

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА В ПРИСУТСТВИИ ПОЛЯ МАССОВЫХ СИЛ

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. А. САПОЖНИКОВ

(Новосибирск)

На основе нового численного алгоритма решения уравнения Орра — Зоммерфельда произведено исследование устойчивости некоторого класса профилей скорости в плоском канале. Найден профиль, обладающий (в некотором смысле) свойством максимальной устойчивости. По своей форме этот профиль оказался весьма близким к осредненному профилю скорости турбулентного потока в плоской трубе.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим ламинарный поток в условиях, когда он неустойчив. Наложим на поток некоторое стационарное поле массовых сил, не зависящее от параметров потока, и поставим вопрос, нельзя ли это поле подобрать так, чтобы поток стабилизировать, и притом максимально. В данной постановке роль массовых сил сводится только к формированию стационарного профиля скорости, устойчивость которого анализируется при помощи уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R[(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] \quad (1.1)$$

Здесь R — число Рейнольдса, отнесенное к средней скорости, α — волновое число, c и $\varphi = \varphi(y)$ — искомые (комплексные) собственное значение и собственная функция. Уравнение (1.1) непосредственно не содержит характеристик силового поля. Поэтому в качестве независимой варьируемой функции может быть взят профиль скорости $u(y)$, после определения которого искомое поле сил найдется из уравнений Навье — Стокса. В силу симметрии задачи относительно оси трубы ($y = 0$) достаточно ограничиться нахождением четной функции $\varphi(y)$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad (1.2)$$

В качестве характеристики устойчивости выберем величину $Y = -\text{Im } \bar{c}$ ($c = X + iY$). При $Y > 0$ поток неустойчив, при $Y < 0$ — устойчив. Величина Y зависит от параметра α . Возмущение, затухающее медленнее других (или наиболее быстро нарастающее), характеризуется значением α , реализующим $\sup_{\alpha} Y = \Pi$. Требуется найти такой профиль скорости $u(y)$, для которого достигается

$$\inf_u \sup_{\alpha} Y \quad (1.3)$$

Этот профиль назовем максимально устойчивым. Решение данной задачи было предпринято с целью проверить, не удовлетворяет ли осредненное турбулентное течение в канале условию максимальной устойчивости.

Задача об устойчивости осредненного турбулентного профиля скорости, по-видимому, впервые была рассмотрена Малкусом [1], который предположил: а) этот профиль является нейтрально устойчивым, б) скорость диссипации энергии в потоке максимальна. Вычисления по методу Линя, предпринятые Рейнольдсом и Тидерманом [2], обнаружили несправедливость этих предположений. Этими авторами было установлено, что экспериментальный турбулентный профиль вовсе не является нейтрально устойчивым, а, напротив, обладает высокой стабильностью: для профиля, соответствующего значению $R = 25\,000$, критическое число Рейнольдса оказалось примерно в 10 раз больше. К сожалению, метод Линя не позволяет рассматривать затухающие возмущения; поэтому он неприменим для решения поставленной задачи.

Для вычисления меры устойчивости Y различных стабильных профилей скорости необходимо прямое численное решение уравнения (1.1). В качестве пробных были взяты профили скорости из того же класса, что и в работе [2]

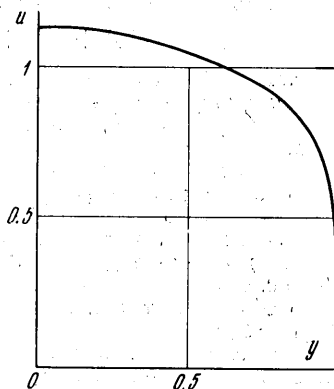
$$\frac{du}{dy_1} = RB \frac{1 - y_1}{1 + E}, \quad u(0) = 0 \quad (y_1 = 1 - y) \quad (1.4)$$

$$E = \frac{1}{2} \{ 1 + \sqrt[3]{\alpha^2 R^2 B [y_1(2 - y_1)(3 - 4y_1 + 2y_1^2) \times (1 - \exp(-A^{-1}R\sqrt{B}y_1(2 - y_1)))]^2} \}^{1/2} - \frac{1}{2} \quad (1.5)$$

Здесь y_1 — расстояние от стенки канала, α — переменный параметр, характеризующий профиль, A — фиксированный в данных расчетах параметр ($A = 62$); параметр B определяется из условия

$$\int_0^1 u dy = 1 \quad (1.6)$$

При $\alpha = 0$ профиль $u(y)$ представляет собой параболу Пуазейля, $u \equiv 1$ при $\alpha = \infty$, наконец, при $\alpha \approx 0.4$ соотношения (1.4) и (1.5) хорошо аппроксимируют опытные данные Лауфера по турбулентному течению в плоском канале.



Фиг. 1

2. О методе численного решения задачи. Решение задачи на собственные значения (1.1), (1.2) представляет большие трудности в основном из-за наличия в (1.1) большого параметра αR , который порождает вблизи стенки «пограничный слой», где функция $\varphi(y)$ резко изменяется. Трудности усугубляются при использовании профилей $u(y)$ из выбранного класса, поскольку при $\alpha > 0$ эти профили имеют собственный пограничный слой с характерным резким изменением $u(y)$ вблизи стенки (фиг. 1). Эти обстоятельства при численном решении задачи заставляют избрать метод, позволяющий вести счет с переменным шагом и контролируемой точностью; наиболее подходящим для этой цели, по-видимому, будет метод Рунге — Кутты. Применение этого метода требует сведения краевой задачи (1.1) — (1.2) к задаче Коши.

Уравнение (1.1) имеет систему фундаментальных решений $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, два из которых (например, φ_1 и φ_2) удовлетворяют условиям (1.2). Тогда произвольное решение (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), можно представить в виде

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2. \quad (2.1)$$

Параметр c из (1.1) будет собственным значением, если выполняются условия (1.2), которые с учетом (2.1) дают соотношение

$$\Delta = \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} = 0 \quad \text{при } y = 1$$

Величина $\Delta = \Delta(c)$, так что задача сводится к определению нулей функции $\Delta(c)$.

При больших значениях параметра αR , согласно [3], одно из фундаментальных решений (например, φ_1) является быстро возрастающей и осциллирующей функцией y

$$\varphi_1 \sim \exp \left[\sqrt{\alpha R} \int \sqrt{i(u - c)} dy \right]$$

другое решение (φ_2) также возрастает, но медленно

$$\varphi \sim e^{\alpha y}$$

Если исключить зону малых значений $|u - c|$, то φ_2 почти совпадает с решением «невязкого» уравнения:

$$(u - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - u'' \varphi = 0$$

Отмеченное свойство функции φ_1 делает непригодным непосредственное использование уравнения (1.1). Поэтому вместо функции φ_1 будем искать ее логарифмическую производную $q = \varphi_1' / \varphi_1$, тем более, что именно эта величина непосредственно входит в (2.2). Тогда уравнение (1.1) может быть преобразовано к системе

$$q' = \alpha^2 + f - q^2, \quad f'' + 2qf' + f^2 - \lambda f - \mu = 0 \quad (2.3)$$

Здесь

$$f = \varphi_1'' / \varphi_1 - \alpha^2, \quad \lambda = i\alpha R(u - c), \quad \mu = -i\alpha R u'' \quad (2.4)$$

Исходя из условий (1.2), получим

$$q(0) = f'(0) = 0$$

Значение $f(0)$ может быть назначено по произволу.

Выберем, например, $f(0)$ из условия $f''(0) = 0$, которое обеспечивает наиболее плавное поведение $f(y)$ в окрестности $y = 0$. Тогда в соответствии со вторым уравнением (2.3) значение $f(0)$ определится как один из корней квадратного уравнения

$$f_1(0) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2 + \mu \approx \lambda, \quad f_2(0) = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^2 + \mu \approx -\mu / \lambda$$

причем приближенные равенства верны при $\alpha R \gg 1$. Заметим, что для невязкого решения $\varphi'' / \varphi - \alpha^2 = f = -\mu / \lambda$ при всех y , так что значение $f_2(0)$ соответствует решению φ_2 . Поэтому для нахождения быстрорастущего решения φ_1 примем $f(0) = \lambda$.

В соответствии с изложенным, казалось бы, для определения медленно растущего решения можно решить систему (2.3) при условии $f(0) = -\mu / \lambda$. Однако такое решение оказывается неустойчивым в том смысле, что малые вычислительные погрешности вызывают быстрый переход с интегральной кривой φ_2 на кривую φ_1 . Это непосредственно видно из (2.1), в котором для определения φ_2 нужно положить $C_1 = 0$. Однако при численном решении задачи это равенство не может быть выполнено абсолютно точно. В результате, начиная с некоторого значения y , оказывается $C_1 \varphi_1 \gg C_2 \varphi_2$.

Таким образом, решение системы (2.3) при больших значениях αR практически не зависит от начальных данных и, следовательно, эта система пригодна только для нахождения быстрорастущего решения.

Для определения решения φ_2 необходимо из уравнения (1.1) исключить быстрорастущее решение φ_1 .

Запишем уравнение (1.1) в виде системы

$$\theta'' - \alpha^2 \theta = \lambda \theta + \mu \varphi, \quad \varphi'' - \alpha^2 \varphi = \theta \quad (2.5)$$

Положим

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{w}{\varphi_1} dy, \quad \theta_2 = \theta_1 \int \frac{w}{\varphi_1} dy + v \quad (2.6)$$

Тогда система (2.5) примет вид

$$w' = v - qw, \quad v'' = (\alpha^2 + \lambda - f)v - 2f'w \quad (2.7)$$

Замена (2.6) представляет собой операцию исключения быстрорастущего решения (φ_1, θ_1) из системы (2.5), так что у системы (2.7) остаются лишь «умеренно» возрастающие решения. Например, $f = \lambda \equiv \text{const}$ при $u \equiv 1$ и имеем $v = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}$.

Несмотря на это, при достаточно больших значениях параметра α решение системы (2.7) затруднительно, поэтому введем новые переменные

$$\Psi = \frac{w}{v}, \quad \Phi = \frac{v'}{v} \quad (2.8)$$

Система (2.7) преобразуется к виду

$$\Psi' = 1 - (q + \Phi)\Psi, \quad \Phi' = \alpha^2 + \lambda - f - \Phi^2 - 2f'\Psi \quad (2.9)$$

Связь между (Ψ, Φ) и исходными переменными дается в виде

$$\Psi = \frac{p - q}{g - f}, \quad \Phi = \frac{g' - f'}{g - f} + p, \quad p = \frac{\varphi_2'}{\varphi_2}, \quad g = \frac{\varphi_2''}{\varphi_2} - \alpha^2, \quad q = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}, \quad f = \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} - \alpha^2 \quad (2.10)$$

Из (2.10) следуют начальные данные для системы (2.9)

$$\Psi(0) = \Phi(0) = 0$$

Итак, для решения задачи нужно совместно интегрировать систему уравнений (2.3) и (2.9)¹ при соответствующих начальных данных.

Функция Ψ , как это видно из ее определения, пропорциональна

$$p - q = \varphi_2' / \varphi_2 - \varphi_1' / \varphi_1$$

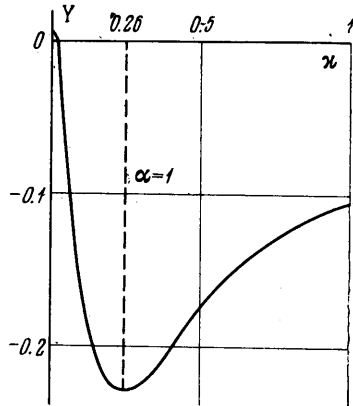
Поэтому вместо решения уравнения $\Delta(c) = 0$ (см. (2.2)) будем искать нули функции $\chi(c) = \Psi(1)$. Для решения уравнения $\chi(c) = 0$ использовался метод секущих, т. е. вычисления велись по итерационной схеме

$$c_{n+1} = c_n - \frac{c_n - c_{n-1}}{\chi_n - \chi_{n-1}} \chi_n \tag{2.11}$$

Известным затруднением является то обстоятельство, что уравнение $\chi(c) = 0$ имеет, вообще говоря, счетное множество корней, из которых надлежит определить корень с максимальной мнимой частью, поскольку введенная величина $Y = (\text{Im } c)_{\max}$. Этот искомый корень условно назовем первым.

Таким образом, при вычислениях по схеме (2.11) необходимо всякий раз выбирать начальное приближение c_0 из области притяжения первого корня. Для этого был использован метод движения по непрерывности, состоящий в следующем.

Поставленная задача при $R = \text{const}$ характеризуется двумя параметрами α и κ . При значениях $\alpha = 1$, $\kappa = 0$ ее решение известно [4]. Начиная с этих значений, параметры α и κ изменялись так, чтобы каждое вычисленное собственное значение c оставалось в области притяжения последующего первого корня и, следовательно, могло быть принято за начальное приближение. Для контроля того, что вычисленное собственное значение действительно является первым, время от времени применялся следующий прием. Для фиксированных значений α и κ на плоскости $c = X + iY$ строилась достаточно густая прямоугольная сетка, в узлах которой вычислялись значения функции $\chi(X, Y) = F(X, Y) + iG(X, Y)$. Затем приближенно строились два семейства кривых, определяемых уравнениями $F(X, Y) = 0$ и $G(X, Y) = 0$. При этом существенно использовалось то обстоятельство, что эти кривые являются линиями уровня гармонических функций F и G . Точки пересечения линии различных семейств давали все нули функции $\chi(c)$ в рассматриваемой области.



Фиг. 2

Опыт вычислений показал, что параметры α и κ (при $\kappa > 0.1$) допустимо изменять на 10%, при этом первый корень уравнения $\chi(c) = 0$ всегда остается первым.

3. Результаты численного решения задачи. Целью данной работы является определение наиболее устойчивого профиля из класса (1.4). Вопрос о существовании такого профиля сводится к выяснению вопроса, существует ли профиль более устойчивый, чем $u = 1$, соответствующий значению $\kappa = \infty$. В самом деле, в этом предельном случае, как легко видеть

$$Y = - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha R} \tag{3.1}$$

где β есть первый корень трансцендентного уравнения

$$\beta \operatorname{tg} \beta + \alpha \operatorname{th} \alpha = 0 \tag{3.2}$$

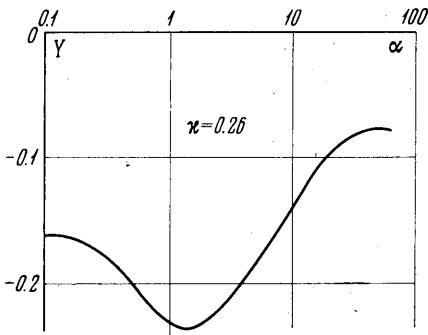
Нетрудно обнаружить, что $1/2\pi < \beta < \pi$.

При $\alpha = 1$ величина $Y = -9.31/R$. Если $R = 10^4$, $Y = -0.001$, так что профиль $u = 1$ является устойчивым, но если так можно выразиться, слабо устойчивым. С другой стороны, при $\kappa = 0$ и $\alpha = 1$ вычисления дают $Y = 0.006$, т. е. поток неустойчив. Отсюда видно, что если при $\alpha = 1$ найдется хотя бы один профиль, для которого $Y < -0.001$, то найдется и наиболее устойчивый профиль.

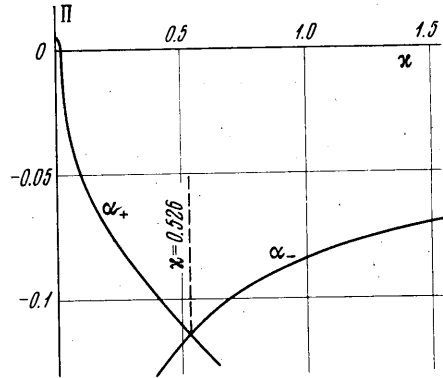
Имея в виду эти соображения, прежде всего был произведен расчет для значений $R = 10^4$, $\alpha = 1$ и переменных κ . Результаты расчета показаны на фиг. 2. Как видно, с увеличением κ от нуля течение очень быстро стабилизируется, достигая наиболее устойчивого состояния ($Y = -0.233$) при $\kappa = 0.26$. Отметим, что при $0.1 < \kappa < 1$ все профили обладают не менее чем стократным «запасом устойчивости» по сравнению с однородным профилем.

¹ Иногда может случиться, что в некоторой точке $y_0 \in (0, 1)$, $v(y_0) = 0$. В этом случае в окрестности точки y_0 решается линейная система (2.7).

Итак, зависимость $Y(\kappa)$ при фиксированном α обнаруживает четкий минимум. Для полного решения задачи необходимо выяснить вид зависимости $Y(\alpha)$. При значениях $\kappa = 0$ и $\kappa = \infty$ имеет единственный максимум. Это свойство однако не сохраняется при всех значениях κ . На фиг. 3 дана зависимость $Y(\alpha)$ при $\kappa = 0.26$. Как видно, функция $Y(\alpha)$ имеет два локальных максимума: при $\alpha = 0.12$ и при $\alpha = 50.5$. Таким образом, зависимость $\Pi(\kappa) = \sup_{\alpha} Y$ имеет две ветви, как это показано на фиг. 4. При значениях $\kappa < 0.526$ «наиболее опасными» будут коротковолновые возмущения (большие $\alpha = \alpha_+$), при $\kappa > 0.526$ роль наиболее опасных переходит к возмущениям длинноволновым (малые $\alpha = \alpha_-$).



Фиг. 3



Фиг. 4

Максимально устойчивым является профиль скорости, для которого $\kappa = 0.526$. Этот профиль и показан на фиг. 1. По своей форме он весьма похож на экспериментальный турбулентный профиль скорости в плоском канале для значения $R = 10^4$.

В приведенных расчетах параметры α , κ изменялись в диапазоне соответственно 0.009—150, 0—10, и, следовательно, величина αR , определяющая малый параметр пр-старшей производной, принимала значения 90—1.5 · 10⁶.

Итерационный процесс (2.11) заканчивался при выполнении условий

$$|Y_{n+1} - Y_n| \leq 0.005 |Y_{n+1}|, \quad |F| + |G| \leq 10^{-5}$$

Сходимость достигалась, как правило, через четыре — пять итераций. При решении системы уравнений (2.3), (2.9) использовался стандартный метод Рунге — Кутты, имеющий погрешность на одном шаге (h) порядка h^5 . Расчет велся с переменным шагом, который определялся параметрами α , R , κ и изменялся от 0.01 до ~ 0.0001 .

Для оценки точности счета и проверки правильности алгоритма решения задачи на собственные значения (1.1) — (1.3) проводилось несколько контрольных расчетов и полученные результаты сравнивались с известными. Так для случая $u \equiv 1$ численное решение системы (2.3), (2.9), полученное предлагаемым методом, практически совпадает (восемь значащих цифр) с точным. Так как при $u \equiv 1$ в уравнении (1.1) выпадает член с u'' , то для контроля проводились расчеты с $u'' = \text{const} \neq 0$, например $u \equiv 1$, $u'' = -2$. Для сравнения приводим вычисленные собственные значения, а под ними — значения, полученные Томасом [4]

$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
0.2375 + 0.0036i;	0.2534 - 0.0076i;
0.2375 + 0.0037i;	0.2535 - 0.0075i.

Отладочные расчеты проводились на ЭВМ М-20, окончательные — на БЭСМ-6. Время, необходимое для вычисления первого корня уравнения $\chi(\epsilon)$ при фиксированных (α , κ) на М-20, составляет 40—60 сек. Задача на БЭСМ-6 решается в 30—40 мин.

Поступило 16 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Malkus W. V. R. Outline of a turbulent shear flow. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, p. 521.
2. Reynolds W. C., Tiederman W. G. Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt. 2.
3. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. Thomas L. N. The stability of plane Poiseuille flow. Phys. Rev., 1953, vol. 91, No. 4, p. 780.