

МЕТОД ИСКРИВЛЕННЫХ ТЕЛ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКИХ ТЕЛ

В. В. ЛУНЕВ

(Москва)

Метод искривленных тел состоит в замене нестационарного обтекания какого-либо тела стационарным обтеканием другого, получаемого из первоначального соответствующим искривлением его формы. Идея метода предложена В. П. Ветчинкиным в 1918 г. и впервые реализована в работе [1]. При этом авторы исходили из предположений, что давление на поверхности тела определяется лишь ее местным углом атаки.

Этот метод, как известно, имеет обоснование лишь для кругового движения тонкого тела с постоянной скоростью в рамках до- или сверхзвуковой линеаризованной теории.

Ниже показано, что метод искривленных тел имеет строгое обоснование для гиперзвукового нестационарного обтекания тонких заостренных тел в рамках закона плоских сечений, который часто используется для исследования нестационарных обтеканий, например [2, 3]. Идея метода заключается здесь в подборе тела такой формы, чтобы при равномерном поступательном движении след его на неподвижной нормально пересекаемой плоскости совпадал по времени со следом исходного тела.

Общая теория изложена для произвольных тел, в частности для тел типа тонких колеблющихся крыльев, но основное внимание уделено движениям жесткого тела вращения. В этом случае в гиперзвуковом приближении (типа [4, 5]) метод распространяется и на тонкие притупленные тела.

В общем случае предлагаемый метод сводит четырехмерную нестационарную задачу к трехмерной стационарной, которая уже не представляет особых трудностей ввиду наличия соответствующих методов и программ (например, [6]). При этом, в отличие от классического варианта метода [1], в общем случае исходному телу в каждый момент времени ставится в соответствие однопараметрическое (с параметром t_0) семейство искривленных тел.

В практически наиболее употребительном случае медленных колебаний поверхности тела, когда нестационарная составляющая решения мала по сравнению со стационарной, используется метод малого параметра, что позволяет представить решение в простой форме с явной линейной зависимостью от параметра t_0 .

Основные обозначения: L — длина тела, τ_0 — характерные относительная толщина тела или угол атаки, ω_0 — характерное число Струхала, r_0 — радиус миделя тупого носка, ρ_∞ , a_∞ — плотность и скорость звука невозмущенной среды, V , M — скорость и число Маха движения центра вращения, или точки x_0 , T_0 — характерное время нестационарных движений (например, период колебаний), $T = L/V$ — время прохождения телом неподвижной плоскости, $\rho_\infty V^2 r$ — давление.

1. Пусть форма поверхности тонкого тела в жестко связанной с ним системе координат x, y, z с началом в его передней точке, с осью x , направленной в основном в противоположную сторону движения тела, имеет вид

$$f(t, x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

Центр вращения тела находится в точке $(x_0, 0, 0)$. Одновременно введем подвижную систему x', y', z' с началом в центре вращения с осью x' , направленной по касательной к траектории движения центра в противоположную сторону его движения. Скорость V этой точки будем считать постоянной.

Взаимное расположение этих систем характеризуется углами α и β между осью x и плоскостями $y' = 0$ и $z' = 0$ и углом γ вращения около оси x , причем при $t = 0$ положим $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$. Положительные

направления углов определяются вращением вокруг осей z' , y' , x' , по часовой стрелке.

И, наконец, введем инерциальную систему координат x'' , y'' , z'' , направление осей которой совпадает с направлением одноименных осей x' , y' , z' при $t = 0$, движущуюся в направлении отрицательных значений x'' со скоростью V с началом при $t = 0$ в точке, совпадающей с проекцией передней точки тела на ось x' .

Взаимное расположение двух последних систем определяется аналогичными углами α' , β' , γ' , равными нулю при $t = 0$.

Предположим далее, что тело несет малые возмущения в поперечное к направлению движения поле скоростей, т. е. выполняется условие

$$\begin{aligned} \tau_0 &\ll 1, & \omega_0 &= \Omega L / V \ll 1 & (1.2) \\ \tau_0 &= \max(n_x, n_t, \alpha, \beta, M^{-1}), & \Omega &= \max(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\alpha}', \dot{\beta}', \dot{\gamma}') \\ n_t &= f_t(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{-1/2}, & n_x &= -f_x(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Здесь точкой помечены производные по времени. Эти условия выполняются для движения тонкого тела с малыми углами атаки и с малыми угловыми скоростями порядка $\Omega \sim \tau_0 / T_0$, так что за характерное время задачи $T = L / V$ приращения всех углов вращения остаются малыми, порядка $\omega_0 \sim \tau_0 T / T_0$.

Тогда с точностью до величин порядка $(\tau_0 + \omega_0)^2$ получим следующие формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= x'' + \alpha_\Sigma y'' - \beta_\Sigma z'' \\ y &= y'' + 1/2 V t \alpha' - \alpha_\Sigma (x'' - x_0) + \gamma_\Sigma z'' \\ z &= z'' - 1/2 V t \beta' + \beta_\Sigma (x'' - x_0) - \gamma_\Sigma y'' \\ x'' &= x - \alpha_\Sigma y + \beta_\Sigma z \\ y'' &= y - 1/2 V t \alpha' + \alpha_\Sigma (x - x_0) - \gamma_\Sigma z \\ z'' &= z + 1/2 V t \beta' - \beta_\Sigma (x - x_0) + \gamma_\Sigma y \\ (\alpha_\Sigma &= \alpha + \alpha', \beta_\Sigma = \beta + \beta', \gamma_\Sigma = \gamma + \gamma') \end{aligned} \quad (1.3)$$

Передняя точка тела в инерциальной системе имеет координаты

$$x_1'' = 0, \quad y_1'' = -\alpha_\Sigma x_0 - 1/2 V t \alpha', \quad z_1'' = \beta_\Sigma x_0 + 1/2 V t \beta' \quad (1.4)$$

а форма тела (1.1) в этой системе примет вид

$$F(t, x'', y'', z'') = f[t, x(x'', y'', z''), y(x'', y'', z''), z(x'', y'', z'')] = 0 \quad (1.5)$$

Заметим, что в формулах (1.3)–(1.5) все углы зависят от времени, так что функция F зависит от t даже если функция f от t не зависит. Поскольку $Vt \sim L$, то члены $1/2 V t \alpha'$ и $1/2 V t \beta'$ в уравнениях (1.3) имеют тот же порядок, что и остальные. Эти члены характеризуют поперечное смещение центра вращения за счет криволинейности траектории.

При условиях (1.2) характерная поперечная скорость газа будет иметь порядок $v_0 \sim (\tau_0 + \omega_0) V$. Пусть теперь скорость движения тела будет гиперзвуковой с числом Маха $M = V / a_\infty \gg 1$. Тогда в соответствии с законом плоских сечений возмущенная продольная скорость

$$u_1 = V - u \sim (\tau_0 + \omega_0)^2 V \ll v_0 \quad (1.6)$$

а течение в неподвижных плоскостях $\xi = x'' - Vt = -Vt_0$, пересекаемых носком тела в моменты времени $t = t_0$, будет совпадать с тем же при нестационарном расширении двумерного поршня по закону

$$F^*(t, y'', z'') = F(t, V(t - t_0), y'', z'') \quad (t \geq t_0) \quad (1.7)$$

Но тот же поршень в соответствии с законом плоских сечений будет эквивалентным для жесткого тела, которое движется поступательно и имеет в инерциальной системе координат форму

$$f^*(x'', y'', z'') = F^*(t_0 + x''/V, y'', z'') = F(t_0 + x''/V, x'', y'', z'') = 0 \quad (1.8)$$

При этом в плоскостях $\xi = -Vt_0$ распределение всех параметров по переменным t, y'', z'' для исходного тела (1.1) или (1.5) и для жесткого так называемого искривленного тела (1.8) будет одинаковым.

Для фиксированного момента времени $t = T = L/V$ распределение параметров течения по длине исходного тела можно получить, рассматривая искривленные тела, соответствующие различным значениям $t_0 = (L - x'')/V$.

Если полученное в результате рассмотрения совокупности искривленных тел решение имеет вид $p^*(t_0, x'', y'', z'')$, то искомое решение для нестационарного движения исходного тела при $t = T$ будет иметь форму

$$p(T, x, y, z) = p^*\left(\frac{L - x''}{V}, x'', y'', z''\right) \quad (1.9)$$

При этом переменные x'', y'', z'' справа следует заменить на x, y, z по формулам (1.3). Здесь p — давление, но тот же вид имеет, естественно, и решение в целом.

Заметим, что отрезок времени $\Delta t = T$ является минимальным, в течение которого необходимо следить за телом для получения его характеристик к концу этого временного отрезка.

Таким образом, метод искривленного тела сводит расчет нестационарного обтекания тела с четырьмя независимыми переменными к совокупности трехмерных стационарных расчетов, число которых, или набор значений t_0 , будет определяться желаемой подробностью в распределении параметров по длине исходного тела. Хотя из каждого такого расчета для нахождения решения в момент $t = T$ используется информация лишь в одном сечении, данные в остальных сечениях не являются лишними и необходимы для определения решения в другие моменты времени.

В дальнейшем ограничимся лишь частным случаем нестационарного движения жестких тел вращения

$$y^2 + z^2 = r^2(x) \quad (y \sim z \sim r^0 \ll r_0 x) \quad (1.10)$$

При этом можно положить $\gamma_0 = 0$ и система (1.3) примет вид

$$x'' = x = x' + x_0 \quad (1.11)$$

$$y = y'' + \frac{1}{2}Vt\alpha' - (x - x_0)\alpha_\Sigma, \quad y'' = y - \frac{1}{2}Vt\alpha' + (x - x_0)\alpha_\Sigma$$

$$z = z'' - \frac{1}{2}Vt\beta' + (x - x_0)\beta_\Sigma, \quad z'' = z + \frac{1}{2}Vt\beta' - (x - x_0)\beta_\Sigma$$

Из (1.11) следует, что искривленное эквивалентное тело получается из

исходного искривлением и поворотом его оси $y = z = 0$ по закону

$$\begin{aligned} y_0'' &= -\frac{1}{2} V t_0 [\alpha' - \alpha'(t_0)] + x(\alpha + \frac{1}{2} \alpha') - x_0 [\alpha_\Sigma - \alpha_\Sigma(t_0)] \\ z_0'' &= +\frac{1}{2} V t_0 [\beta' - \beta'(t_0)] - x(\beta + \frac{1}{2} \beta') + x_0 [\beta_\Sigma - \beta_\Sigma(t_0)] \\ (\alpha &= \alpha(t_0 + x/V) \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Поперечные же сечения сохраняют свою круговую форму, а искривленные тела, эквивалентные исходному, примут вид

$$(y'' - y_0'')^2 + (z'' - z_0'')^2 = r^2 \quad (1.13)$$

В формулах (1.12) передняя точка оси искривленного тела для удобства смещена на ось x'' , что, естественно, не повлияет на характеристики обтекания тела.

Если $p^*(t_0, x'', r, \varphi)$ — решение для искривленных тел в местной полярной системе координат

$$y = y'' - y_0'' = r \cos \varphi, \quad z = z'' - z_0'' = r \sin \varphi \quad (1.14)$$

то в соответствии с (1.9) искомое решение для нестационарного движения исходного тела будет иметь вид

$$p(T, x, r, \varphi) = p^*\left(\frac{L-x}{V}, x, r, \varphi\right) \quad (1.15)$$

Вычисление же суммарных поперечных сил и моментов сводится к простому интегрированию (с соответствующим весом) распределения давления (1.15) по исходному телу, и их здесь выписывать не будем.

В заключение заметим, что в изложенной выше теории поверхность тела может иметь положительный или отрицательный излом образующей с образованием внутренних скачков уплотнения с тем, однако, ограничением, чтобы течение было всюду безотрывным и гиперзвуковым.

2. Рассмотрим нестационарное гиперзвуковое обтекание тонких притупленных тел вращения с малым радиусом миделя носка $r_0 \ll L$.

Плоскость $x = 0$ совместим с переходным сечением между носком и боковой поверхностью. По сравнению с заостренными телами здесь возникают два новых вопроса:

1) влияние нестационарности в окрестности притупления, в которой несправедлив закон плоских сечений и единственная возможность свести исходную задачу к стационарной связана с заменой истинного течения около носка подходящим квазистационарным, чтобы обеспечить одинаковые начальные условия в сечении $x = 0$ для исходного и искривленного тел,

2) влияние пристеночного высокоэнтропийного слоя, состоящего из линий тока, прошедших через сильную отошедшую ударную волну в окрестности носка, в котором оценки (1.6) вместе с законом плоских сечений несправедливы.

Рассмотрим первый вопрос. Движение поверхности носка за счет вращения вокруг центра x_0 состоит из переносной скорости $v_1 \sim \Omega x_0$ начала координат и относительной скорости $v_2 \sim \Omega R \sin \theta$ за счет собственного вращения около начала координат, где θ — угол между нормалью к поверхности носка и ее радиусом-вектором R с центром в точке x_0 .

Относительное влияние собственного вращения носка на его обтекание и на условия в плоскости $x = 0$ имеет порядок

$$v_2 / V \sim (r_0 / L) \omega_0 \sin \theta_m \quad (\omega_0 = \Omega L / V, \theta_m = \max \theta) \quad (2.1)$$

Тот же порядок, естественно, будет иметь и обусловленное этим изменение параметров течения около боковой поверхности. В то же время из

условия $v_0 \sim V(\tau_0 + \omega_0)$ следует, что изменение этих параметров за счет вращения самой боковой поверхности при $\omega_0 \lesssim \tau_0$ должно иметь порядок ω_0 / τ_0 , или $L\omega_0 / r_s$, если не делать исключения для притупленного длинного цилиндра при $\alpha \approx \beta \approx 0$, для которого $v_0 \sim r_s / L + \omega_0$, где $r_s \ll L$ — форма ударной волны. Отсюда вклад скорости v_2 в суммарное влияние вращения тела на течение скло боковой поверхности имеет порядок

$$(r_0 / L) \tau_0 \sin \theta_m \ll 1, \quad \text{или} \quad (r_0 r_s / L^2) \sin \theta_m \ll 1 \quad (2.2)$$

Легко убедиться, полагая давление на боковой поверхности $p \sim (v_0 / V)^2$, что собственное вращение носка и боковой поверхности вызывают соответственно поперечные силы

$$Y_1 \sim (v_2 / V) r_0^2, \quad Y_2 \sim (v_0 / V)^2 (L\omega_0 / r_s) r_0^2 L$$

Так что отношения

$$Y_1 / Y_2 \sim (r_0^3 / L r_s r_0^2) \sin \theta_m \ll 1 \quad (2.3)$$

В наиболее реальном случае $x_0 \sim L$ отношение $v_2 / v_1 \sim (r_0 / L) \sin \theta_m \ll 1$ и влияние вращения носка на его собственные характеристики будет также несущественным.

Заметим, что влияние скорости v_2 будет наибольшим для плоского торца, где $\theta = 1/2\pi$. Для менее тупых тел это влияние будет меньше; например, для сферических сегментов с углом полураствора θ_0 при гладком сопряжении такого носка с боковой поверхностью $\sin \theta_m = \sin \theta_0 \sim \tau_0$. В частности, для притупленного по сфере цилиндра $v_2 = 0$.

Таким образом, влияние вращения носка около начала координат на обтекание достаточно удлиненного тела мало. Учет же влияния носка при вращении тела сводится лишь к учету его поступательной поперечной составляющей скорости v_1 , т. е. к введению эффективных углов атаки и скольжения, равных согласно (1.4)

$$\alpha_1 = \alpha + \alpha' + \frac{1}{V} \left(\frac{dy_1''}{dt} \right) = \alpha' + 1/2 \alpha' - \frac{x_0 \alpha_\Sigma}{V} - 1/2 t \alpha' \quad (2.4)$$

$$\beta_1 = \beta + \beta' - \frac{1}{V} \left(\frac{dz_1''}{dt} \right) = \beta + 1/2 \beta' - \frac{x_0}{V} \beta_\Sigma - 1/2 t \beta'$$

Эти углы при $t = t_0$ совпадают естественно с углами наклона оси (1.12) искривленного тела в точке $x = 0$.

Оценим далее возможность замены обтекания носка с переменной по времени скоростью v_1 квазистационарным с фиксированной v_1 . При гиперзвуковом обтекании тупого тела все возмущения сосредоточены в узком ударном слое толщиной $\delta \sim kr_0$ для гладких тел типа сферы и $\delta \sim k^{1/2} r_0$ для сильно тупых тел типа плоского диска (например, [7]), где $k \ll 1$ — отношение плотностей до и после прямого скачка. Поэтому естественно предположить, что определяющую роль в установлении течения будет играть распространение возмущений по нормали к поверхности носка. Так как скорость звука в этой области $a \sim k^{1/2} V$, то характерное время пробега возмущения будет $T_1 \sim \delta / a \lesssim r_0 / V$. Пусть $T_0 = T / \epsilon$, где пока $\epsilon \lesssim 1$. Тогда очевидно, что отличие нестационарного течения носка от упомянутого квазистационарного будет малым¹, порядка $T_1 / T_0 \sim \epsilon r_0 / L \ll 1$.

Отсюда следует важный вывод, что в сечении $x = 0$ распределение параметров при нестационарном движении исходного тела и при стационарном движении искривленного можно считать одинаковым.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии высокоэнтропийного слоя. Если проследить за течением в тонком неподвижном в пространстве слое $\Delta \xi$, то основной причиной, вызывающей указанные выше отклонения, является

¹ Это тем более справедливо для малых ϵ , рассмотренных в п. 3.

продольное перетекание газа в высокоэнтропийном слое со скоростью $u_1 = V - u$. Для стационарного течения, используя уравнения Бернулли и адиабаты и соотношения на ударной волне, получим при $M \gg 1$

$$u_1 / V = 1 - \sqrt{1 - 2i} \approx i + 1/2 i^2 + \dots \approx 1/2 p^{(\kappa-1)/\kappa} s^{1/\kappa} \sim v_0^{2(\kappa-1)/\kappa} \quad (2.5)$$

Здесь iV^2 — энтальпия газа, а s — квадрат синуса угла наклона ударной волны в точке ее пересечения рассматриваемой линией тока, причем в высокоэнтропийном слое $s \sim 1$. Изменение величины u_1 вдоль траектории частицы имеет порядок

$$\frac{du_1}{dt} = V^2 \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \sim V^2 \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{i}{p} \frac{\partial p}{d\xi} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta u_1}{u_1} \approx \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\Delta p}{p} \frac{VT}{L} \sim \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (2.6)$$

Поскольку в окрестности носка исходное течение также квазистационарно, то из (2.5), (2.6) следует, что возмущенные скорости u_1 для исходного течения и для эквивалентного искривленного тела будут иметь не только одинаковый порядок, но при $(\kappa - 1) / \kappa \ll 1$ и близкие величины для сходственных траекторий частиц¹.

Из (2.5) следует, что при $p \ll 1$ величина u_1 становится малой, но значительно большей, чем в примыкающей к ударной волне низкоэнтропийной области, где $s \ll 1$ и справедлива оценка (1.6). Практически же при малых $(\kappa - 1)$ на поверхности тела обычно имеем $u_1 / V \approx 0.2 \div 0.5$. Поэтому влияние перетекания требует специальных оценок.

Очевидно, что нестационарный и пространственный характер течения не изменит порядок этого влияния, поэтому оценим его для осесимметричного случая. В работе [5] показано, что это влияние на основные характеристики обтекания: распределение давления, форму ударной волны и параметры течения вне высокоэнтропийного слоя — может быть учтено в рамках нестационарной аналогии (по крайней мере для тел с гладкой боковой поверхностью) заменой истинного коэффициента сопротивления носка c_x некоторым эффективным

$$c_x^* = c_x(1 + I) \quad I \approx \frac{1}{c_x V^2} \int_0^{\psi_0} u_1^2 d\psi \quad (2.7)$$

Здесь $\rho_0^2 \rho_\infty V \psi$ функция тока, а ψ_0 соответствует границе высокоэнтропийного слоя. Интеграл I в формуле (2.7) появляется в результате учета кинетической энергии продольного движения газа в слое $\Delta \xi$ и переноса энергии и работы сил давления за счет перетекания газа через него.

Этот интеграл слабо зависит от формы носка [5, 8], поэтому за основу возьмем параболическую форму ударной волны $x = 1/2 r^2$, для которой $s = (1 + \psi)^{-1}$ и

$$I \approx \frac{\kappa}{4(2 + \kappa)} p^{2(\kappa-1)/\kappa} [1 - (1 + \psi_0)^{-(2+\kappa)/\kappa}] < \frac{\kappa}{4(2 + \kappa)} p^{2(\kappa-1)/\kappa} \quad (2.8)$$

Отсюда получим $I \lesssim 0.055 - 0.02$ при $\kappa = 1.1 - 1.67$ и $p \lesssim 0.1$ или $c_x^* \approx c_x$.

Таким образом, влиянием продольного перетекания газа на течения около боковой поверхности можно пренебречь² во всем реальном диапазоне

¹ Например, для воздуха при очень высоких температурах эффективное значение $\kappa = 1.1 \div 1.5$.

² Сильное влияние процессов в высокоэнтропийном слое на обтекание тела в целом и существенное отличие c_x^* и c_x , отмеченное в работе [5], связано с физико-химическими процессами, а не с перетеканием газа.

$\kappa \gtrsim 1.4$, что, как и в рамках нестационарной аналогии, дает основание заменять воздействие боковой поверхности тела воздействием расширяющегося поршня. Отсюда, как и в п. 1, следует эквивалентность нестационарного обтекания исходного тела стационарному обтеканию искривленного тела.

Так как геометрические соображения, использованные при получении его формы в п. 1, остаются без изменений, то эквивалентное притупленное тело образуется из исходного соответствующим поворотом, вместе с носком, и искривлением его оси по формулам (1.12). При этом остаются в силе все выводы п. 1, включая и вид решения полной задачи (1.15).

В заключение заметим, что, поскольку основные условия, начальные в сечении $x = 0$ при $t = t_0$ и граничные в виде формы перемещающегося в элементарном слое сечения тела, будут в сопоставляемых течениях одинаковы, следует ожидать известной близости и в распределении параметров в высокоэнтропийном слое, хотя это утверждение строго и не доказано.

3. Метод искривленного тела существенно упрощается в практически важном случае очень малых угловых скоростей вращения, когда нестационарные возмущения много меньше стационарных. Так как $\Omega \sim \tau_0 / T_0$, то это условие означает

$$\varepsilon = T / T_0 \sim \omega_0 / \tau_0 = (\Omega L / V \tau_0) \ll 1 \quad (3.1)$$

В этом случае движение тела вполне характеризуется мгновенными значениями углов и угловых скоростей при $t = 0$ и с точностью до ε^2 при $t \lesssim T$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t + \dots \quad \alpha' = \dot{\alpha}_0' t + \dots \\ \beta &= \beta_0 + \dot{\beta}_0 t + \dots \quad \beta' = \dot{\beta}_0' t + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставив эти разложения в формулы (1.13) для уравнения искривленного тела, положив $t = t_0 + x / V$, получим

$$[y'' - \alpha_0 x - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 / l]^2 + [z'' + \beta_0 x + \beta_1 x + \beta_2 x^2 / l]^2 = r^{02}(x) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \dot{\alpha}_0 \left(t_0 - \frac{x_0}{V} \right) - \frac{x_0}{V} \dot{\alpha}_0', & \beta_1 &= \dot{\beta}_0 \left(t_0 - \frac{x_0}{V} \right) - \frac{x_0}{V} \dot{\beta}_0' \\ \alpha_2 &= \frac{l}{V} \left(\dot{\alpha}_0 + \frac{1}{2} \dot{\alpha}_0' \right), & \beta_2 &= \frac{l}{V} \left(\dot{\beta}_0 + \frac{1}{2} \dot{\beta}_0' \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь l — какой-либо линейный размер. Уравнение (3.3) представляет собой тело, мало отличающееся от осесимметричного и с точностью до членов порядка ε^2 влияние параметров α_1 , α_2 , β_1 и β_2 можно учитывать независимо, представляя решение в виде

$$\begin{aligned} p^*(t_0, x, r, \varphi) &= p_0(x, r, \varphi) + \alpha_1 p_{\alpha_1}(x, r, \varphi) + \beta_1 p_{\beta_1}(x, r, \varphi) + \\ &+ \alpha_2 p_{\alpha_2}(x, r, \varphi) + \beta_2 p_{\beta_2}(x, r, \varphi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь величина p_0 соответствует стационарному решению при $\varepsilon = 0$, а суммы $p_{\alpha_1} = p_0 + \alpha_1 p_{\alpha_1}$ и т. д. будут соответственно решениями задачи об обтекании тел (3.3) лишь с одним ненулевым значением параметра α_1 и т. д. При этом учет членов с α_1 , β_1 сводится к изменению углов атаки или скольжения исходного тела, а учет α_2 , β_2 — к искривлению его оси по квадратичному закону.

Для решения этих изолированных частных задач не обязательно применять метод линеаризации; при наличии общих методов решения (или

эксперимента) достаточно получить решение при каких-либо достаточно малых фиксированных значениях коэффициентов α_1 и т. д., а затем использовать формулы типа $p_{\alpha_1} = (p_{\alpha_1} - p_0) / \alpha_1$.

Функции p_0 , p_{α_1} и т. д. зависят лишь от углов¹ α_0 , β_0 , не зависят от угловых скоростей и параметра t_0 , которые входят лишь в коэффициенты α_i и β_i в общем решении (3.5). Представим решение в виде $p = p_0 + p_c + p_\omega$, где стационарная составляющая $p_0 + p_c$ соответствует стационарному обтеканию тела с истинной в данный момент времени ориентацией его оси относительно вектора скорости центра вращения, т. е. с углами

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad \beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad (\Delta\alpha = \dot{\alpha}_0 T = \dot{\alpha}_0 L / V, \Delta\beta = \dot{\beta}_0 L / V) \quad (3.6)$$

Тогда, полагая в (3.5) в соответствии с общей теорией п. 1 $t_0 = (L - x) / V$, получим

$$p_c = \Delta\alpha p_\alpha + \Delta\beta p_\beta \quad (p_\alpha = p_{\alpha_1}, p_\beta = p_{\beta_1}) \quad (3.7)$$

Введем безразмерные величины

$$\omega_\alpha = \dot{\alpha}_0 / V, \quad \omega_\beta = \dot{\beta}_0 / V, \quad \omega_{\alpha'} = \dot{\alpha}_0' / V, \quad \omega_{\beta'} = \dot{\beta}_0' / V \quad (3.8)$$

Тогда нестационарную часть решения можно представить в виде

$$p_\omega = \omega_\alpha p_\alpha + \omega_\beta p_\beta + \omega_{\alpha'} p_{\alpha'} + \omega_{\beta'} p_{\beta'} \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{\dot{\alpha}} &= p_{\alpha_2} - \frac{x + x_0}{l} p_{\alpha_1}, & p_{\dot{\beta}} &= p_{\beta_2} - \frac{x + x_0}{l} p_{\beta_1}, \\ p_{\dot{\alpha}'} &= \frac{1}{2} p_{\alpha_2} - \frac{x_0}{l} p_{\alpha_1}, & p_{\dot{\beta}'} &= \frac{1}{2} p_{\beta_2} - \frac{x_0}{l} p_{\beta_1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Исключая из (3.10) величины p_{α_2} и p_{β_2} , получим

$$2p_{\dot{\alpha}'} = p_{\dot{\alpha}} + \frac{x - x_0}{l} p_{\alpha_1}, \quad 2p_{\dot{\beta}'} = p_{\dot{\beta}} + \frac{x - x_0}{l} p_{\beta_1} \quad (3.11)$$

Эти формулы дают общую зависимость между отдельными слагаемыми нестационарной составляющей решения, обусловленные различным характером движения тела, и являются результатом применения лишь закона плоских сечений.

Полученное решение зависит явно от углов $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, а через них и от длины тела L , что вообще говоря неудобно и связано с выбранной формой разложения (3.5). Используя формулы вида

$$p(\alpha_0) = p(\alpha) - \frac{\partial p}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \dots \quad (3.12)$$

с точностью до величин порядка ε^2 , искомому решению можно придать более естественный вид

$$p(t, x, r, \varphi) = p_0(x, r, \varphi) + \omega_\alpha p_{\dot{\alpha}} + \omega_\beta p_{\dot{\beta}} + \omega_{\alpha'} p_{\dot{\alpha}'} + \omega_{\beta'} p_{\dot{\beta}'} \quad (3.13)$$

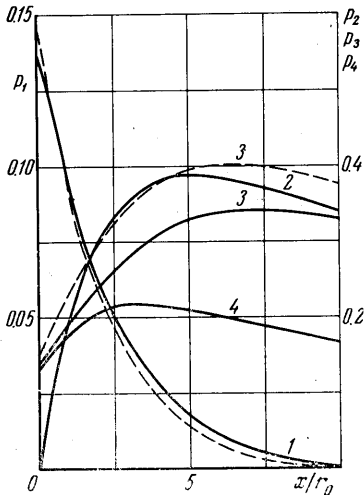
Здесь стационарная составляющая решения p_0 и коэффициенты p_{α_1} , p_{β_1} и т. д. в нестационарной составляющей зависит уже от мгновенных значений углов $\alpha(t)$, $\beta(t)$

¹ Подходящим выбором системы координат можно всегда положить, например, $\beta_0 = 0$.

Очевидно, что формулы для поперечных сил и моментов будут иметь общий вид [9]

$$A = A_0 + \omega_\alpha A_x + \omega_\beta A_\beta + \omega_\alpha A_\alpha + \omega_\beta A_\beta \quad (3.14)$$

где интегралы A_i также зависят лишь от α , β и их выписывать не будем.



В заключение рассмотрим случай очень малых углов атаки $\alpha_0 \leq \Delta\alpha \ll \tau_0$, $\beta_0 \leq \Delta\beta \ll \tau_0$. В этом случае задача будет близкой к осесимметричной и решение можно разложить в ряд по α_0 , β_0 . При этом достаточно рассматривать лишь плоские движения, что сокращает общий объем задачи. В линеаризованной постановке это решение будет иметь вид ряда Фурье с главными членами

$$p_{\alpha 1} = p_1 \cos \varphi, \quad p_{\alpha 2} = p_2 \cos \varphi, \quad p_{\alpha'} = p_3 \cos \varphi, \\ p_{\alpha''} = p_4 \cos \varphi \quad (3.15)$$

Как пример применения метода искривленных тел рассмотрим случай притупленного по сфере цилиндра, обтекаемого при нулевом угле атаки совершенным газом с $\kappa = 1.4$ при $M = 20$. На фигуре показаны величины p_1 , p_2 , p_3 и p_4 (кривые 1—4 соответственно), полученные А. В. Антонцом численным расчетом пространственного обтекания искривленных тел методом сеток, аналогичным методу [6]. Там же (пунктиром) показаны кривые p_1 и p_3 , полученные Ю. М. Липницким для малых гармонических колебаний того же тела путем точного численного решения линеаризованной нестационарной задачи. Как видно, одноименные кривые достаточно близки между собой с вполне удовлетворительной точностью (расхождение в величинах p_1 объясняется лишь взаимной погрешностью численных методов).

Автор благодарит А. В. Антонца и Ю. М. Липницкого за предоставление расчетов и анализ их результатов.

Поступило 15 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуржиенко Г. А. Метод искривленных моделей и применение его к изучению криволинейного полета воздушных кораблей. Тр. ЦАГИ, 1934, вып. 182.
2. Lighthill M. J. Oscillating Airfoils at High Mach number. J. Aeronaut Sci., 1953, vol. 20, N 6. (Рус. перев.: «Механика», Сб. перев. и обз. иностр. период. лит.), 1954, вып. 5 (27).
3. Теленин Г. Ф. Законы подобия при больших сверхзвуковых скоростях. М., Оборонгиз, 1956.
4. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
5. Лунев В. В. Гиперзвуковое обтекание тонких притупленных тел с физико-химическими превращениями газа в высокоэнтропийном слое. ПМТФ, 1964, № 5.
6. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
7. Hayes W. D., Probstein R. E. Hypersonic flow theory. N. Y., London, Acad. Press, 1959. (Рус. перев.: Хейс У. Д., Пробштейн Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962).
8. Лунев В. В. О форме головной ударной волны при гиперзвуковом обтекании тупых тел. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
9. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1956, № 7.