НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ РЕШЕТКИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ С УГЛОМ ВЫНОСА

В. П. ВАХОМЧИК, Г. Ю. СТЕПАНОВ

(*Москва*)

Неустановившемуся обтеканию решетки тонких профилей с произвольным углом выноса $\beta \neq 0$ плоским потоком несжимаемой невязкой жидкости посвящено много работ. Так, например, в частном случае движения решетки с выносом β при нулевом сдвиге фаз колебаний $\alpha = 0$ М. Д. Хаскинд [1] теоретически определяет нестационарную подъемную силу путем выделения особенностей по методу Л. И. Седова [2], применяя конформное отображение на решетку пластин без выноса. Суммарные нестационарные аэродинамические характеристики решетки в частном случае $\alpha = 0$ и при любом β на ЭВМ методом дискретных вихрей рассчитали С. М. Белоцерковский и др. [3], а в более общем случае ($\alpha \neq 0$) вихревым методом — Уайтхед [4]. Д. Н. Горелов и П. В. Доминас [5] вычислили коэффициенты суммарной нестационарной силы и момента профиля в решетке с выносом $\beta \neq 0$ и сдвигом фаз $\alpha \neq 0$.

Метод расчета основан на нестационарной теории тонкого изолированного профиля, обтекание которого известно, с последующим учетом интерференции профилей и вихревых следов за ними.

В предлагаемой работе метод выделения особенностей [2] распространяется на решетку тонких профилей с произвольным углом выноса $\beta \neq 0$ и сдвигом фаз колебаний между соседними профилями $\alpha \neq 0$. Показано, что решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно суммы касательных составляющих скоростей вдоль профиля. Выяснено, что относительное влияние нестационарности течения, обусловленное системой вихревых следов за решеткой с выносом β можно определить, не зная решения этого интегрального уравнения. Однако это решение необходимо найти для вычисления присоединенных масс решетки и полных величин нестационарых сил. Установлено, что путем регуляризации интегральное уравнение первого рода приводится к интегральному уравнению второго рода, методы решения которого известны.

Таким образом, выражения для нестационарных сил определяются в виде отдельных слагаемых, каждое из которых имеет физический смысл: в результате получаются конечные формулы (несобственные интегралы) для вычисления переменных сил; из этих формул выводятся асимптотические выражения для сил в предельных случаях больших и малых густот и чисел Струхаля, которые, как правило, ускользают при численных расчетах. Предлагаемый метод можно рассматривать как один из способов улучшения сходимости численных методов (устранение особенностей). Кроме того, этим методом удается решить задачи неустановившегося обтекания решеток из произвольных систем тонких профилей при различных углах наклона их к оси x и наличии на них конечной кавитационной зоны.

Недостаточное практическое распространение этого метода объясняется большими теоретическими трудностями в его приложениях к решеткам с углом выноса. В данной работе эти затруднения рассматриваются на примере решетки с углом выноса β.

Метод выделения особенностей в задачах неустановившегося обтекания решетки тонких профилей без угла выноса $\beta = 0$ (угол выноса β отсчитывается в положительном направлении от фронта решетки до нормали к хорде профиля) заключается в том [2], что вместо сопряженной скорости $\bar{v}(z) = u - iv$ берется функция

$$f(z) = \bar{v}(z) g_0(z) \tag{1}$$

не имеющая особенностей. В равенстве (1) $z = x + iy$ — комплексная координата в физической плоскости течения, $q = \pi / t$ — относительный шаг решетки.

Функция $g_0(z, q) \equiv g_0(z)$ произведения (1) содержит все особенности течения в физической плоскости, имеет период, равный шагу решетки t, и на верхней и нижней границах всех профилей принимает противоположные по знаку чисто мнимые значения.

В частном случае решетки без выноса ($\beta = 0$) в работах [6, 7] составлено интегральное уравнение с использованием такой функции и дано его аналитическое решение при гармонических колебаниях профилей. Чтобы изучить обтекание решетки тонких профилей с произвольным углом выноса $\beta \neq 0$ в работе [8] была введена функция

$$g(z) = \left(\frac{\operatorname{sh} q_1(z - b_1)}{\operatorname{sh} q_1(z - b_2)}\right)^{1/2} \tag{2}$$

Здесь

$$q_1 = (\pi / t)e^{i\beta} = qe^{i\beta}, \qquad b_1 = b + nt\sin\beta, \qquad b_2 = -b + nt\sin\beta$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При вычислениях берется для основного профиля $n = 0$; $b, - b$ — координаты соответственно входной и выходной кромок основного профиля, расположенного вдоль оси x. Функция $g(z)$ периодична с периодом $ite^{-i\beta}$, содержит, как и функция $g_0(z)$, все особенности в физической плоскости течения — нули в точках $z = b_1$ и полюсы в точках $z = b_2$. Однако полученные в работах [8–10] [1] конечные выражения комплексной скорости обтекания решетки тонких профилей справедливы только для малых углов выноса с точностью до членов порядка $o(\beta^2)$ или для редких решеток [2]. Чтобы убедиться в этом, обозначим $z - b_1 \equiv z_1$, $z - b_2 \equiv z_2$. Тогда функция (2) после алгебраических преобразований запишется так:

$$g(z) \equiv h(z, \beta) k(z, \beta) \left[\frac{1 + ir_1(z, \beta)}{1 + ir_2(z, \beta)}\right]^{1/2} \tag{3}$$

В этом равенстве

$$r_k(z, \beta) \equiv \operatorname{cth}(qz_k\cos\beta)\operatorname{tg}(z_k q\sin\beta) \qquad (k = 1, 2)$$

$$h(z, \beta) \equiv \left(\frac{\operatorname{sh}(qz_1\cos\beta)}{\operatorname{sh}(qz_2\cos\beta)}\right)^{1/2}, \qquad K(z, \beta) \equiv \left(\frac{\cos(z_1 q\sin\beta)}{\cos(z_2 q\sin\beta)}\right)^{1/2}$$

Очевидно, что при малых $\beta \to 0$

$$\operatorname{tg}(z_k q\sin\beta) \to z_k qb, \qquad k(z, \beta) \to 1$$
$$h(z, \beta) \to h(z, 0) \equiv g_0(z)$$

Поэтому функция $g(z)$ приводится к виду

$$g(z) = g_0(z)\,[1 + iz_1 q\beta\operatorname{cth} qz_1]^{1/2} \cdot [1 + iz_2 q\beta\operatorname{cth} qz_2]^{-(1/2)} \tag{4}$$

---

[1] В работе [9] по недосмотру автора после дифференцирования интеграла (4.4) по переменному верхнему пределу (по $\varepsilon_1(\tau)$) пропущено слагаемое вида

$$U\Pi(\varepsilon - \varepsilon_1 - b, q)_{\varepsilon = \varepsilon_1} = -U\Pi(-b, q)$$

[2] На несправедливость развитой ранее теории при произвольных углах выноса решетки ($\beta \neq 0$) указал Г. С. Самойлович.

Чтобы продолжить дальше разложение функции (4) в квадратных скобках при малом $\beta \to 0$, проверим, что произведение

$$f_k(z) \equiv z_k \operatorname{cth} qz_k \qquad (k = 1, 2)$$

ограничено на отрезке $|x| \leqslant b$.

Действительно, если $z \neq b$, функция $f_1(z)$ — аналитическая функция. При $z \to b$ функция $f_1(z) \to (1 / q)$. Следовательно, для значений густот $g \neq \infty$ функция $f_1(z)$ ограничена и не имеет особенностей в физической плоскости течения. Таким же свойством обладает и функция $f_2(z) \equiv z_2 \operatorname{cth} qz_2$. Разлагая отношение корней функции (4) в ряд по β $(\beta \to 0)$, получим

$$g(z) = g_0(z) + g_0(z) \left[\frac{iz_1 q \operatorname{cth} qz_1}{2} - \frac{iz_2 q \operatorname{cth} qz_2}{2}\right] \beta + o(\beta^2) \tag{5}$$

Последующие члены этого разложения будут содержать лишь степени функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Таким образом, при малых значениях угла выноса из выражения (5) находим

$$g(z) = g_0(z) + r(z)\beta + o(\beta^2) \tag{6}$$

$$r(z) \equiv g_0(z)\frac{iq}{2}[(z - b_1)\operatorname{cth} q(z - b_1) - (z - b_2)\operatorname{cth} q(z - b_2)]$$

Функция $g_0(z)$ вдоль границ отрезка $z = \pm i0$, $b_2 < x < b_1$ принимает чисто мнимые, а функция $r(z)$ — действительные, противоположные по знаку значения.

Покажем, как преодолеть отмеченное выше ограничение, базируясь на функции $g(z)$, определяемой по формуле (2). Предположим, что система координат жестко связана с серединой основного профиля и положительное направление оси x совпадает с направлением равномерного поступательного движения решетки в неподвижной жидкости со скоростью U.

Проведем прямолинейный разрез от конечной точки вихревого следа, например, $z = b_0$ до входной кромки профиля $z = b$. Наряду с подвижной системой координат $0xy$ будем рассматривать также неподвижную систему координат $0_1\varepsilon y$ с центром в некоторой точке 0_1 вне следа. Координаты обеих систем связаны равенством $\xi = \varepsilon - \varepsilon_1 - b$. В этом равенстве ξ — переменная координата точки оси x вдоль следа, $\varepsilon_1(\tau) = \varepsilon_0 + U\tau$ — координата выходной кромки движущегося профиля решетки, $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$ — координата конечной точки вихревого следа. Выберем ветви функции $g(z)$ так, чтобы при подходе к разрезу $(-b, b)$ сверху $y = +0$ и $z = x$ было

$$g_1(x) \equiv \left(\frac{\operatorname{sh} q_1(x - b)}{\operatorname{sh} q_1(x + b)}\right)^{1/2} = c + id \tag{7}$$

а при подходе к разрезу снизу $(y \to -0)$

$$g_2(x) \equiv \left(\frac{\operatorname{sh} q_1(x - b)}{\operatorname{sh} q_1(x + b)}\right)^{1/2} = -(c + id) \tag{8}$$

Функция

$$c = c(x) = \operatorname{Re}\,[g_1(x)] = -\operatorname{Re} g_2(x), \qquad d = d(x) = \operatorname{Im}\,[g_1(x)] = -\operatorname{Im} g_2$$

Если угол выноса решетки $\beta = 0$, то $d(x) \equiv 0$

$$g_1(x) = c(x), \qquad g_2(x) = -c(x) \tag{9}$$

Следуя методу выделения особенностей, представим произведение комплексной скорости $\bar{v}(z) = u - iv$ и функция $g(z)$ интегралом Коши. Записывая этот интеграл по контуру разреза вдоль профиля и следа $(n = 0)$, получаем

$$g(z)\bar{v}(z) = \frac{q_1}{2\pi i}\left[\int_{-b}^{b} g_1(u_1 - iv_1)\Phi_1(\xi - z)\,d\xi - \right.$$

$$- \int_{-b}^{b} g_2(u_2 - iv_2)\Phi_2(\xi - z)\,d\xi + \int_{b_0}^{-b} g_1(u_1 - iv_1)\Phi_1(\xi - z)\,d\xi -$$

$$\left. - \int_{b_0}^{-b} g_2(u_2 - iv_2)\Phi_2(\xi - z)\,d\xi\right] \qquad (10)$$

Индексом 1 обозначены предельные значения функций на верхнем береге разреза при подходе к нему сверху $(y \to +0)$, индексом 2 — при подходе к нижнему берегу разреза $(y \to -0)$. Функция

$$\Phi(z) \equiv \operatorname{csch}(q_1 z)\left[\operatorname{ch}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)q_1 z - ij\operatorname{sh}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)q_1 z\right] \qquad (11)$$

при постоянном сдвиге фаз колебаний α учитывает влияние всех остальных профилей на основной $(n = 0)$. При $\beta = 0$ функция $\Phi(z)$ известна [11]. Так как вдоль действительной оси $z = 0$, $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = \Phi$ на профиле $g_1 = -g_2$, вдоль следа $g_1 \equiv g_2$, то выражение (10) преобразуется к виду

$$g(z)\bar{v}(z) = \frac{q_1}{2\pi i}\left[\int_{-b}^{b} g_1(\xi)\Phi(\xi - z)[u_1 + u_2 - i(v_1 + v_2)]\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{b_0}^{-b} g_1(\xi)\Phi(\xi - z)[u_1 - u_2 - i(v_1 - v_2)]\,d\xi\right] \qquad (12)$$

на бесконечно тонком профиле (дужке) $(-b, b)$ $v_1 = v_2 = v_n$[1] известная функция (τ — время); на вихревом следе всегда $v_1 = v_2$.

Введем функцию $\sigma(\xi, \tau) = u_1 + u_2$, представляющую собой некоторую дополнительную завихренность на профиле, и обозначим завихренность в следе $\gamma(\varepsilon) = u_2 - u_1$. Тогда можно записать

$$\bar{v}(z) = \frac{q_1}{2\pi i g(z)}\left[\int_{-b}^{b} g_1(\xi)\Phi(\xi - z)[\sigma(\xi, \tau) - 2iv_n(\xi, \tau)]\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \gamma(\varepsilon) g_1(\xi)\Phi(\xi - z)\,d\varepsilon\right] \qquad (13)$$

В случае решеток профилей без выноса $(\beta = 0,\ \sigma = 0)$, но колеблющихся с произвольным сдвигом фаз колебаний α между соседними профилями, выражение для скорости (13) известно [11, 12].

Итак, в случае неустановившегося обтекания решетки профилей с произвольным углом выноса $\beta \neq 0$ под знаком первого интеграла появляется дополнительное слагаемое с множителем $\sigma(\xi, \tau)$, возникающее из-за раз-

---

[1] Как и в случае изолированного профиля малой, но конечной толщины, составляющие скорости v_1 и v_2 могут быть и не равными друг другу, что не вносит принципиальных усложнений.

личных по модулю касательных составляющих скоростей вдоль профиля. Если угол выноса $\beta = 0$, то $\sigma = u_1 + u_2$, так как в этом случае $u_2 = -u_1$, $\gamma(\varepsilon) = -2u_1(\varepsilon)$, в равенстве (9) $c(x) = ig_0$ и выражение (13) совпадает с соответствующим выражением комплексной скорости для решетки без выноса. Появление различных по абсолютной величине касательных составляющих скоростей сверху и снизу вдоль профиля решетки объясняется несимметрией течения относительно оси x через решетку с выносом.

Аналогичные поправочные слагаемые под знаком первого интеграла в выражениях комплексной скорости необходимо добавить и в работе [9].

Комплексная скорость течения разлагается в ряд

$$\bar{v}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\Phi(z) - iB_1\frac{d\Phi(z)}{dz} + iB_2\frac{d_2\Phi}{dz^2} + \ldots \tag{14}$$

совпадающий при $\beta = 0$ с разложением Г. С. Самойловича [11]. Внося функцию $g(z)$ под знак интеграла (13) и разлагая произведение $\Phi(\xi - z) / g(z)$ в ряд вида (14), находим

$$\Gamma = \int_{-b}^{b}(\sigma - 2iv_n)g_1(\xi)a_{0\alpha}(\xi)d\xi - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1}\gamma(\varepsilon)g_1b_{0\alpha}(\xi)d\varepsilon$$

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-b}^{b}(\sigma - 2iv_n)g_1a_{1\alpha}d\xi - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1}\gamma(\varepsilon)g_1(\xi)b_{1\alpha}(\xi)d\varepsilon\right] \tag{15}$$

$$B_2 = -\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-b}^{b}(\sigma - 2iv_n)g_1a_{2\alpha}d\xi - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1}\gamma(\varepsilon)g_1b_{2\alpha}(\xi)d\varepsilon\right]$$

Способ определения коэффициентов $a_{k\alpha} = a_{k\alpha}(\xi)$, $b_{k\alpha}(\xi)$ $(k = 0, 1, 2)$ для решетки с выносом указан в работе [10]; там же приведены общие выражения для силы и момента через коэффициенты Γ, B_1, B_2.

Обратимся теперь к выражению для первого коэффициента Г. Величина Г в первой формуле (15) представляет собой циркуляцию скорости по контуру L_0, охватывающему основной профиль и след за ним, и по этой причине с течением времени не изменяется.

Функция $\sigma(\xi, \tau)$, входящая в выражение комплексной скорости, неизвестна и подлежит определению.

Покажем, что она удовлетворяет линейному интегральному уравнению. С этой целью следует воспользоваться тем, что $\operatorname{Im}\bar{v}(z) = v_n$ известна на контуре профиля.

Записывая выражения скорости $\bar{v}(z)$ (13) на контуре профиля и разделяя действительную и мнимую части, находим

$$v_n(x, \tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-b}^{b}[R_1\sigma + 2R_2v_n]d\xi - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1}\gamma(\varepsilon)R_1(\xi, x)d\varepsilon\right] \tag{16}$$

где приняты обозначения

$$R_1 = R_1(\xi, x) \equiv H_1h_1 - H_2h_2, \qquad R_2(\xi, x) = H_2h_1 + H_1h_2$$

$$g_1(\xi)\Phi(\xi - x) = H_1 + iH_2, \qquad [g(x)]^{-1} = h_1(x) + ih_2(x)$$

Перенесем неизвестные функции в левую часть равенства, а известные в правую.

В результате получим

$$\int_{-b}^{b} \sigma(\xi,\tau) R_1(\xi,x)\,d\xi - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \gamma(\varepsilon) R_1(\xi,x)\,d\varepsilon =$$

$$= 2\pi v_n(x,\tau) - \int_{-b}^{b} v_n(\xi,\tau) R_2(\xi,x) \equiv R[v_n(x)] \tag{17}$$

Поскольку функция $v_n(x,\tau)$ задана, функция $R[v_n]$ в правой части уравнения (17) известна. Однако одно уравнение (17) содержит две неизвестные функции $\sigma(x)$ и $\gamma(x)$. Следовательно, для замыкания задачи требуется еще одно дополнительное соотношение. Такое соотношение дает закон сохранения вихрей, который в математической форме совпадает с первым из равенств (15). Запишем его здесь в виде

$$\Gamma(\tau) = \int_{-b}^{b} (\sigma - 2iv_n) g_1(\xi) a_{0\alpha}(\xi)\,d\xi + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \gamma(\varepsilon) g_1 b_{0\alpha}(\xi)\,d\varepsilon = \mathrm{const} \tag{18}$$

В начальный момент движения ($\tau = 0$), когда вихревых следов еще нет, $\gamma(\varepsilon) = 0$ и выражение (18) определяет начальную циркуляцию скорости вокруг профиля

$$\Gamma_0 = \int_{-b}^{b} [\sigma_0(\xi) - 2iv_{n0}(\xi)]\, g_1(\xi) a_{0\alpha}(\xi)\,d\xi \tag{19}$$

В частности, если движение начинается из состояния покоя, $\Gamma_0 = 0$.

Функция $\sigma_0(\xi)$ находится из решения стационарной задачи [2, 13]; v_{n0} — значение скорости $v_n(\xi,\tau)$ при $\tau = 0$. Учитывая (19), перепишем соотношение (18) в виде уравнения

$$\Gamma_0 = \int_{-b}^{b} [\sigma(\xi) - 2iv_{n0}(\xi)]\, g_1 a_{0\alpha}\,d\xi + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \gamma(\varepsilon) g_1 b_{0\alpha}\,d\varepsilon \tag{20}$$

Таким образом, задача о нахождении неизвестных функций $\sigma(\xi)$, $\gamma(\varepsilon)$ сводится к решению системы двух линейных интегральных уравнений (17) и (20).

Обозначим через $\Gamma(\varepsilon)$ циркуляцию скорости по контуру, охватывающему основной профиль и пересекающий линию разрыва (вихревой след) в точке ε. Тогда, по определению,

$$\frac{d\Gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = u_1 - u_2 = -\gamma(\varepsilon) \tag{21}$$

Путем интегрирования из равенства (21) находим разность циркуляций вокруг профиля в рассматриваемый момент времени $\Gamma(\varepsilon_1)$ и следа $\Gamma(\varepsilon_0) \equiv \Gamma_0$

$$\Gamma(\varepsilon_1) - \Gamma(\varepsilon_0) \equiv \Gamma_1 - \Gamma_0 = -\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \gamma(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{22}$$

При гармонических колебаниях положим

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 = B(k, q_1)\, e^{jk\varepsilon_1/b} \tag{23}$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + U\tau$; $B(k, q_1)$ — неизвестная комплексная (по мнимой единице j) амплитуда циркуляции скорости вокруг профиля; $k = \omega\bar{b} / U$—

число Струхаля, определяемое по круговой частоте колебаний ω и полухорде профиля b.

На основании выражения (21) для $\Gamma(\varepsilon)$ имеем

$$\gamma(\varepsilon)=-\frac{d\Gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon}=-j\frac{k}{b}B(k,q_1)\exp\frac{jk\varepsilon_1}{b} \tag{24}$$

или в безразмерном виде

$$\gamma(\varepsilon)\equiv\gamma[b(1-s)+\varepsilon_1]=-j\frac{k}{b}B(k,q_1)e^{jk}\,e^{-jks}\,e^{jk\varepsilon_1/b}$$
$$\left(s=1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{b}\right) \tag{25}$$

Подставляя в выражение (20) коэффициент $b_{0\alpha}=b_{0\alpha}^{(0)}-1/g_1$ и используя равенства (22) и (24), после простых преобразований получим выражение для комплексной амплитуды

$$B(k,q_1)=\frac{L(q_1)}{Q(k,q_1)}$$

$$L(q_1)\equiv\int\limits_{-b}^{b}[(v_{n0}-v_n)2i+(\sigma-\sigma_0)]g_1a_{0\alpha}\,d\xi\equiv \tag{26}$$

$$\equiv 2i\int\limits_{-b}^{b}[(v_{n0}-v_n)g_1a_{0\alpha}]\,d\xi_1+\int\limits_{-b}^{b}(\sigma-\sigma_0)g_1a_{0\alpha}\,d\xi$$

$$Q(k,q_1)=j\frac{k}{b}e^{jk}\int\limits_{s_1}^{1}e^{-jks}g_1(s)\,b_{0\alpha}^{(0)}\,ds+1$$

Метод определения коэффициентов $a_{0\alpha}=a_{0\alpha}(\xi)$ и $b_{0\alpha}^{(0)}(\xi)$ изложен в работе [10]. Перейдем во втором слагаемом уравнения (17) также к переменной s (определяемой (25)), получим

$$\int\limits_{-b}^{b}R_1(\xi,x)\,\sigma(\xi)\,d\xi+b\int\limits_{s_1}^{1}\gamma[b(1-s)+\varepsilon_1]R_1\,ds=R[v_n(x)] \tag{27}$$

Прибавляя к обеим частям соотношения (27) слагаемое

$$-\int\limits_{-b}^{b}\sigma_0(\xi)R_1(\xi,x)\,d\xi$$

имеем

$$\int\limits_{-b}^{b}(\sigma-\sigma_0)R_1(\xi,x)\,d\xi+b\int\limits_{s_1}^{1}\gamma[b(1-s)+\varepsilon_1]R_1(s,x)\,dx=$$

$$=R[v_n(x)]-\int\limits_{-b}^{b}\sigma_0(\xi)R_1(\xi,x)\,d\xi\equiv P(x) \tag{28}$$

Исключая $\gamma[b(1-s)+\varepsilon_1]$, в соотношении (28) с помощью формул (25) и (26) получим интегральное уравнение относительно функции $\sigma_1(\xi)$.

Это интегральное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\int_{-b}^{b} \sigma_1(\xi) R_1(\xi, x) d\xi \equiv \frac{jk\, e^{jk} S(k, q_1) L(q_1)}{Q(k, q_1)} + P(x) \tag{29}$$

$$S(k, q_1) \equiv \int_{s_1}^{1} e^{-jks} R_1(s, x) ds, \qquad Q(k, q_1) = j \frac{k}{b} e^{jk} S_1(k, q_1) + 1$$

$$S_1(k, q_1) \equiv \int_{s_1}^{1} e^{-jks} g_1(s) b_{0\alpha}^{(0)} s ds, \qquad \sigma - \sigma_0 \equiv \sigma_1(\xi) \exp \frac{jk\varepsilon_1}{b}$$

Обозначим

$$T(k, q_1) \equiv \frac{S(k, q_1)}{Q(k, q_1)}$$

Учитывая принятые обозначения, интегральное уравнение (29) перепишем в такой форме

$$\int_{-b}^{b} \sigma_1(\xi) R_1(\xi, x) dx - jke^{jk} T(k, q_1) \int_{-b}^{b} \sigma_1(\xi) g_1 a_{0\alpha} d\xi =$$

$$= -2ijT(k, q_1) ke^{jk} \int_{-b}^{b} v(\xi) g_1(\xi) a_{0\alpha} d\xi + P(x) \tag{30}$$

В этом уравнении остались амплитудные значения функций, а одинаковый множитель $\exp(jk\varepsilon_1)$ слева и справа уравнения (30) сокращается. Функция $P(x)$ находится из соотношения (28). Так как интеграл

$$F(q_1) \equiv \int_{-b}^{b} v(\xi) g_1(\xi) a_{0\alpha}(\xi) d\xi$$

известная функция, уравнение (30) можно представить в канонической форме интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-b}^{b} \sigma_1(\xi) K(\xi, x) d\xi = f(x) \tag{31}$$

Здесь

$$K(\xi, x) \equiv R_1(\xi, x) - jke^{jk} T(k, q_1) g_1 a_{0\alpha}(\xi)$$

$$f(x) = P(x) - 2ijke^{jk} T(k, q_1) F(q_1)$$

$$R_1(\xi, x) \equiv [\Phi_r(\xi - x) c(\xi) - \Phi_i(\xi - x) d(\xi)] h_1 -$$

$$- [\Phi_i(\xi - x) c(\xi) + \Phi_r(\xi - x) d(\xi)] h_2(x)$$

Отметим, что функции $c(\xi)$ и $d(\xi)$ выражаются через функции $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ и вычисляются по формулам (7) и (8).

Ядро уравнения зависит от числа Струхаля, густоты решетки и координат профиля. Особенности ядра определяются особенностями функции

$\Phi(\xi - x)$ и $c(\xi)$. В точке $x = \xi$ берется главное значение интеграла от этой функции по Коши. Комбинация других функций дает интегрируемые особенности на концах отрезка $(-b, b)$.

В частном случае установившегося обтекания решетки профилей с выносом $\beta \neq 0$ функция $k(\xi, x) \equiv R_1(\xi, x)$, $f \equiv R$ и интегральное уравнение принимает более простой вид

$$\int_{-b}^{b} \sigma(\xi)_1 R_1(\xi, x)\, d\xi = P(x)$$

Неизвестная функция $\sigma_1(x)$ не имеет особенностей на профиле, и исчезает при $\beta = 0$. Поэтому уравнение (31) можно решать методом разложения в ряд. Однако более целесообразно применить к нему метод регуляризации Карлемана — Векуа [14].

Для этого выделим регулярную часть уравнения (31), представляя его в следующем виде:

$$\int_{-b}^{b} \sigma_1(\xi) \left[K(\xi, x) - \frac{K(x, x)}{\xi - x}\right] d\xi + K(x, x) \int_{-b}^{b} \frac{\sigma_1(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = f(x)$$

Перенесем регулярную часть особого уравнения в правую часть, тогда

$$K(x, x) \int_{-b}^{b} \frac{\sigma_1(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = f(x) - \int_{-b} \sigma_1(\xi) K_1(\xi, x)\, d\xi \tag{32}$$

Здесь

$$K_1(\xi, x) = K(\xi, x) - K(x, x) \,/\, (\xi - x);$$

интегральное уравнение (31) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\sigma_1(\xi) + \int_{-b}^{b} K_2(x, \xi)\, \sigma_1(\xi)\, d\xi = f_1(x) \tag{33}$$

с индексом $\varkappa = -1 < 0$.

Ядро этого интегрального уравнения

$$K_2(x, \xi) \equiv \frac{Z(x)}{\pi^2} \int_{-b}^{b} \frac{K_1(\xi_1, \xi)\, d\xi_1}{(\xi_1 - x) K(x, x) Z(\xi_1)}$$

$$f_1(x) \equiv \frac{Z(x)}{\pi^2} \int_{-b}^{b} \frac{f(\xi)\, d\xi}{K(x, x) Z(\xi)\, (\xi - x)}$$

$$Z(x) = -(b - x)^{1/2} (b + x)^{-(1/2)}$$

Полученное интегральное уравнение (33) можно решать численно, или путем последовательных приближений, заменяя его соответствующей квадратурной формулой. Существование же решения следует из физического смысла задачи и математически может быть доказано на основании известных теорем при определенных ограничениях, накладываемых на ядро интегрального уравнения [14].

Отметим, что нестационарную часть подъемной силы и момента, обусловленных только вихревыми следами, можно оценить и не зная функции $\sigma_1(\xi)$. Действительно, используя коэффициенты ряда (15) и общие формулы [10], можно показать, что нестационарная составляющая силы, обусловленная вихревыми следами, равна

$$Y = -2\rho U \int\limits_{s_1}^{1} \gamma[b(1-s)+\varepsilon_1]\Psi(s,q,\beta)ds =$$

$$= -2\rho UjkB(k,q_1)e^{jk}e^{jk\varepsilon_1}\int\limits_{s_1}^{1} e^{-jks}\Psi(s,q,\beta)ds \tag{34}$$

Комплексная амплитуда $B(k, q_1)$ пропорциональна (см. (26)) интегралу $L(q_1)$, под знаком которого содержится неизвестная функция $\sigma_1(\xi)$. Остальные сомножители в (34) не зависят от функции σ_1.

Функция $\Psi = \Psi(s, q, \beta)$ — известная функция [10]. Если теперь отнести силу Y к величине $\rho UL(q_1)e^{jk\varepsilon_1}$, получим

$$Y^0 = -2\frac{jke^{jk}}{Q(k,q_1)}\int\limits_{s_1}^{1} e^{-jks}\Psi(s,q,\beta)ds$$

Относительная величина силы Y^0 уже не зависит от функции $\sigma_1(\xi)$.

Итак, функция $\sigma_1(\xi)$ необходима для определения суммарной нестационарной подъемной силы и момента или присоединенных масс решетки. Относительная величина нестационарности, связанная с системой вихревых следов за решеткой и определенная в квадратурах согласно развитой ранее теории [9, 10], не зависит от функции $\sigma_1(\xi)$.

Поступило 4 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Колебания решетки тонких профилей в несжимаемом потоке. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2-е. М., «Наука», 1966.
3. Белоцерковский С. М., Гиневский А. С., Полонский Д. Е. Аэродинамические силы, действующие на решетку профилей при нестационарном обтекании. В сб.: Промышленная аэродинамика, вып. 20. М., Оборонгиз, 1961.
4. Whitehead D. S. Force and moment coefficients in cascade. A.R.S., R. and M., 1962, No. 3254.
5. Горелов Д. Н., Доминас П. В. Расчет аэродинамических сил и моментов, действующих на решетку пластин, колеблющихся в плоском потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, 1965, т. 3.
6. Сиразетдинов Т. К. К обтеканию колеблющихся решеток. Тр. Казанск. авиационн. ин-та, 1958, т. 38.
7. Вахомчик В. П. Аналитическое решение интегрального уравнения колебаний тонких профилей в решетке. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3.
8. Вахомчик В. П. Об определении нестационарных сил в решетке профилей. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 1.
9. Вахомчик В. П. О неустановившемся движении решетки бипланов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
10. Вахомчик В. П. Общие выражения нестационарных сил в решетке профилей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
11. Самойлович Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз. ПММ, 1962, т. 26, № 1.
12. Самойлович Г. С. Изгибно-крутильный флаттер лопаток в густой аэродинамической решетке. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1962, № 6.
13. Fanti R. A., Kemp N. H., Nilson E. N. A theory of thin airfoils, isolated and in cascade, yieldingfinite pressures at smooth leading edges. J. Aero Spase. Sci., 1958, vol. 25, No. 7.
14. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.