

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ, ВИБРИРУЮЩИХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СДВИГОМ ФАЗ, ПЛОСКИМ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

З. Б. КАЗИМИРСКИ, В. В. НИТУСОВ, Г. С. САМОЙЛОВИЧ

(Москва)

Рассматривается задача о колебании решетки произвольных профилей с произвольным сдвигом фаз. При этом учитывается влияние вихревых следов. Амплитуда колебаний предполагается малой. Задача сводится к системе двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода, решаемых на ЭЦВМ. Рассмотрен пример расчета решетки произвольной формы.

Неустановившемуся обтеканию решетки профилей посвящено большое количество работ.

Большинство авторов либо решают задачу для тонких и слабо изогнутых профилей, либо рассматривают обтекание решеток из тонких криволинейных профилей [1].

В работе [2] исследовано обтекание решетки профилей произвольной формы, колеблющихся с произвольным сдвигом фазы в квазистационарной постановке. Результаты доведены до числовых значений. В работах [3-5] имеются другие подходы к решению задачи о неустановившемся обтекании решетки телесных профилей (отсутствие числовых расчетов в [3, 4] не дает возможности судить об эффективности этих методов, в работе [5] расчет произведен для симметричного профиля в квазистационарной постановке).

1. Вывод основных соотношений. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ бесконечную решетку произвольных профилей с периодом ti , обтекаемую потоком идеальной несжимаемой жидкости. Слева в бесконечности перед решеткой поток является установившимся. Профили совершают синхронные гармонические колебания с частотой ν и с произвольным постоянным сдвигом фазы α от профиля к профилю ($\alpha \neq 0$). Амплитуда колебаний предполагается малой.

Решение задачи состоит в нахождении значений скорости потока на произвольном контуре решетки и в определении сил, действующих на этот профиль. Скорость потока W_* при обтекании решетки колеблющихся профилей складывается из скорости основного установившегося потока W^0 (задачу установившегося обтекания считаем решенной) и возмущенной скорости w , вызванной колебанием профилей. Скорости W^0 и w — абсолютные скорости потока, т. е. скорости, измеренные относительно неподвижной системы координат. Обозначим через W_1^0 и W_2^0 соответственно скорости установившегося обтекания в бесконечностях перед и за решеткой.

Введем абсолютную комплексную скорость возмущенного движения жидкости $w = w(z, \tau)$. Комплексная скорость возмущенного движения должна обладать следующими свойствами:

1. Функция $w(z, \tau)$ должна быть периодична по шагу и по времени:

$$w(z + imt, \tau) = w(z) e^{-jm\alpha e^{j\nu\tau}} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь τ — время, j — мнимая единица, не взаимодействующая с мнимой единицей i .

2. Функция $w(z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

При изменении циркуляции вокруг колеблющегося профиля с задней кромки, согласно теореме Томсона, сбегает вихревая пелена, являющаяся линией разрыва поля скоростей (фиг. 1).

Пусть контуры $L_0, L_{\pm m}$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) охватывают соответствующие профили и следы за ними (следы предполагаются большой протяженности,

но конечными). Проведем контур L' , охватывающий n профилей со следами. Сделав разрезы между контурами $L_{\pm m}$, запишем значение комплексной скорости $w(z)$ в любой точке $z \in S$ по формуле Коши и, следуя работе [2], при $n \rightarrow \infty$ сведем интегрирование к интегрированию только вдоль контура L_0 . Тогда выражение для комплексной скорости примет вид:

$$w(z) + \frac{1}{ti} \times \quad (1.1)$$

$$\times \oint_{L+L_{02}} w(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta = 0$$

Здесь $w(\zeta)$ — граничное значение представляемой функции. Контур L и L_{02} , по которым ведется интегрирование, охватывают только основной профиль и след за ним. Ядро определяется выражением [2]

$$\Phi[\zeta - z, \alpha, t] =$$

$$= \frac{\text{ch}[(\pi - \alpha)(\zeta - z)/t]}{\text{sh}[\pi(\zeta - z)/t]} -$$

$$- ij \frac{\text{sh}[(\pi - \alpha)(\zeta - z)/t]}{\text{sh}[\pi(\zeta - z)/t]}, \quad (1.2)$$

Разобьем контурный интеграл на два интеграла — соответственно по контуру L и L_{02} . Запишем выражение скорости абсолютного возмущенного движения жидкости для точек $z \in L$ в виде (применяемое представление несколько обобщает аналогичное, используемое в работе [6])

$$w(z) = v(z) + v_0(z)$$

Здесь $v(z)$ — комплексная скорость возмущенного движения жидкости на контуре в относительном движении, $v_0(z)$ — известная местная скорость движения контура. Перепишем выражение (1.1) в другой форме

$$v(z) + \frac{1}{ti} \oint_L v(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta + \frac{1}{ti} \oint_{L_{02}} w(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta =$$

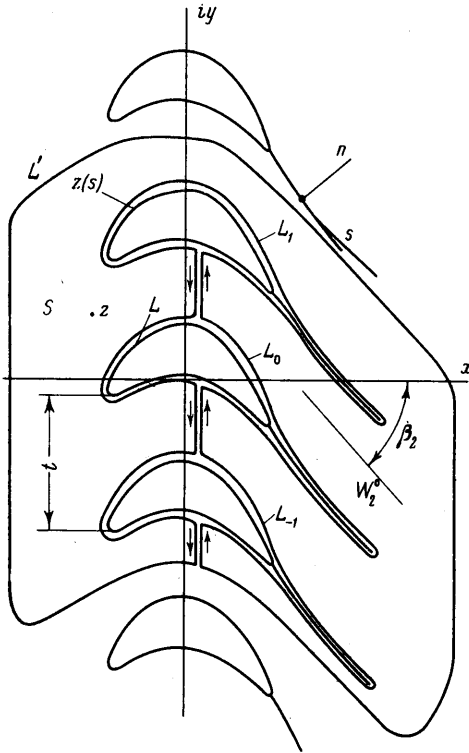
$$= -v_0(z) - \frac{1}{ti} \oint_L v_0(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] dz \quad (1.3)$$

Введем переменные σ_0 и s_0 , представляющие собой дуговые координаты контура L соответственно в точках ζ и z . Уравнение для скорости $\bar{v}(z)$, сопряженной с $v(z)$, получится из (1.3) заменой $v(z)$ на $\bar{v}(z)$, а $w(z)$ на $\bar{w}(z)$. Вследствие того, что

$$z'(s_0) = dz/ds_0 = \exp(i\beta(s_0)), \quad \bar{v}(z) = v(s_0) e^{-i\beta(s_0)} = v(s_0) \bar{z}'(s_0) \quad (1.4)$$

имеем

$$\bar{v}(\zeta) d\zeta = v(\sigma_0) e^{-i\beta(\sigma_0)} e^{i\beta(\sigma_0)} d\sigma_0 = v(\sigma_0) d\sigma_0 \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Здесь β_0 — угол между касательной к профилю в точке и осью абсцисс, $v(s_0)$ — модуль скорости возмущенного движения. Учитывая (1.4) и (1.5), перепишем (1.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} v(s_0) + \frac{z'(s_0)}{ti} \oint_L v(\sigma_0) \Phi[\zeta(\sigma_0) - z(s_0), \alpha, t] d\sigma_0 + \\ + \frac{z'(s_0)}{ti} \oint_{L_{02}} \bar{w}(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta = \\ = -\bar{v}_0(s_0) z'(s_0) - \frac{z'(s_0)}{ti} \oint_L \bar{v}_0(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для точек $\zeta \in L_{02}$ вектор $\bar{w}(\zeta)$ в неподвижной системе координат n, s (фиг. 1) можно представить в виде

$$\bar{w}(\zeta) = \bar{w}_n(\zeta) + \bar{w}_s(\zeta)$$

где $\bar{w}_n(\zeta)$ и $\bar{w}_s(\zeta)$ — проекции $\bar{w}(\zeta)$ соответственно на нормаль и касательную к следу. Так как вектор $\bar{w}_n(\zeta)$ перпендикулярен направлению обхода контура L_{02} , то

$$\oint_{L_{02}} \bar{w}(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta = \oint_{L_{02}} \bar{w}_s(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta \quad (1.7)$$

Интеграл от нормальной составляющей при обходе контура L_{02} будет равен нулю, так как нормальная составляющая не терпит разрыва и одинакова по обоим берегам разреза.

Вводя независимые переменные σ и s для контура L_{02} и учитывая, что $\bar{w}_s(\zeta) d\zeta = w_s(\sigma) d\sigma$, запишем интеграл (1.7) в виде

$$\oint_{L_{02}} \bar{w}_s(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta = \oint_{L_{02}} w_s(\sigma) \Phi[\zeta(\sigma) - z(s), \alpha, t] d\sigma \quad (1.8)$$

Здесь σ и s — дуговые координаты точек z и ζ контура L_{02} , измеренные от некоторой фиксированной на нем точки.

Для расчетов на контуре L удобно ввести независимые переменные ε и θ вместо σ_0 и s_0 , так что $0 \leq \theta < 2\pi$ и $0 \leq \varepsilon < 2\pi$. Связь между s_0 и θ устанавливается соотношением

$$ds_0 = \left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta = \Omega(\theta) d\theta \quad (1.9)$$

Учитывая, что $z'(s_0) = z'(\theta) / \Omega(\theta)$, и вводя новую функцию $V(\theta) = v(\theta)\Omega(\theta)$ для удобства расчетов, отделяем в (1.6) действительную (по i) часть. Тогда получим

$$\begin{aligned} V(\theta) - \int_0^{2\pi} V(\varepsilon) \operatorname{Im} \left\{ -\frac{z'(\theta)}{t} \Phi[\zeta(\varepsilon) - z(\theta), \alpha, t] \right\} d\varepsilon - \\ - \int_{L_{02}} w_s(\sigma) \operatorname{Im} \left\{ -\frac{z'(\theta)}{t} \Phi[\zeta(\sigma) - z(s), \alpha, t] \right\} d\sigma = \\ = \operatorname{Re} \left\{ -\bar{v}_0(\zeta) z'(\theta) - \frac{z'(\theta)}{ti} \int_L \bar{v}_0(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для упрощения расчетной схемы, которое практически внесет малую погрешность в конечный результат, можно принять, что след за профилем

прямолинейный и что он может быть заменен линией разрыва (фиг. 1). Скорость установившегося потока за решеткой $W_2^0 \exp(-i\beta_2)$ будем считать постоянной как по величине, так и по направлению. Тогда величина разрыва скорости должна быть равна

$$2w_s(\sigma) = -\frac{1}{W_2^0} \left(\frac{d\Gamma}{d\tau} \right)_{\tau^*}, \quad \tau^* = \tau - \frac{x(\sigma) - x(0)}{W_2^0 \cos \beta_2}$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_0 \exp(j\nu\tau)$ — неустановившаяся часть циркуляции вокруг основного профиля, $x(0)$ — абсцисса выходной кромки, ν — частота колебаний. С учетом изложенного из соотношения (1.10) получается в окончательном виде интегральное уравнение относительно неизвестной скорости

$$V(\theta) - \int_0^{2\pi} V(\varepsilon) [K(\varepsilon, \theta, \alpha, t) + \delta(\theta, \alpha, t)] d\varepsilon = F(\theta) \quad (1.11)$$

Здесь

$$K(\varepsilon, \theta, \alpha, t) = \text{Im} \left\{ -\frac{z'(\theta)}{t} \Phi[\zeta(\varepsilon) - z(\theta), \alpha, t] \right\} \quad (1.12)$$

$$\delta(\theta, \alpha, t) = \oint_{L_{02}} \text{Im} \left\{ \frac{z'(\theta)}{2t} j \frac{\nu}{W_2^0} \exp \left[\left(\tau - \frac{x(\sigma) - x(0)}{W_2^0 \cos \beta_2} \right) j\nu \right] \right\} \times \\ \times \Phi[\zeta(\sigma) - z(s), \alpha, t] d\sigma \quad (1.13)$$

$$F(\theta) = \text{Re} \left\{ -\bar{v}_0(\zeta) z'(\theta) - \frac{z'(\theta)}{ti} \int_L \bar{v}_0(\zeta) \Phi[\zeta - z, \alpha, t] d\zeta \right\} - \\ - \delta(\theta, \alpha, t) \int_0^{2\pi} \bar{v}_0(\zeta) d\zeta \quad (1.14)$$

Покажем, что ядро $K(\varepsilon, \theta, \alpha, t)$ интегрального уравнения (1.11) непрерывно при $\varepsilon \rightarrow \theta$. Ограничиваясь в $K(\varepsilon, \theta, \alpha, t)$ первыми членами разложений тригонометрических и гиперболических функций и раскрывая неопределенность, получаем, что в точке $\theta = \varepsilon$ ядро регулярно

$$K(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \frac{x'(\varepsilon)y''(\varepsilon) - y'(\varepsilon)x''(\varepsilon)}{[x'(\varepsilon)]^2 + [y'(\varepsilon)]^2} = \frac{1}{2\pi r} \quad (1.15)$$

Здесь $r \neq 0$ — радиус кривизны контура в точке $\varepsilon = \theta$.

Уравнение (1.11) есть интегральное уравнение относительно граничного значения скорости потока на контуре L . Функция $\delta(\theta, \alpha, t)$ вычисляется сходящимся интегралом. За контур интегрирования L_{02} взят контур вдоль линии разрыва (фиг. 1). Соотношение (1.11) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. В работе [7] было показано, что решением интегрального уравнения типа (1.11) служит решение интегрального уравнения

$$V(\theta) - \int_0^{2\pi} V(\varepsilon) [K(\varepsilon, \theta, \alpha, t) + \delta(\theta, \alpha, t)] d\varepsilon + \\ + \kappa \int_0^{2\pi} V(\varepsilon) d\varepsilon = F(\theta) + \kappa \Gamma_0 \quad (1.16)$$

Здесь κ — параметр, удовлетворяющий условию $0 < \kappa \leq 1/l$, где l — длина контура L .

Решение интегрального уравнения (1.16) существует единственно и может быть найдено методом последовательных приближений. При $\delta \equiv 0$ уравнение (1.11) переходит в интегральное уравнение для квазистационарного случая. В качестве примера рассмотрим далее частный случай поступательных колебаний профилей в решетке.

Выражение для комплексной скорости колебаний запишется в виде

$$v_0(z) = j\nu y e^{i\beta_0 z} j\nu$$

Здесь $y = \text{const}$ — амплитуда колебаний, β_0 — угол, образованный вектором $v_0(z)$ с осью абсцисс. В этом случае с учетом (1.22) вычисляется интеграл в правой части (1.14), и функция $F(\theta)$ принимает вид

$$F(\theta) = -2\text{Re} [j\nu y e^{-i\beta_0 z'}(\theta)] \tag{1.17}$$

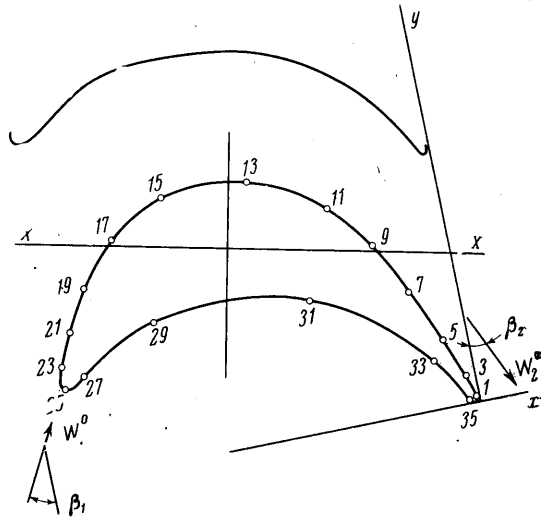
Перейдем к безразмерным переменным, вводя функции (1.18)

$$u(\theta) = \frac{v(\theta)}{y_0 W_2^0} \frac{\Omega(\theta)}{t}, \quad F^0(\theta) = j4kq \text{Re} \{e^{-i\beta_0 z'}(\theta)\}, \quad \Gamma^0 = \frac{\Gamma_0}{y_0 W_2^0 t}$$

Здесь $q = t/2b$ — относительный шаг, $2b$ — хорда профиля, $k = \nu b / W_2^0$ — число Струхалия, подсчитанное по скорости потока за решеткой, $y_0 = y/t$ — безразмерная амплитуда колебаний.

Тогда интегральное уравнение запишется таким образом:

$$u(\theta) - \int_0^{2\pi} u(\varepsilon) [K(\varepsilon, \theta, \alpha, t) + \delta(\theta, \alpha, t)] d\varepsilon + \kappa \int_0^{2\pi} u(\varepsilon) d\varepsilon = F^0(\theta) + \kappa \Gamma^0 \tag{1.19}$$



Фиг. 2

Интегральное уравнение (1.19) является комплексным по j . Отделяя действительную и мнимую части (по j), получаем систему двух интегральных уравнений в безразмерном виде

$$u_1(\theta) - \int_0^{2\pi} \{u_1(\varepsilon) - \kappa\} H_1(\varepsilon, \theta, \alpha, t) - u_2(\varepsilon) H_2(\varepsilon, \theta, \alpha, t)\} d\varepsilon = \kappa \Gamma_1 \tag{1.20}$$

$$u(\theta) - \int_0^{2\pi} \{u_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon, \theta, \alpha, t) + [u_2(\varepsilon) - \kappa] H_1(\varepsilon, \theta, \alpha, t)\} d\varepsilon = F(\theta) + \kappa \Gamma_2$$

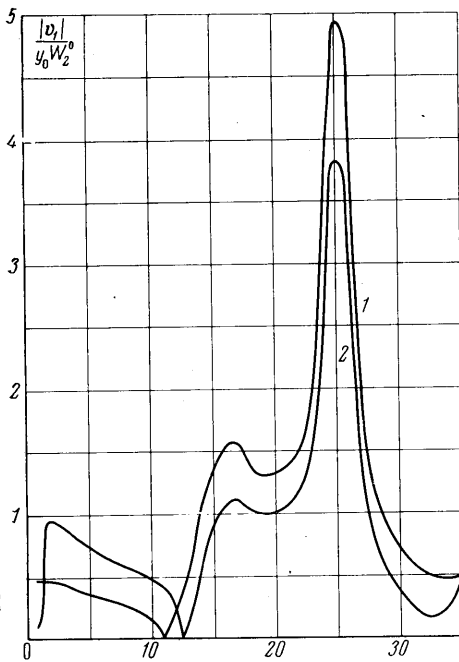
Здесь

$$u(\theta) = u_1(\theta) + ju_2(\theta), \quad H_1 = K_1 + N_1, \quad H_2 = K_2 + N_2$$

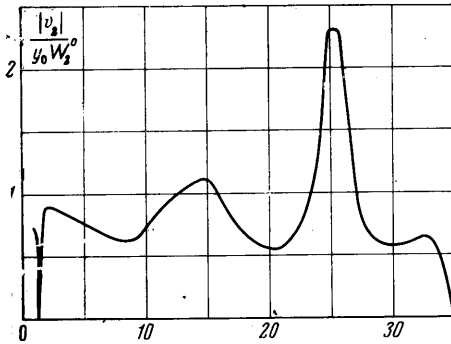
$$K = K_1 + jK_2, \quad N = N_1 + jN_2$$

$$N_1 = \text{Re} [\delta(\theta, \alpha, t)], \quad N_2 = \text{Im} [\delta(\theta, \alpha, t)]$$

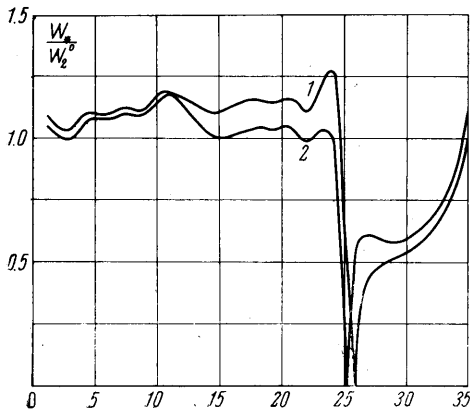
Здесь действительная и мнимая части берутся по j . Таким образом, получена система двух интегральных уравнений относительно неизвестных



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$. Вычисленные значения ядра $K_1(\varepsilon, \theta, \alpha, t)$ в точке $\varepsilon = \theta$ производится по формуле

$$K_1(\theta, \theta) = \frac{n}{2\pi} - \sum_{\substack{\varepsilon \neq \theta \\ 1}}^{n-1} K_1(\varepsilon, \theta) \quad (1.21)$$

Здесь n — число точек, на которое разбивается основной контур. Условие (1.21) вытекает из того, что

$$\frac{1}{ti} \oint_L \Phi[\xi - z, \alpha, t] d\xi = 1$$

При численном решении интегральные уравнения заменяются системой линейных алгебраических уравнений.

Давление в каждой точке контура представляется интегралом

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{W_*^2}{2} + \frac{p_*}{\rho} = f(\tau) \quad (1.23)$$

$$W_* = W^0 + w, \quad p_* = p^0 + p$$

Примем распределение скоростей по L известным и положим на бесконечности слева

$$p_* = p_1^0, \quad W_* = W_1^0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$$

Тогда из (1.23), отбросив члены второго порядка малости, получим

$$j\nu\varphi + W^0 w = p / \rho \quad (1.24)$$

Здесь W^0 и p^0 — скорость и давление при установившемся обтекании; w, p, φ — возмущенные скорость, давление и потенциал скоростей при колебании решетки.

Используя (1.24), определяем давление по обеим сторонам выходной кромки

$$\begin{aligned} -\frac{p^+}{\rho} &= j\nu\varphi^+ + W^0 w^+ \\ -\frac{p^-}{\rho} &= j\nu\varphi^- + W^0 w^- \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь верхним индексом плюс отмечена точка на выпуклой стороне (точка 1), а минус — точка на вогнутой стороне контура профиля (точка 35). Учитывая, что скорость

на выходной кромке равна $W^0 = W_2^0$, и приравнивая разность давлений между этими точками нулю, получаем соотношение

$$-j\gamma V = W_2^0(w^+ - w^-) \quad (1.26)$$

2. **Пример расчета.** На фиг. 2 представлена решетка ТЗА с $q = 0.6$ и углом установки $\beta_v = 76^\circ$. Расчеты произведены при угле входа потока $\beta_1 = 27^\circ 30'$ и угле выхода $\beta_2 = 24^\circ$. При расчетах предположено, что колебания происходят перпендикулярно оси минимального момента инерции сечения профиля XX. Система уравнений (1.20) решалась на ЭЦВМ. На выходной кромке (в точках 1 и 35) выполнялось условие (1.26).

На фиг. 3 показаны значения величины безразмерных дополнительных скоростей, находящихся в фазе со скоростью колебаний. На оси абсцисс фиг. 3—5 указаны номера точек на профиле согласно фиг. 2, расположенные через равные промежутки. Кривая 1 соответствует случаю, когда профили колеблются со сдвигом фаз $\alpha = 180^\circ$ (квазистационарный случай), кривая 2 — при $\alpha = 180^\circ$ и $k = 0.25$.

На фиг. 4 представлено распределение мнимой части безразмерных дополнительных скоростей для случая $\alpha = 180^\circ$ и $k = 0.25$. Дополнительные скорости для квазистационарного случая равны нулю. Появление двух точек нулевой скорости на фиг. 3 и 4 связано с выполнением условия (1.26) на выходной кромке в точках 1 и 35.

Значения дополнительных скоростей и величины циркуляций для квазистационарного случая совпали с аналогичными результатами, приведенными в работе [8]. Для тех же условий ($\alpha = 180^\circ$, $k = 0.25$) на фиг. 5 построено распределение полных скоростей на профиле решетки. Кривая 1 соответствует моменту времени, когда профиль при колебании движется с максимальной скоростью выпуклой частью вперед, а кривая 2 — вогнутой. Распределение скоростей при установившемся обтекании взято из работы [9].

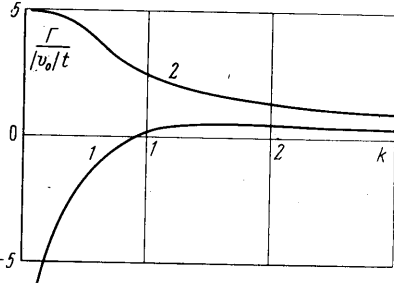
На фиг. 6 представлено распределение действительной (1) и мнимой по j (2) величин дополнительных циркуляций $\Gamma/t|v_0|$ для различных значений чисел k при $\alpha = 180^\circ$. Модуль скорости колебания $|v_0|$ предполагался всюду одинаковым. Из графиков видно, что нестационарная часть циркуляции для профилей значительной кривизны k уменьшается, особенно для малых чисел Струхала.

Решение задачи обтекания решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз, с учетом их смещения сводится к рассмотренной задаче. При этом изменяется лишь граничное условие для скорости $w(\zeta)$ в формуле (1.3) через известную скорость $v_0(z)$. Методика расчета остается прежней.

Поступило 23 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарен В. Э. Обтекание решетки тонких криволинейных профилей нестационарным потоком несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
2. Самойлович Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз. ПММ, 1962, т. 25, вып. 1.
3. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
4. Курзин В. Б. Об аэродинамической интерференции профилей в дозвуковом нестационарном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
5. Сарен В. Э. Решетка произвольных вибрирующих профилей в потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
6. Kazimirska Z. Plaski przeplyw przez osiowy stopien maszyny przeplywowej o dowolnych parametrach geometrycznych. Arch. budowy maszyn, 1966, No. 2.
7. Сухаревский И. В. Об эффективном вычислении скорости и циркуляции потока при потенциальном обтекании решетки. Тр. Харьковск. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, 1955, т. 5, вып. 1.
8. Капелович Б. Э., Самойлович Г. С. Суммарные характеристики квазистационарного обтекания решетки произвольных профилей, колеблющихся с произвольным сдвигом фаз. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
9. Жуковский М. И. Расчет обтекания решеток профилей турбомашин. М., Машигиз, 1960.



Фиг. 6