3}{[\eta_s'(\zeta_1) + \zeta_1]^2} d\zeta_1$$



Фиг. 3

применяемая на поверхности крыла с распределенной или постоянной функцией тока.

2. Выясним теперь возможность построения решений, имеющих физический смысл обтекания реальных замкнутых тел.

Прежде всего укажем одно простое точное решение системы уравнений (1.9) и (1.10), в чем легко убедиться непосредственной проверкой,

$$\eta_w(\zeta) = -\frac{b\zeta^2}{2}, \quad \eta_s = \eta_{s0} - \frac{b\zeta^2}{2}, \quad \psi_w(\zeta) = \frac{1}{b}\zeta \quad (2.1)$$

Здесь  $b$  — любая положительная постоянная величина, не равная 1,  $\eta_{s0}$  — константа интегрирования, определяемая из уравнений в интегральной форме (1.4) в виде

$$\eta_{s0} = \frac{1}{(1-b)^2} [1 + b \ln b - b] \quad (2.2)$$

На фиг. 2 показана соответствующая картина течения и конфигурация проекций поверхностей тока при  $b < 1$  и  $b > 1$ . При  $b < 1$  эти поверхности тока после прохождения скачка изгибаются по направлению к плоскости симметрии, при  $b > 1$  изгиб направлен от плоскости симметрии.

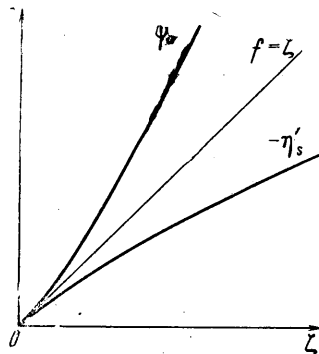
Оказывается, что в случае  $b < 1$  конфигурация поверхностей тока такова, что можно построить замкнутую непрерывную поверхность крыла с присоединенным скачком уплотнения, если за эту поверхность принять некоторый участок параболы  $\eta_w = -1/2 b \zeta^2$  и две проекции поверхностей тока, выходящие из концов этого участка (по обе стороны от плоскости симметрии) вплоть до пересечения со скачком уплотнения. На фиг. 3 показан пример построенного таким образом крыла ( $b = 0.25$ ,  $\zeta^* = 0.9$ ,  $\zeta^{**} = 3.6$ ).

Форма поверхности таких крыльев в диапазоне  $0 < \zeta \leq \zeta^*$  является параболой  $-1/2 b \zeta^2$ , а в диапазоне  $\zeta^* < \zeta < \zeta^{**}$  выражается формулой

$$\eta_w = -\frac{b\zeta^2}{2} - \frac{b}{(1-b)^2} \ln \zeta + \eta_1 \zeta + \eta_2 \quad (2.3)$$

$$\eta_1 = \frac{b}{(1-b)^2(\zeta^{**} - \zeta^*)} \cdot \ln \frac{\zeta^{**}}{\zeta^*} + \frac{\eta_{s0}}{(\zeta^{**} - \zeta^*)}$$

$$\eta_2 = \frac{b}{(1-b)^2(\zeta^{**} - \zeta^*)} \cdot (\zeta^{**} \ln \zeta^* - \zeta^* \ln \zeta^{**}) - \frac{\eta_{s0} \zeta^*}{(\zeta^{**} - \zeta^*)}$$



Фиг. 4

3. Система уравнений (1.9) — (1.11) позволяет решить любую обратную задачу обтекания, когда задана форма скачка уплотнения и требуется найти форму тела, подпирающего этот скачок уплотнения. Решение такой обратной задачи существует при условии, если соответствующая конфигурация поверхностей тока такова, что позволяет непрерывным образом (с непрерывным наклоном) стыковать крайние поверхности тока с центральной частью тела, являющейся огибающей всех остальных поверхностей тока. Форма скачка уплотнения должна выражаться непрерывной функцией, чтобы уравнения имели смысл. Кроме того, для существования однозначной функции  $\psi_w(\zeta)$  необходимо, чтобы кривизна скачка нигде не меняла знака.

Для выяснения первого условия рассмотрим график  $-\eta'_s(\zeta)$  (фиг. 4). Легко видеть, что если эта функция лежит ниже диагонали  $f(\zeta) = \zeta$ , то значения функций тока на скачке, равные  $\zeta$ , при всех  $\zeta$  меньше, чем значения функции тока на теле  $\psi_w(\zeta)$ . В самом деле, функция  $\psi_w(\zeta)$ , являющаяся обратной функцией относительно  $-\eta'_s(\zeta)$ , представляет собой зеркальное отображение этой функции относительно диагонали  $f(\zeta) = \zeta$  и поэтому лежит в данном случае выше диагонали. Вследствие этого проекции поверхностей тока сходятся с поверхности крыла по направлению от плоскости симметрии и тогда можно выбрать крайние поверхности тока, образующие вместе с центральной частью замкнутую непрерывную и достаточно гладкую поверхность крыла.

Отметим, что функция  $-\eta'_s(\zeta)$  может частично располагаться выше диагонали и пересекать ее конечное число раз, лишь бы в своей концевой части она была ниже диагонали. В этом случае появляются одна или несколько дополнительных критических точек на крыле в тех сечениях  $\zeta$ , где имеют место эти пересечения. Примером этого может служить следующее решение обратной задачи:

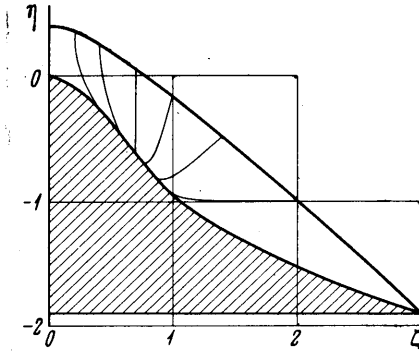
$$\eta'_s = \frac{-a\zeta}{b^2 - \zeta^2}, \quad \psi_w = -\frac{a}{2\zeta} + \left( \frac{a^2}{4\zeta^2} + b^2 \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

Форма поверхности крыла в этом случае определяется численным интегрированием правых частей уравнений (1.9), (1.11). Если параметры удовлетворяют неравенству  $b^2 > a$ , то функция  $-\eta'_s(\zeta)$  при малых значениях  $\zeta$  лежит выше диагонали, затем пересекает ее при  $\zeta = (b^2 - a)^{1/2}$  и дальше всюду ниже этой диагонали. На фиг. 5 показан пример расчета при  $a = 0.5$ ,  $b = 1.0$ . В этом примере имеются три критические поверхности тока — одна в центре и две в сечениях  $\zeta = \pm (b^2 - a)^{1/2}$ .

Приведенные примеры ясно указывают способ построения решения обратных задач весьма широкого класса. Из самого способа построения формы тела следует единственность непрерывного решения обратной задачи при указанных выше ограничениях в форме ударной волны. Построение решений, содержащих особые точки или линии в поле течения, здесь не рассматривается.

4. Установим некоторые общие свойства течений в рамках рассмотренного приближения, полезные при решении обратных и прямых задач обтекания.

а) В случае присоединенного скачка функция тока не может быть переменной на всей поверхности крыла. В самом деле, на поверхности крыла с переменной функцией тока имеем  $w = \zeta$ . Если предположить, что эта поверхность пересекается со скачком в точке  $\zeta^{**}$ , то в этой точке наклон скачка равнялся бы  $-\zeta^{**}$ . Но тогда наклон линий тока за скачком в этой точке обращался бы в бесконечность, что следует из формул (1.3) и (1.4). Это привело бы в свою очередь к бесконечно большому наклону поверхности крыла в этой точке, что противоречит исходным предположениям. Таким образом, между частью поверхности крыла с переменной (распределенной) функцией тока и частью поверхности крыла со скачком уплотнения должна быть некоторая часть поверхности крыла с постоянным значением функции тока. Из этого утверждения, в частности, следует, что при построении непрерывного решения прямой задачи нельзя произвольно задавать форму всей поверхности крыла, а только



Фиг. 5

той его части, где предполагается функция тока переменной, т. е. в диапазоне  $0 < \zeta \leq \zeta^*$ . Тогда, решая уравнение (1.9) относительно  $\eta$ , можно определить форму скачка вплоть до точки  $\zeta^{**}$ . Часть же поверхности крыла между  $\zeta^*$  и  $\zeta^{**}$  определится затем по уравнению (1.11).

б) Кривизна проекций поверхностей тока  $\eta''$  зависит только от координаты  $\zeta$  и одинакова в сечении  $\zeta = \text{const}$  у всех поверхностей тока [2]. Это видно из формулы (1.11). Интересно отметить, что при отрицательной кривизне скачка кривизна поверхностей тока отрицательна в области  $\eta_s' + \zeta > 1$  и положительна в области  $\eta_s' + \zeta < 1$ . Таким образом, при переходе через характерное сечение  $\eta_s' + \zeta = 1$  (аналогичное линии перехода от эллиптической в гиперболическую область течения и названное в работе [2] критическим) кривизна всех линий тока меняет знак.

в) Давление на поверхности крыла между плоскостью симметрии и критическим сечением всегда больше, а на внешней части — всегда меньше, чем давление на скачке уплотнения в соответствующем поперечном сечении. Это можно установить, дифференцируя формулу для давления по функции тока при постоянном  $\zeta$  и сопоставляя знак этой производной с направлением возрастания функции тока в сечении  $\zeta = \text{const}$ , учитывая также предыдущее утверждение о знаке кривизны.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю признательность В. В. Сычеву и В. Я. Нейланду за обсуждение темы и результатов работы, а также В. П. Колгану за помощь в проведении расчетов.

Поступило 29 II 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory, 2-ed. N. Y., Acad. Press, 1966.
3. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
4. Мельник Р., Шейнг Р. Структура сжатого слоя и энтропийные слои в гиперзвуковых конических течениях. В сб. «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
5. Messiter A. F. Lift of slender delta wings according to Newtonian theory. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 4. (Рус. перев.: «Ракетная техника и космонавтика», 1963, № 4).
6. Сычев В. В. О гиперзвуковом обтекании тонких тел при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 4.
7. Hida K. Thickness effect on the force of slender delta wings in hypersonic flow. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 3. (Рус. перев.: «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 3.)