

## ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. А. БАШКИН

(Москва)

Исследованы уравнения пространственного ламинарного пограничного слоя на линиях растекания и стекания при коническом внешнем течении в предположении, что число Прандтля и произведение  $\rho\mu$  постоянны. Показано, что в случае положительного градиента скорости вторичного течения ( $\alpha_1 > 0$ ) дополнительные условия, вытекающие из физической картины течения, определяют единственное решение системы уравнений пограничного слоя. При отрицательном градиенте скорости вторичного течения ( $\alpha_1 \leq 0$ ) этим условиям удовлетворяют два решения.

Получено приближенное решение уравнений пограничного слоя, которое достаточно хорошо согласуется с результатами численного интегрирования.

Течение сжимаемого газа в пространственном ламинарном пограничном слое описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, решение которой при заданных граничных условиях не является единственным. Поэтому на получаемое решение накладываются дополнительные условия, вытекающие из физической картины течения газа. При решении задач с отрицательным градиентом давления этих дополнительных условий достаточно для однозначного выбора решения уравнений пограничного слоя. Однако в случае положительного градиента давления решение уравнений пограничного слоя, удовлетворяющее граничным и дополнительным условиям, может быть неединственным. В частности, в работе [1] при исследовании пространственного ламинарного пограничного слоя в окрестности критической точки было показано, что при

$$c = \frac{\partial v_e}{\partial y} \bigg|_{\theta=0} \frac{\partial u_e}{\partial x} > 0$$

решение единственно, а при  $c < 0$  имеет место два решения.

В данной работе исследуется вопрос о единственности автомодельного решения уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя на линиях растекания и стекания при коническом внешнем течении.

1. Система дифференциальных уравнений пространственного пограничного слоя была получена В. В. Струминским [2]. Для частного случая течения сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое на линиях растекания она приведена в работах [3, 4].

Перейдем к переменным Крокко  $r, u$  и введем обозначения

$$u_1 = \frac{u}{u_e}, \quad \beta_2 = \frac{v}{v_e}, \quad \beta_4 = \frac{H}{H_e}, \quad \alpha_0 = \frac{u_e^2}{2H_e} \quad (1.1)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{u_e \psi(\theta)} \frac{\partial v_e}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=0}, \quad \beta_0 = \frac{\tau_1}{\rho_e u_e^2} \sqrt{\frac{R_r}{\rho_1^* \mu_1^*}}$$

$$R_r = \frac{\rho_e u_e r}{\rho_e \mu_e}, \quad \rho_1 \mu_1 = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}$$

Система уравнений для течения сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое на линиях растекания и стекания построена в работе [4]

Для рассматриваемой задачи она имеет вид

$$\beta_0 \beta_0'' + 1.5u_1 + \alpha_1 \beta_2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\beta_0^2 \beta_2'' - (u_1 + \alpha_1 \beta_2) \beta_2 = -\frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_0} (\beta_4 - \alpha_0 u_1^2) \quad (1.3)$$

$$\beta_0 \beta_4'' + (1 - P) \beta_0' \beta_4' = 2\alpha_0 (1 - P) (u_1 \beta_0)' \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$\beta_0'(0) = \beta_0(1) = \beta_2(0) = 0, \quad \beta_4(0) = H_{1w}, \quad \beta_2(1) = \beta_4(1) = 1 \quad (1.5)$$

Здесь  $u, v$  — продольный и поперечный компоненты вектора скорости;  $r$  — расстояние от вершины тела до рассматриваемой точки, измеренное вдоль его образующей;  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости;  $H$  — полная энтальпия (теплосодержание) газа;  $P$  — число Прандтля;  $\psi(\theta)$  — функция, зависящая от геометрии тела. Индекс  $e$  характеризует параметры потока на внешней границе пограничного слоя, индекс  $w$  — на поверхности тела. Звездочкой обозначены величины, которые постоянны поперек пограничного слоя и вычисляются как точные значения при некоторой определяющей температуре.

Из структуры уравнения (1.2) следует, что оно имеет два решения, одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку. Дополнительное условие  $\beta_0(u_1) > 0$ , вытекающее из физических условий задачи, однозначно определяет искомое решение. Уравнение (1.4) является неоднородным линейным уравнением и при заданных граничных условиях имеет единственное решение. Таким образом, неединственность решения системы уравнений (1.2) — (1.4) может быть обусловлено только неединственностью решения уравнения (1.3).

Для исследования вопроса о единственности решения системы (1.2) — (1.4) с граничными условиями (1.5) рассмотрим случай малых значений параметра  $\alpha_1$ .

В этом случае функция  $\beta_2(u_1)$  допускает три типа разложений

$$A \quad \beta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \alpha_1^n \quad (1.6)$$

$$B \quad \beta_2 = \alpha_1^{-0.5} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{1/2n} \alpha_1^{1/2n} \quad (1.7)$$

$$C \quad \beta_2 = \alpha_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \alpha_1^n \quad (1.8)$$

Рассмотрим эти три случая по отдельности.

*Случай А.* Соответственно разложению (1.6) функции  $\beta_0(u_1)$  и  $\beta_4(u_1)$  можно представить в виде

$$\beta_0(u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \alpha_1^n, \quad \beta_4(u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(u_1) \alpha_1^n \quad (1.9)$$

Если выражения (1.6) и (1.9) подставить в систему уравнений (1.2) — (1.4) и в граничные условия (1.5), то для определения первых двух членов разложений получим системы уравнений и граничные условия следующего вида:

$$\varphi_0 \varphi_0'' + \frac{3}{2} u_1 = 0, \quad \varphi_0^2 \psi_0'' - u_1 \psi_0 = -\frac{\xi_0 - \alpha_0 u_1^2}{1 - \alpha_0} \quad (1.10)$$

$$\varphi_0 \xi_0'' + (1 - P) \varphi_0' \xi_0' = 2\alpha_0 (1 - P) (\varphi_0 u_1)'$$

$$\varphi_0 \varphi_1'' - \frac{3}{2} u_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = -\psi_0 \quad (1.11)$$

$$\varphi_0^2 \psi_1'' - u_1 \psi_1 = \psi_0^2 - \frac{2u_1 \varphi_1 \psi_0}{\varphi_0} - \frac{1}{1 - \alpha_0} \left\{ \xi_1 + \left( 1 - \frac{2\varphi_1}{\varphi_0} \right) (\xi_0 - \alpha_0 u_1^2) \right\}$$

$$\varphi_0 \xi_1'' + (1 - P) \varphi_0' \xi_1' = (1 - P) \left\{ \frac{\varphi_1 \varphi_0' \xi_0'}{\varphi_0} - \varphi_1' \xi_0' + 2\alpha_0 \left( u_1 \varphi_1' - \frac{\varphi_1 \varphi_0'}{\varphi_0} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0'(0) &= \varphi_1'(0) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = \psi_0(0) = \psi_1(0) = \psi_1(1) = \\ &= \xi_1(0) = \xi_1(1) = 0, \quad \psi_0(1) = \xi_0(1) = 1, \quad \xi_0(0) = H_{1w} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Системы уравнений (1.10) и (1.11) имеют единственное решение вследствие того, что для определения  $\psi_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\xi_1$  и т. д. имеем неоднородные линейные дифференциальные уравнения, а неоднозначность первого уравнения системы (1.10) устраняется дополнительным условием  $\varphi_0(u_1) > 0$ .

*Случай В.* В этом случае функции  $\beta_0(u_1)$  и  $\beta_4(u_1)$  разлагаются в следующие ряды:

$$\beta_0(u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n/2} \alpha_1^{1/2n}, \quad \beta_4(u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{n/2}(u_1) \alpha_1^{1/2n} \quad (1.13)$$

Для определения первых членов разложения получим систему уравнений

$$\varphi_0 \varphi_0'' + 3/2 u_1 = 0, \quad \varphi_0^2 \psi_0'' - u_1 \psi_0 = 0,$$

$$\varphi_0 \xi_0'' + (1 - P) \varphi_0' \xi_0' = 2\alpha_0 (1 - P) (u_1 \varphi_0)' \quad (1.14)$$

с граничными условиями

$$\varphi_0'(0) = \varphi_0(1) = \psi_0(0) = \psi_0(1) = 0, \quad \xi_0(0) = H_{1w}, \quad \xi_0(1) = 1 \quad (1.15)$$

Для определения  $\psi_0$  имеем однородное линейное уравнение с нулевыми граничными условиями, следовательно,  $\psi_0(u_1) \equiv 0$ . Из рекуррентных уравнений следует, что  $\psi_{1/2n}(u_1)$  при четном  $n$  равны нулю. Тогда в разложении (1.7) остаются лишь члены с нечетным  $n$  и, следовательно, случай В сводится к случаю А.

*Случай С.* Функции  $\beta_0(u_1)$  и  $\beta_4(u_1)$  представлены в виде рядов (1.9). Для определения первых двух членов разложения имеем систему уравнений

$$\varphi_0 \varphi_0'' + \frac{3}{2} u_1 + \psi_0 = 0, \quad \varphi_0^2 \psi_0'' - (u_1 + \psi_0) \psi_0 = 0 \quad (1.16)$$

$$\varphi_0 \xi_0'' + (1 - P) \varphi_0' \xi_0' = 2\alpha_0 (1 - P) (u_1 \varphi_0)'$$

$$\varphi_0 \varphi_1'' - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \left( \frac{3}{2} u_1 + \psi_0 \right) + \psi_1 = 0$$

$$\varphi_0^2 \psi_1'' - (u_1 + 2\psi_0)\psi_1 + \frac{2\varphi_1}{\varphi_0} (u_1 + \psi_0)\psi_0 = - \frac{\xi_0 - \alpha_0 u_1^2}{1 - \alpha_0} \quad (1.17)$$

$$\varphi_0 \xi_1'' + (1 - P)\varphi_0' \xi_1' = (1 - P) \left\{ \frac{\varphi_1 \varphi_0' \xi_0'}{\varphi_0} + 2\alpha_0 \left( u_1 \varphi_1' - \frac{\varphi_1 \varphi_0'}{\varphi_0} \right) \right\}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_0'(0) = \varphi_1'(0) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = \psi_0(0) = \psi_0(1) = \psi_1(0) = \\ = \xi_1(0) = \xi_1(1) = 0 \\ \psi_1(1) = 1, \quad \xi_0(0) = H_{1w}, \quad \xi_0(1) = 1 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Система уравнений (1.16) имеет два решения. Первое решение соответствует  $\psi_0(u_1) \equiv 0$  и тождественно случаю А. Второе решение соответствует случаю, когда  $\psi_0(u_1) \not\equiv 0$ .

Для определения  $\varphi_0(u_1)$  и  $\psi_0(u_1)$  имеем систему нелинейных однородных уравнений с нулевыми граничными условиями, ее решение можно представить в виде рядов

$$\varphi_0(u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} u_1^{3n}, \quad \psi_0(u_1) = u_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_{3n} u_1^{3n} \quad (1.19)$$

Ряды такого типа сходятся довольно медленно [5]; но чтобы получить оценочные значения этих функций, можно ограничиться двумя членами разложения. Тогда получим

$$\varphi_0(u_1) = 1/6(1 - u_1^3), \quad \psi_0(u_1) = -4/3u_1(1 - u_1^3) \quad (1.20)$$

Поскольку  $\psi_0(u_1)$  является главным членом разложения, то при малых значениях параметра  $\alpha_1$  она определяет профиль скорости вторичного течения. Физической картине течения  $\varphi_0(u_1) > 0$ , т. е. течение газа внутри пограничного слоя совпадает с направлением течения на его внешней границе, это решение удовлетворяет при отрицательных значениях параметра  $\alpha_1$ .

Таким образом доказано, что при заданных граничных и дополнительных условиях  $\beta_0(u_1) \geq 0$ ,  $\beta_2(u_1) \geq 0$ , вытекающих из физической картины течения газа, система уравнений (1.2) — (1.4) имеет одно решение при  $\alpha_1 \geq 0^+$  и два решения при  $\alpha_1 \leq 0^-$ .

2. Для исследования особенностей решения системы уравнений (1.2) — (1.4) с граничными условиями (1.5) найдем ее приближенное аналитическое решение.

Аппроксимируем профили функций  $\beta_0(u_1)$  и  $\beta_4(u_1)$  полиномами третьей степени, удовлетворяющими граничным условиям на внешней и внутренней границах пограничного слоя

$$\beta_0(u_1) = a_0(1 - u_1^3) \quad (2.1)$$

$$\beta_4(u_1) = u_1^3 + H_{1w}(1 - u_1^3) + c_1 u_1(1 - u_1^2) + \alpha_0(1 - P)u_1^2(1 - u_1) \quad (2.2)$$

а профиль скорости вторичного течения  $\beta_2(u_1)$  выражением

$$\beta_2(u_1) = u_1 + b_1(u_1 - u_1^3) \quad (2.3)$$

Если функцию  $\beta_2(u_1)$  аппроксимировать полиномом третьей степени с удовлетворением граничных условий, то получаются слишком громоздкие выражения, а решение соответствующей системы алгебраических уравнений нельзя получить в замкнутом виде.

Если выражения (2.1) — (2.3) подставить в систему уравнений (1.2) — (1.4) и полученные соотношения проинтегрировать поперек пограничного слоя, то для определения коэффициентов  $a_0$ ,  $b_1$  и  $c_1$  получим систему алгебраических уравнений. Ее решение имеет следующий вид:

$$a_0 = \pm \left( \frac{9 + 2\alpha_1(3 + 2b_1)}{27} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

$$b_1 = -\frac{7(35 + 34\alpha_1)}{232\alpha_1} \pm \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \left[ \frac{7(35 + 34\alpha_1)}{232} \right]^2 + \frac{105(1 + \alpha_1)\alpha_1}{29(1 - \alpha_0)} \left[ \frac{(1 - P)\alpha_0 - 1}{15} + \frac{3H_{1w} + c_1}{4} \right] \right\}^{0.5} \quad (2.5)$$

$$c_1 = \frac{9(1 - H_{1w}) - 1.5\alpha_0(1 - P)}{(5 + P)/P - 3/4(1 - P)} \quad (2.6)$$

При  $\alpha_1 = 0$  уравнение (2.5) имеет два решения

$$b_1 = \frac{12}{7(1 - \alpha_0)} \left\{ \frac{(1 - P)\alpha_0 - 1}{15} + \frac{3H_{1w} + c_1}{4} \right\} \quad (2.7)$$

которое соответствует положительному значению квадратного корня, и

$$b_1 = \pm \infty \quad \text{или} \quad \lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \alpha_1 b_1 = -105/116 \quad \text{при} \quad \alpha_1 \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

Из формул (2.4) и (2.5) видно, что коэффициенты  $a_0$  и  $b_1$  определяются неоднозначно. Дополнительные условия, накладываемые на искомое решение, имеют вид

$$a_0 > 0, \quad b_1 > -1 \quad (2.9)$$

Результаты расчетов по формуле (2.5) приведены на фиг. 1 в виде зависимости коэффициента  $b_1$  от параметра  $\alpha_1$  для трех значений  $\alpha_0 = 0, 0.6$  и  $0.95$  при наличии сильного теплообмена на поверхности тела ( $H_{1w} = 0$ ); сплошной линией нанесены результаты расчетов, соответствующие положительному значению квадратного корня (первое решение), штриховой — отрицательному значению квадратного корня (второе решение). При расчетах число Прандтля  $P$  принималось равным единице.

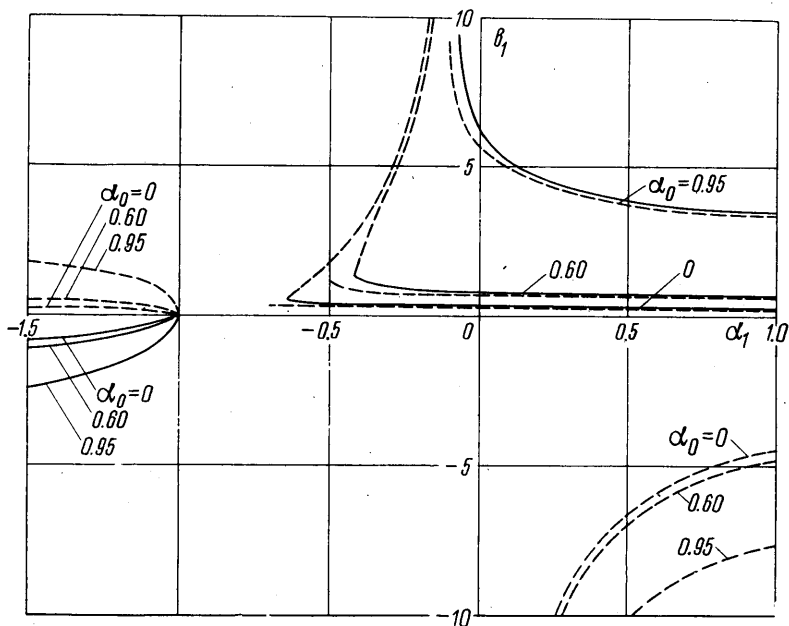
В диапазоне  $-1 < \alpha_1 < \alpha_1^*$  уравнение (2.5) имеет комплексные корни, т. е. в этом диапазоне не существует решения, удовлетворяющего физической природе задачи. На границах этого интервала оба решения совпадают. Вне указанного интервала первое решение непрерывно по  $\alpha_1$ , второе решение имеет в точке  $\alpha_1 = 0$  разрыв.

Соответственно этому происходит и изменение величины  $a_0$ , характеризующей местное напряжение трения (фиг. 2). В диапазоне  $-1 < \alpha_1 < \alpha_1^*$  решение не существует, и на границах этого интервала оба решения совпадают. При  $\alpha_1 \leq -1$  действительное решение, соответствующее первому решению  $b_1$ , существует лишь в некотором определенном интервале изменения  $\alpha_1$ , а решение, соответствующее второму решению  $b_1$ , существует во всем диапазоне изменения параметра  $\alpha_1$  ( $-1 \geq \alpha_1 \geq -\infty$ ). При  $\alpha_1 > \alpha_1^*$  первое решение существует во всем диапазоне изменения  $\alpha_1$  ( $\alpha_1^* \leq \alpha_1 \leq \infty$ ), а второе решение — при  $\alpha_1^* \leq \alpha_1 \leq 0$ .

На фиг. 3 приведены предельные значения параметра  $\alpha_1$  в виде зависимости величины  $\alpha_1^*$  от температурного фактора  $H_{1w}$  при фиксированных значениях  $\alpha_0$ . Увеличение параметров  $H_{1w}$  и  $\alpha_0$  сдвигает границу существования решения в сторону больших значений параметра  $\alpha_1$ . Второе предельное значения практически равно  $\alpha = -1$  (отклонение этого значения не превышает пяти процентов).

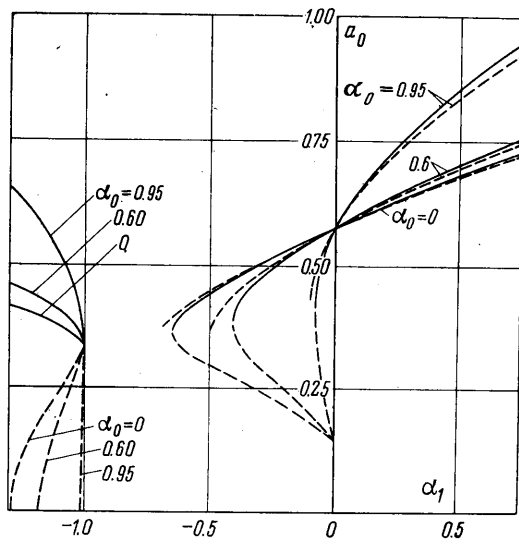
Неединственность решения уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя на линиях стекания и наличие диапазона изменения параметра  $\alpha_1$ , в котором решение не существует, указывает, по-видимому, на то, что при  $\alpha_1 \leq 0$  уравнения пограничного слоя недействительны. С этим также очевидно связана неустойчивость счета уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя конечноразностными методами на подветренной стороне тела [9].

3. Полученная качественная и количественная картина поведения решения пространственного ламинарного пограничного слоя на линиях растекания и стекания при коническом внешнем течении достаточно хорошо согласуется с результатами

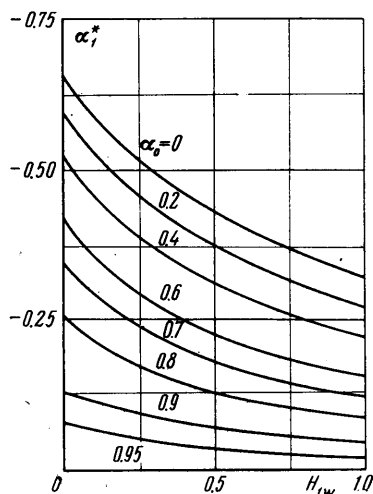


Фиг. 1

численного интегрирования системы уравнений (1.2) — (1.4) методом Рунге — Кутты по формулам второго порядка. Некоторые результаты расчетов, проведенных для различных значений параметров  $P$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$  и  $H_{1w}$ , приведены в работе [4] и нанесены на фиг. 1 и 2 пунктирной линией.



Фиг. 2



Фиг. 3

При нахождении первого решения путем численного интегрирования не возникает каких-либо затруднений: процесс последовательных приближений довольно быстро сходится и удается получить решение вплоть до значения  $\alpha_1$ , несколько превы-

шающего по абсолютной величине его предельное значение  $\alpha_1^*$ , соответствующее приближенному решению. Величина этого приращения  $\Delta\alpha_1^*$  зависит от числа Прандтля  $P$ , температурного фактора  $H_{1w}$  и параметра  $\alpha_0$ . При  $\alpha_1 < \alpha_1^* + \Delta\alpha_1^*$  процесс последовательных приближений не сходится и происходит прекращение счета при интегрировании уравнения импульсов вторичного течения. Это подтверждает сделанный выше вывод о несуществовании решения в диапазоне  $-1 < \alpha_1 < \alpha_1^* + \Delta\alpha_1^*$ .

Нахождение второго решения сопряжено с некоторыми трудностями вследствие неустойчивости процесса последовательных приближений; в результате этого второе решение удалось получить лишь для некоторых частных случаев.

При  $\alpha_1 > \alpha_1^*$  первое приближенное решение хорошо согласуется с результатами численного интегрирования. Это позволяет получить приближенные формулы для расчета местного коэффициента сопротивления трения  $c_{f1}$  и местного потока тепла  $q_w$  на линиях растекания при коническом внешнем течении; если в качестве определяющей температуры взять среднюю температуру поперек пограничного слоя, то расчетные формулы примут вид

$$c_{f1} = \frac{\tau_{1w}}{0.5\rho_e \bar{u}_e^2} = \frac{2a_0}{\sqrt{R_r}} \left\{ \frac{3(1+c_1) + 9H_{1w} - (3+P)\alpha_0}{12(1-\alpha_0)} \right\}^{1/2(n-1)} \quad (3.1)$$

$$\frac{q_w}{\rho_e u_e H_e} = \frac{a_0 c_1}{P \sqrt{R_r}} \left\{ \frac{3(1+c_1) + 9H_{1w} - (3+P)\alpha_0}{12(1-\alpha_0)} \right\}^{1/2(n-1)} \quad (3.2)$$

где  $n$  — показатель степени в степенном законе изменения динамического коэффициента вязкости от температуры ( $\mu \sim T^n$ ).

Сравнение с результатами численного интегрирования, приведенными в работе [4], показало, что погрешность расчета по формулам (3.1) и (3.2) не превышает  $\pm 6\%$ .

Поступило 27 VII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Libby P. Heat and mass transfer at a general three-dimensional stagnation point. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 3.
2. Струминский В. В. Уравнение трехмерного пограничного слоя в сжимаемом газе на произвольной поверхности. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 2.
3. Авдеевский В. С. Расчет трехмерного ламинарного пограничного слоя на линии растекания. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Башкин В. А. Пространственный ламинарный пограничный слой на линии растекания при коническом внешнем течении при отсутствии и наличии вдува (отсоса) однородного газа. ПМТФ, 1967, № 2.
5. Crocco L. Lo strato limite laminare nei gas. Associazione culturale Aeronautica, Roma, 1946.
6. Введенская Н. Д. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 2, стр. 304—312.