

К ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СРЫВНЫХ ЗОН

Г. И. ТАГАНОВ

(Москва)

Опыт показывает, что стационарная картина обтекания плохообтекаемого тела с замкнутой срывной зоной при ламинарном характере течения около тела и в срывной зоне разрушается при дозвуковой скорости потока в диапазоне чисел R от 10^1 до 10^2 . Вместе с тем опыт свидетельствует, что при сверхзвуковой скорости потока наблюдается устойчивая стационарная картина течения при наличии ламинарных застойных зон, примыкающих к телу (застойная зона за обратным уступом на поверхности тела, застойная зона перед плавным уступом на поверхности тела, передняя срывная зона, образованная носиком иглы, застойная зона, образующаяся при падении скачка на поверхности тела) при больших числах R — порядка 10^4 — 10^6 .

Таким образом, опыт свидетельствует, что в определенных диапазонах изменения чисел M и R при определенных граничных условиях стационарные решения уравнений движения вязкой жидкости существуют и они устойчивы. Вне этих диапазонов и при других граничных условиях обтекание тела с замкнутой срывной зоной носит более (вихревая дорожка Кармана при $M \ll 1$) или менее (пульсирующее течение в ближнем следе за телом при $M > 1$) ярко выраженный нестационарный характер, свидетельствующий о неустойчивости стационарных решений уравнений движения в этих условиях. Теоретического обоснования о существовании устойчивых стационарных течений со срывными зонами в указанных диапазонах пока не существует.

Ниже делается попытка нахождения области существования возможных стационарных течений с замкнутой срывной зоной в таком диапазоне чисел R , при котором течение в области вязкого смещения может быть описано уравнениями Прандтля. При этом граничные условия для течения внутри срывной зоны подбираются так, что картина течения внутри зоны кардинально упрощается и становится возможным использование применяемых в гидродинамике методов анализа.

В первой части (п. 1—4) исследуется поле возможных стационарных течений для случая несжимаемой жидкости. Показано, что только при специальных граничных условиях внутри срывной зоны (идеальный диссипатор) течение около плоской пластины стремится при числе Рейнольдса $R \rightarrow \infty$ к течению Кирхгофа с покоящейся внутри зоны жидкостью. При этом коэффициент сопротивления системы пластина плюс идеальный диссипатор $c_x \rightarrow \pi / (\pi + 4)$, т. е. к величине, вдвое меньшей величины, полученной Кирхгофом для идеальной жидкости.

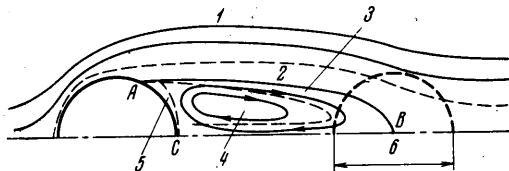
Качественное исследование поля возможных стационарных течений в плоскости $c_x R$ позволило обнаружить существование некоторой вырожденной в линию области, ограниченной по числу R сверху значением $R \approx 10^2$. В этой области стационарные течения обладают особой конфигурацией течения при невязком вихревом присоединении.

Существование связи между конфигурацией течения в области невязкого вихревого присоединения и устойчивостью стационарного решения прослеживается во второй части (п. 6—7) как на отдельных решениях, полученных методами линейной теории гидродинамической устойчивости, так и на известном экспериментальном материале, полученном в широком диапазоне чисел R при дозвуковой и сверхзвуковой скорости потока. Это рассмотрение позволяет сформулировать правило отбора устойчивых стационарных течений со срывными зонами и применить его для анализа сравнительных течений как ламинарных, так и, в некоторых особых случаях, турбулентных.

1. Вырожденное течение в срывной зоне. Рассмотрим картину плоского стационарного течения с замкнутой срывной зоной за телом, обтекаемым потоком несжимаемой жидкости при таких значениях числа Рейнольдса $R = u_\infty d / \nu$ (u_∞ — скорость невозмущенного потока, d — поперечный размер тела), при которых толщина пограничного слоя меньше размера тела (фиг. 1).

Можно выделить следующие характерные линии и области в верхней полуплоскости течения.

Разделяющая линия тока с жидкими участками AB и BC и участком границы тела AC ; области: 1 — внешнего потенциального потока, 2 — внешнего вязкого пограничного слоя и следа, 3 — внутреннего вязкого слоя смешения, 4 — вязкого течения с маломеняющейся завихренностью, 5 — вязкого пограничного слоя вблизи жесткой границы тела с завихренностью противоположного знака, 6 — присоединения.



Фиг. 1

В точках участка AB разделяющей линии тока жидкость имеет скорость u_p , и к жидкости, движущейся внутри зоны, приложено в направлении движения часовой стрелки напряжение трения τ_p . На участке CB скорость жидкости — u_0 , напряжение трения равно нулю. На участке CA скорость равна нулю, напряжение трения, приложенное к жидкости, действует в направлении против часовой стрелки.

При стационарном течении в срывной зоне работа силы трения на участке AB должна быть равна вязкой диссипации энергии внутри замкнутой зоны

$$\int_{AB} u_p(l) \tau_p(l) dl = \mu \int_F \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] df \quad (1.1)$$

Здесь dl — элемент дуги, df — элемент площади сечения зоны, F — площадь сечения, ограниченная линией $ABCA$.

Анализ величин, входящих в подинтегральное выражение в правой части уравнения (1.1), показывает, что при увеличении чисел R , когда толщина областей 3 и 5 уменьшается, градиенты скорости в них заметно превышают градиенты скорости в ядре течения. Основная часть диссипации происходит в этих областях. При этом большая часть энергии диссипируется в той части области 3, которая примыкает к участку AB разделяющей линии тока.

Попытаемся найти условия, при которых картина течения внутри срывной зоны может быть кардинально упрощена. Для получения такого вырожденного течения внутри срывной зоны необходимо:

- 1) исключить диссипацию энергии в области 4,
- 2) свести до пренебрежимо малой величины диссипацию энергии в области 5,
- 3) точно определить диссипацию энергии $(E^{(3)})_{AB}$ в той части области 3, которая примыкает к разделяющей линии тока AB ,
- 4) недостающую для выполнения баланса диссипацию

$$\int_{AB} u_p(l) \tau_p(l) dl - (E^{(3)})_{AB}$$

сосредоточить на участке CB области 3, осуществляя ее в дополнительном элементе — диссипаторе энергии. Предполагается, что этот дополнительный элемент, жестко связанный с телом, создает область с высокими значениями градиентов скорости внутри срывной зоны, в которой осуществляется недостающая для выполнения баланса диссипация (4), а также принимает и передает телу импульс возвратной струи, движущейся к телу из области присоединения. В последующем рассмотрении форма и размеры диссипатора не фигурируют, — он рассматривается как черный ящик, наделенный свойством уменьшать величину постоянных Бернулли, соответствующих разным линиям тока возвратной струи, до заданных значений.

На фиг. 2 представлена картина течения, возникающего при наличии идеального диссипатора, который диссипирует почти всю кинетическую энергию возвратной струи, а также принимает весь импульс возвратной струи, приобретенной на участке AB разделяющей линии тока.

Легко видеть, что в этом случае осуществляется вырожденное течение (без циркуляционного ядра) с постоянным давлением во всей области, ограниченной разделяющей линией тока, за исключением области присоединения.

Вязкий слой смешения развивается здесь при постоянном давлении и постоянной скорости внешнего течения; при этом тангенциальная составляющая скорости внутреннего течения на границе вязкого слоя смешения равна нулю. Заметим, что при условиях, близких к рассматриваемым, имеются точные автомодельные решения [1, 2]. Оценим величину остаточной кинетической энергии, содержащейся в возвратной струе, которая должна быть диссипирована на диссипаторе, а также величину импульса возвратной струи, которую должен воспринять диссипатор.

Определим параметры внутренней части вязкого слоя смешения в сечении S , расположенном в конце срывной зоны, но перед областью присоединения, течение в которой будем рассматривать как невязкое, вихревое¹.

Работа внешнего потока на разделяющей линии тока (1.1) частично диссипировалась при ускорении покоящейся жидкости, частично затрачена на образование движения, кинетическая энергия которого в сечении S равна

$$\frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^0 u^3(n) dn$$

где n — нормаль к разделяющей линии тока. Эта остаточная кинетическая энергия

должна быть диссипирована на диссипаторе с точностью до величины порядка $(v'/u_p)^2$, где v' — скорость подсаживаемой к вязкому слою смешения со стороны покоящейся внутри срывной зоны жидкости, и величины диссипации на участке между сечением S и диссипатором.

Пусть в сечении 1 неавтомодельный вязкий слой смешения имеет некоторое количество движения; оно останется таким же и в сечении 2, ниже по потоку, но при этом увеличится во внутренней части вязкого слоя смешения в сечении 2 и на такую же величину уменьшится во внешней части, так как приобретенное внутренней частью слоя смешения на участке разделяющей линии тока $l_2 - l_1$ количество движения будет

$$\Delta V = \int_{l_1}^{l_2} \tau_p(l) dl$$

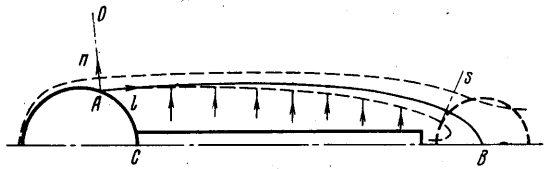
а потерянное внешним потоком — ΔV .

Если в начале срывной зоны во внешнем потоке толщина потери импульса была отлична от нуля, то в сечении S приобретенное внутренней частью потока количество движения будет равно

$$\left[\rho \int_{-\infty}^0 u^2 dn \right]_S = \left[\rho \int_0^{\infty} u(u_k - u) dn \right]_S - \left[\rho \int_0^{\infty} u(u_k - u) dn \right]_0 \quad (1.2)$$

где u_k — скорость на внешней границе слоя смешения. Если использовать понятие толщины потери импульса δ^{**} и ввести понятие толщины приобретения импульса внутренней частью вязкого слоя смешения δ_+^{**} , опре-

¹ Возможность рассмотрения течения в области критической точки как невязкого, вихревого вытекает из анализа уравнений Навье — Стокса в этой области. (Это показано, например, в докладе В. В. Сычева на VIII Симпозиуме по современным проблемам механики жидкостей и газов. Польша, Тарда, 18—23 сентября 1967 г.)



Фиг. 2

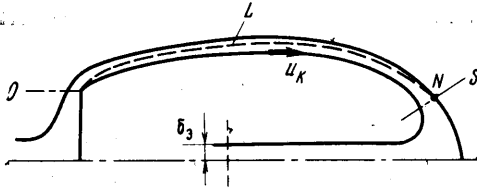
деляемого соотношением

$$\rho u_k^2 \delta_{+}^{**} = \rho \int_{-\infty}^0 u^2 dn \quad (1.3)$$

то из (1.2) имеем

$$(\delta_{+}^{**})_S = (\delta^{**})_S - (\delta^{**})_0 \quad (1.4)$$

Сочетание области постоянного давления за телом с областью внешнего потенциального потока изучалось в теории кавитационных течений. В настоящее время имеется математически непротиворечивая схема течения с возвратной струей (течение Эфроса [3]), обеспечивающая сочетание зоны постоянного давления за телом с внешним потенциальным потоком в широком диапазоне изменения величины статического давления внутри зоны (фиг. 3). Однако должно быть построено гидродинамически непротиворечивое внешнее потенциальное течение около тела с зоной постоянного давления за ним, в котором были бы учтены вязкие эффекты внутри замкнутой срывной зоны и вязкие эффекты во внешней части слоя смешения (эффект вытеснения).



Фиг. 3

В приближении уравнения импульсов теории пограничного слоя течение во внутренней части вязкого слоя смешения при вырожденном течении внутри зоны эквивалентно течению в жидком слое с постоянной Бернулли внешнего потенциального потока и толщиной, равной толщине приобретения импульса δ_{+}^{**} .

Следовательно толщина возвратной струи с постоянной по сечению скоростью, соответствующей давлению в зоне постоянного давления в идеально-жидкостной модели δ° , должна быть равна толщине приобретения импульса в сечении S вязкого течения:

$$\delta^\circ = (\delta_{+}^{**})_S \quad (1.5)$$

Сила тяги T , действующая на идеальный диссипатор в вязком вырожденном течении¹, должна быть равна силе тяги T° , действующей на распределенный сток внутри зоны постоянного давления в идеально-жидкостной модели течения с возвратной струей.

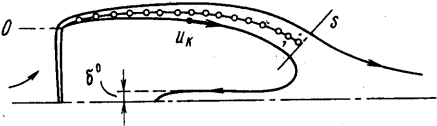
В вязком вырожденном течении идеальный диссипатор является стоком импульса, но не стоком массы. В идеально-жидкостном потенциальном течении, моделирующем рассматриваемое вязкое течение, сток импульса, равный по мощности стоку импульса в идеальном диссипаторе, является, конечно, и стоком массы.

Сопротивление давления X_1 , действующее на тело в вязком вырожденном течении, должно быть равно сопротивлению давления, действующему на тело в идеально-жидкостной модели X_1° .

Вытесняющее действие вязкого пограничного слоя, развивающегося на жестком профиле, на потенциальное течение определяется, как известно, путем размещения на поверхности профиля фиктивных источников, которые обеспечивают отклонение потенциального течения на толщину вытеснения δ^* . Фиктивные источники в действительном вязком течении не имеют потока импульса. В идеально-жидкостной модели массовый поток от этих источников несет и поток импульса.

¹ Здесь и в дальнейшем T , X_1 , X — полная величина сил, действующих для двух областей течения, разделенных плоскостью симметрии.

В рассматриваемом случае течения со свободной границей поток от источников, размещаемых вблизи разделяющей линии тока, деформирует не только внешнее потенциальное течение, но и контур зоны постоянного давления. Чтобы получить из течения Эфроса идеально-жидкостную потенциальную модель, в которой учитываются вязкие эффекты во внутренней и во внешней части вязкого слоя смешения в случае вырожденного течения в срывной зоне, необходимо вблизи свободной границы между сечениями O и S разместить источники; эти источники должны обеспечить в произвольном сечении l массовый расход $\rho u_k(\delta_+^{**} + \delta_e^*)$, где δ_+^{**} и δ_e^* — соответственно толщина приобретения импульса и толщина вытеснения внешней части вязкого слоя смешения в этом сечении (фиг. 4).



Фиг. 4

В самом деле, проведем из точки N , разделяющей линии тока течения Эфроса (фиг. 3) в сечении S , линию L в точку O так, чтобы поток импульса в каждом сечении жидкого слоя, ограниченного линией L и свободной границей, был равен $\rho u_k^2(\delta_+^{**})_l$ и соответственно поток массы $\rho u_k(\delta_+^{**})_l$.

Тогда для внешнего течения линия L станет линией стоков, через которую к сечению l успел пройти массовый расход, равный $[-\rho u_k(\delta_+^{**})_l]$. Для учета вытесняющего действия внешней части вязкого слоя нужно разместить вдоль этой линии как источники, компенсирующие стоки на линии с расходом $\rho u_k(\delta_+^{**})_l$ к сечению l , так и источники, учитывающие вытесняющее действие внешней части вязкого слоя смешения с расходом $\rho u_k(\delta_e^*)_l$ к сечению l , т. е. с суммарным расходом к сечению l , равным $\rho u_k(\delta_+^{**} + \delta_e^*)_l$.

Если в расчете, в первом приближении, пренебречь влиянием вытесняющего действия вязкого слоя на конфигурацию зоны постоянного давления, то погрешность в определении поперечного размера b зоны постоянного давления будет порядка $\delta_e^*/b \sim R_b^{-1/2}$.

При непосредственном использовании течения Эфроса для расчета в первом приближении внешнего потенциального течения около тела с вырожденным течением в срывной зоне, как это следует из изложенного, внешней части вязкого слоя смешения приписывается отрицательная толщина вытеснения, равная по величине толщине приобретения импульса внутреннего течения δ_+^{**} . Иначе говоря, допускается дополнительная погрешность в определении поперечного размера зоны постоянного давления порядка $\sim R_b^{-1/2}$.

Определим теперь в первом приближении (без учета действительного вытеснения) зависимость c_x системы плоская пластина плюс идеальный диссипатор от числа R , предположив, что начальная толщина потери импульса $(\delta^{**})_0 = 0$ и течение в вязком слое смешения автомоделное.

В этом случае с учетом (1.4) сила тяги, действующая на идеальный диссипатор, по определению равна полному импульсу возвратной струи (так как осевая составляющая скорости жидкости, выходящей из диссипатора, равна нулю)

$$\frac{1}{2}T = \rho u_k^2(\delta^{**})_S \tag{1.6}$$

Сопротивление давления, действующее на плохообтекаемое тело, $X_1 \approx \approx X_{1a}$. Сопротивление давления, действующее на тело в течении Эфроса, связано с толщиной возвратной струи δ_0 соотношением, получаемым (см. [4]) из уравнения количества движения

$$\frac{X_{1a}}{2} = \rho u_\infty^2 \delta_0 \left(1 + \frac{u_k}{u_\infty} \right) \frac{u_k}{u_\infty} \tag{1.7}$$

С учетом силы тяги, действующей на сток жидкости возвратной струи $1/2 T_3 = \rho u_k^2 \delta_3$, коэффициент суммарной силы сопротивления, действующей на систему тело плюс сток возвратной струи, будет

$$c_x = \frac{2X}{\rho u_\infty^2 d} = 4 \frac{\delta_3}{d} \left(\frac{u_k}{u_\infty} \right) \quad (1.8)$$

а коэффициент сопротивления давления, действующего на тело, из (1.7)

$$c_{x1} = 4 \frac{\delta_3}{d} \left(1 + \frac{u_k}{u_\infty} \right) \frac{u_k}{u_\infty} \quad (1.9)$$

где d — размер тела.

Безразмерная скорость на разделяющей линии тока в автомодельном решении [1, 2] будет

$$U = \frac{u_p}{u} = 0.587$$

а напряжение трения на разделяющей линии тока из [2] будет

$$\tau_p = 0.2 \sqrt{\mu \rho u_k^3 / l} \quad (1.10)$$

где l — длина дуги вдоль разделяющей линии тока от сечения O до рассматриваемого сечения.

Конфигурация течения, а затем и величина c_x при заданном числе R могут быть определены из условия (1.5), поскольку зависимость длины каверны l_k от толщины возвратной струи δ_3 известна из решения задачи обтекания тела с возвратной струей $\delta_3 = f_1(l_k)$. Из автомодельного решения для вязкого слоя смешения может быть получена зависимость $(\delta_+^{**})_S = (\delta^{**})_S = f_2(l_k)$ при заданном числе R .

Интегрируя (1.10) вдоль разделяющей линии тока до сечения S , расположенного на расстоянии l_k от начала слоя смешения, получаем выражение для толщины потери импульса внешней части вязкого слоя смешения

$$\rho u_k^2 (\delta^{**})_S = 0.4 \sqrt{\mu \rho u_k^3 l_k} \quad (1.11)$$

Подставляя в (1.8) выражение для δ_3 из (1.11) при условиях (1.5) и (1.6), находим

$$c_x = 1.6 \bar{l}_k^{1/2} \bar{u}_k^{1/2} R^{-1/2}, \quad \bar{l}_k = l_k / d, \quad \bar{u}_k = u_k / u_\infty \quad (1.12)$$

Здесь \bar{l}_k — безразмерная длина каверны в течении Эфроса, \bar{u}_k — безразмерная скорость на свободной границе.

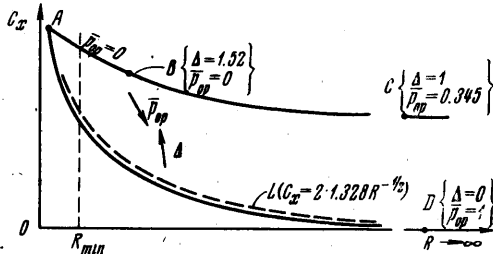
Из (1.8) и (1.9) имеем $c_x = c_{x1} / (1 + \bar{u}_k)$. Как известно [4], при $\bar{l}_k \rightarrow \infty$ в течении Эфроса около плоской пластины $2\delta_3 / d \rightarrow \pi / 2(\pi + 4)$, а величина $c_{x1} \rightarrow 2\pi / (\pi + 4) \approx 0.88$, т. е. стремится к кирхгофовскому значению коэффициента сопротивления. Нетрудно увидеть, что условие (1.5) удовлетворяется в этом случае при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, течение в срывной зоне с идеальным диссипатором стремится к течению Кирхгофа при $R \rightarrow \infty$, а величина коэффициента сопротивления системы пластина плюс идеальный диссипатор, согласно (1.8), при $u_k \rightarrow u_\infty$ стремится к $c_x = \pi / (\pi + 4) \approx 0.44$, т. е. к величине вдвое меньшей полученной Кирхгофом для срывной зоны с покоящейся жидкостью при $\mu \equiv 0$. Это точный результат, так как погрешность, связанная с пренебрежением эффектом вытеснения, стремится к нулю при неограниченном возрастании размера зоны постоянного давления.

Ограничение на область существования стационарных течений по числу R накладывает условие $p_{0p} \geq p_{\infty}$, где p_{0p} — полное давление на разделяющей линии тока при невязком вихревом течении в области присоединения. Из уравнений Бернулли, примененных в области невязкого присоединения к разделяющей линии тока и к линии тока внешнего потенциального течения, следует:

$$\bar{p}_{0p} = \frac{p_{0p} - p_{\infty}}{1/2 \rho u_{\infty}^2} = 1 - \bar{u}_k^2 (1 - U^2) \quad (1.13)$$

При $R \rightarrow \infty$ и $U = 0.587$ $\bar{p}_{0p} \rightarrow 0.345$. С уменьшением числа R \bar{u}_k растет, и при некотором предельном значении числа R_{lim} \bar{p}_{0p} обращается в нуль. Значение \bar{u}_k , соответствующее этому предельному числу R_{lim} , находится из (1.13) при $\bar{p}_{0p} = 0$. При принятом значении $U = 0.587$, $\bar{u}_{k\ lim} = 1.23$ и соответствующее значение коэффициента давления в срывной зоне

$$\bar{p}_k = \frac{p_k - p_{\infty}}{1/2 \rho u_{\infty}^2} = 1 - \bar{u}_k^2 = -0.52$$



Фиг. 5

Определим величины R_{lim} и c_x , соответствующие предельному стационарному течению около пластины с вырожденным течением в срывной зоне. Используя расчетные результаты решения задачи обтекания пластины по схеме Эфроса [4] при $\bar{p}_k = -0.52$, имеем $\bar{l}_k \approx 15$, величина $\bar{u}_k \approx 1.23$, $c_{x1} \approx 0.88 + 0.52$ и из (1.8) и (1.9) $c_x \approx 0.62$.

Тогда, подставляя эти числовые значения в формулу (1.12), получаем $R_{lim} \approx 120$. Таким образом, в плоскости c_x, R (фиг. 5) все стационарные течения около пластины с вырожденным течением в срывной зоне лежат на кривой BC, простирающейся от $R_{lim} \sim 10^2$ до $R \rightarrow \infty$. Вдоль этой кривой c_x системы пластины плюс идеальный диссипатор меняется от ≈ 0.62 до ≈ 0.44 .

2. Невырожденное циркуляционное течение в срывной зоне. Рассмотрим теперь течение в срывной зоне с неидеальным диссипатором, который допускает существование циркуляционного движения в срывной зоне. Бэтчелор [2] показал, что плоское циркуляционное течение с замкнутыми линиями тока при $R \rightarrow \infty$ стремится к течению невязкой жидкости с постоянным значением вихря во всей области циркуляционного течения, за исключением тонкого слоя вблизи границы области, толщина которого стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Рассмотрим границу, отделяющую циркуляционное течение с постоянным значением вихря, от внешнего течения с нулевым значением вихря. Если скорость на граничной линии циркуляционного течения меньше скорости внешнего потенциального течения на этой линии, при $\mu \neq 0$, возникает вязкий слой смешения; при этом напряжение трения на разделяющей линии тока вязкого слоя смешения приводит к ускорению граничного слоя циркуляционного течения.

Поместим поперек линий тока этого граничного слоя циркуляционного течения, получившего ускорение и, следовательно, положительное приращение постоянной Бернулли, диссипатор. Пусть диссипатор снимает не весь, а только дополнительный импульс, приобретенный этим граничным слоем под действием напряжений трения на разделяющей линии тока, и выпускает жидкость с таким же распределением постоянной Бернулли поперек линий тока, которое было в этом слое до его ускорения вблизи разделяющей линии тока. Наличие диссипатора, обладающего описанным

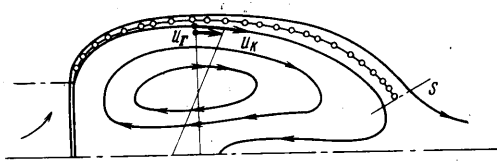
ми свойствами, в срывной зоне с циркуляционным движением позволит удовлетворить уравнениям энергии и количества движения.

Величины скорости внешнего потенциального потока \bar{u}_k и скорости на граничной линии циркуляционного течения с постоянным вихрем $\bar{u}_\Gamma = u_\Gamma / u_\infty$ вдоль общей границы связаны соотношением

$$\Delta = \bar{u}_k^2 - \bar{u}_\Gamma^2 = \text{const} \quad (2.1)$$

вытекающим из условия равенства статического давления во внешнем и внутреннем течении в каждой точке границы [6]. Константа, входящая в (2.1), может быть принята в качестве независимого параметра, определяющего течение и, соответственно, свойства диссипатора¹.

Построение идеально-жидкостной модели, описывающей внешнее потенциальное течение около тела со срывной зоной с циркуляционным течением в ней и учитывающей все вязкие эффекты, проводится аналогично построению, описанному в п. 1. Диссипатор в вязком течении будет стоком импульса; в идеально-жидкостной модели



Фиг. 6

ему соответствует равноценный по мощности сток импульса с каким-то значением мощности стока массы. Причем местоположение этого стока должно соответствовать, строго говоря, местоположению диссипатора в срывной зоне (в этом — отличие от вырожденного случая течения).

Поток массы в любом радиальном сечении циркуляционного течения в идеально-жидкостной модели одинаков (Фиг. 6). Расчет параметров течения в вязком слое смещения

(определение $U(l)$, $\delta^{**}(l)$, $\delta_s^*(l)$) усложняется в связи с переменностью вдоль вязкого слоя разности скоростей на границах слоя, а также статического давления.

При нахождении течения в идеально-жидкостной модели возникают также вычислительные трудности, связанные с тем, что одна область течения удовлетворяет уравнению Лапласа, а другая — внутренняя — уравнению Пуассона. Можно приближенно заменить течение с постоянным вихрем эквивалентным ему по потоку импульса потенциальным кольцом М. А. Лаврентьева [7] и искать решение задачи в классе гармонических функций. В этом приближении проводятся численные расчеты.

3. Область стационарных течений в плоскости $c_x R$. Не располагая данными численных расчетов течений с циркуляционным движением внутри срывной зоны, попытаемся качественно оценить расположение в плоскости $c_x R$ стационарных течений, отвечающих различным значениям параметра Δ (Фиг. 5). Точкам кривой BC соответствуют стационарные течения с идеальным диссипатором в срывной зоне, для которых $\bar{u}_\Gamma \equiv 0$. Параметр Δ меняется вдоль кривой, согласно расчету, монотонно от $\Delta_B \approx 1.52$ до $\Delta_C = 1$. Нижней границей области стационарных течений с циркуляционным движением в срывной зоне в плоскости c_x, R должна быть кривая AD , соответствующая предельно слабому диссипатору, — трению на тыльной стороне пластины. Легко показать, что сопротивление пластины, обтекаемой со срывной зоной, соответствующей точкам кривой AD , составляет величину порядка сопротивления трения этой же пластины, обтекаемой потоком при том же числе R , но под нулевым углом атаки, т. е. кривая AD близка к кривой L , описываемой уравнением $c_x = 2 \cdot 1.328R^{-1/2}$.

Значение параметра Δ на кривой AD не может обратиться в нуль при конечном числе R , так как конечная величина импульса трения на тыль-

¹ Если диссипатором служит часть поверхности трения тела, то параметр Δ определяется условием

$$\left[\rho \int_{-\infty}^0 u(u - u_\Gamma) dn \right]_0 = 0$$

справедливым для периодического по l граничного слоя при больших R .

ной стороне пластины, замедляющего циркуляционное течение внутри зоны, и отсутствие в этом случае ($\bar{u}_h^2 - \bar{u}_r^2 = 0$) ускоряющего импульса со стороны внешнего потока на разделяющей линии тока привело бы к нарушению предположенного равенства $\bar{u}_h^2 - \bar{u}_r^2 = 0$ и к установлению нового циркуляционного течения со значением параметра $\Delta > 0$. Параметр Δ может обратиться в нуль только при обращении в нуль замедляющего импульса трения на тыльной стороне пластины, т. е. при $R \rightarrow \infty$ (точка D). При $R \rightarrow \infty$ параметр Δ , характеризующий эффективность диссипатора, пробегает все значения между нулем в точке D ($c_x \rightarrow 0$) и единицей в точке C ($c_x \rightarrow \pi / (\pi + 4)$). Имея это в виду, а также опираясь на рассчитанное вдоль кривой BC распределение параметра Δ , следует ожидать, что характер поведения линий $\Delta = \text{const}$ в плоскости $c_x R$ близок к представленному на фиг. 5.

Выясним теперь, как изменяется при $R \rightarrow \infty$ форма срывной зоны вблизи пластины и течение вблизи нее с уменьшением эффективности диссипатора, т. е. при движении от точки C к точке D . Точке C , как это следует из изложенного выше, соответствует бесконечно-протяженная срывная зона. Неограниченность размера срывной зоны для точек, расположенных между C и D при $R \rightarrow \infty$, следует из конечности c_x в этих точках.

Утверждению, что течение, соответствующее точке D , также принадлежит классу течений с неограниченными размерами срывной зоны, не противоречит и подход к точке D вдоль кривой AD . Протяженность срывной зоны должна возрастать в течениях, соответствующих точкам кривой AD при $R \rightarrow \infty$, в противном случае ускоряющий импульс, приложенный к циркуляционному течению на разделяющей линии тока, стремящийся к нулю как $R^{-1/2}(\bar{u}_h^2 - \bar{u}_r^2)l_h$, падал быстрее, чем импульс трения на тыльной стороне пластины, стремящийся к нулю как $R^{-1/2}$.

Всем точкам отрезка CD , за исключением вырожденного течения в зоне, соответствующего точке C , отвечают течения с постоянным по срывной зоне значением завихренности $\Omega \sim \sim u_\infty / b$, где b поперечный размер зоны. Поскольку размер зоны неограниченно возрастает при $R \rightarrow \infty$, то течение внутри срывной зоны на расстояниях порядка d от пластины стремится к локально потенциальному.

Следовательно, на тангенциальном разрыве, отделяющем срывную зону, терпит разрыв не завихренность, а постоянная Бернулли, если $\Delta > 0$.

Форма срывной зоны в плоскости xu при покоящейся жидкости в срывной зоне, взятая из известного решения Кирхгофа, представлена на фиг. 7.

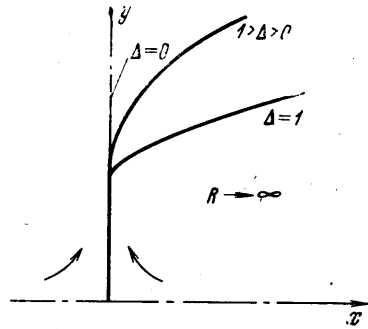
Если допустить существование в том же контуре потенциального течения с $\Delta > 0$, то давление в критической точке на тыльной стороне пластины станет больше p_∞ . Оно повысится и в угловой области рассматриваемого контура, примыкающего к пластине. Для выполнения условия равенства статических давлений по обе стороны контура необходима его деформация — уменьшение кривизны контура в угловой области по сравнению с исходной кривизной. По мере уменьшения параметра Δ кривизна контура должна уменьшаться (фиг. 7). Можно найти форму контура срывной зоны из решения задачи обтекания пластины двумя встречными безвихревыми потоками с заданной разностью постоянных Бернулли при удовлетворении равенства статических давлений и условию непроницаемости на жидком контуре.

Представляет интерес тот случай обтекания пластины двумя встречными безвихревыми потоками с одинаковыми постоянными Бернулли ($\Delta = 0$), который дает локальную картину течения вблизи пластины, соответствующую точке D плоскости $c_x R$.

Легко убедиться, что условиям задачи в этом случае удовлетворяет потенциальное течение, функция тока которого

$$\psi = -kxy \quad \left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -kx, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = ky \right) \quad (3.4)$$

Коэффициент k из условия ограниченности величины скорости на бесконечном (в масштабе размера d пластины) удалении от пластины должен стремиться к нулю, а течение вблизи пластины — к покою (фиг. 8, а).



Фиг. 7

Таким образом, предельному состоянию течения вязкой жидкости около пластины со срывной зоной при $R \rightarrow \infty$ действительно, как это впервые высказал Бэтчелор [6], отвечает значение $c_x \rightarrow 0$. Однако картина течения оказалась весьма далекой от предполагававшейся. Тем не менее полученное течение вблизи пластины удовлетворяет уравнениям гидродинамики и дает иное описание реализации парадокса Даламбера в случае обтекания пластины: в нем учтена необходимость образования срывной зоны из-за действия вязкости, которая обычно не учитывается, (фиг. 8, б).

Обратимся теперь к другому концу области $ABCD$ — к малым числам R .

Кривая AB является границей области возможных стационарных течений; ее точкам соответствуют предельные течения, у которых величина $\bar{p}_{0p} = (p_{0p} - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$ в области невязкого вихревого присоединения обращается в нуль.

Пользуясь расчетными данными по изменению величины \bar{p}_{0p} вдоль кривой BC , меняющейся монотонно по числу R от $(\bar{p}_{0p})_B = 0$ до $(\bar{p}_{0p})_C = 0.345$, учитывая также, что при стремлении параметра $\Delta \rightarrow 0$ величина $\bar{p}_{0p} \rightarrow 1$, можно построить предположительную картину расположения линий $\bar{p}_{0p} = \text{const}$ в области $ABCD$ (фиг. 5).

Конечно, при анализе течений в области малых чисел R необходимо иметь в виду, что исходные предположения о возможности описания течения в вязком слое смещения уравнениями Прандтля, а циркуляционно-го течения внутри зоны — уравнениями Эйлера нарушаются при некотором значении числа R_{min} и при $R < R_{\text{min}}$ течение описывается уравнениями Навье — Стокса.

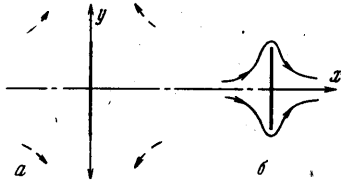
4. Особые свойства течения в области невязкого вихревого присоединения при $\bar{p}_{0p} = 0$. На фиг. 9 приведены возможные варианты распределения давления

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2}$$

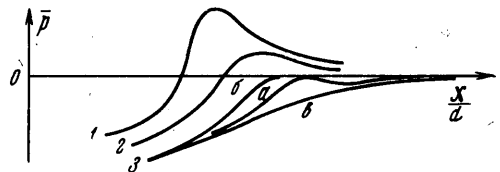
вдоль плоскости симметрии течения при невязком присоединении вихревых потоков в срывной зоне за телом, отвечающие различным точкам области $ABCD$ и ее границ. В максимумах этих кривых имеем $\bar{p} = \bar{p}_{0p}$; при этом положение максимума по оси x определяет положение критической точки за срывной зоной вдоль оси x .

Если для течений 1 и 2, у которых $\bar{p}_{0p} > 0$, критические точки находятся на конечном расстоянии от срывной зоны, то для течения 3, у которого $\bar{p}_{0p} = 0$, мыслимы три типа кривых распределения давления вдоль плоскости симметрии: 3а — максимум давления находится внутри течения, но вниз по потоку от него должен быть по крайней мере один минимум давления; 3б — максимум давления достигается внутри течения, но вниз по потоку от него давление постоянно и равно давлению на бесконечном удалении; 3в — критическая точка находится на бесконечном удалении от застойной зоны. Пользуясь теоремой А. А. Никольского [8] о монотонности изменения угла наклона вектора скорости при перемещении вдоль линии равного давления в плоском дозвуковом вихревом течении газа, можно показать, что режимы течения, описываемые кривыми 3а и 3б, невозможны в рассматриваемом случае.

Если провести линию постоянного давления около предполагаемого минимума давления, лежащего вниз по потоку от максимума давления, соответствующего режиму 3, а то концам этой кривой постоянного давления, лежащим на плоскости



Фиг. 8

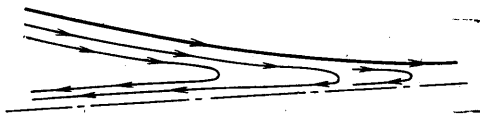


Фиг. 9

симметрии, будут отвечать одинаковые значения угла наклона вектора скорости, а это противоречит теореме Никольского, которая требует конечного приращения угла наклона вектора скорости, если длина линии равных давлений конечна.

Если провести линию постоянного давления из точки, соответствующей предполагаемому максимуму давления в случае режима 3б, то она уходит в бесконечность, где угол наклона вектора скорости также равен углу вектора скорости на плоскости симметрии, т. е. приходим к уже рассмотренному противоречию.

Следовательно, при $\bar{p}_{op} = 0$ невязкое вихревое течение в области присоединения имеет такую конфигурацию (фиг. 10), при которой критическая точка не содержится в конечной области течения. В этой конфигурации течения разделяющая линия тока (выделенная на фиг. 10 жирной линией) ограничивает тонкий ус возвратного невязкого течения, простирающийся вниз по потоку до бесконечности.



Фиг. 10

Таким образом, точкам границы AB области $ABCD$ (фиг. 5) соответствуют стационарные срывные течения, у которых при невязком вихревом присоединении критическая точка не содержится в конечной области течения. Иначе говоря у этих течений конфигурация течения в области присоединения существенно отличается от конфигурации течения с критической точкой, расположенной в конечной области присоединения, которая присуща течениям, заполняющим всю область $ABCD$.

Существование связи между конфигурацией течения в области невязкого присоединения и устойчивостью стационарного течения со срывной зоной прослеживается в п. 6—7.

5. Стационарные течения со срывными зонами при $M > 1$. При $M > 1$ не вся потеря количества движения, вызванная донным сопротивлением тела, содержится в вихревом следе. Большая часть потери количества движения связана с волновым сопротивлением жидкого контура срывной зоны X_2 и содержится в волнах, уходящих вниз по потоку от границ срывной зоны.

Донное сопротивление плоского тела конечной протяженности будет

$${}^{1/2}X = \rho_{\infty} u_{\infty}^2 \delta_{\infty}^{**} + {}^{1/2}X_2$$

Коэффициент донного сопротивления, отнесенный к скоростному напору невозмущенного потока и конечному размеру d тела в области донного среза, будет тогда

$$c_x = 2\delta_{\infty}^{**} / d + c_{x_2}$$

Если $(\delta^{**})_0 = 0$ и течение в следе за срывной зоной рассматривать как невязкое вихревое, то волновое сопротивление жидкого контура срывной зоны может быть записано в виде

$$c_{x_2} = c_{x_2f} (1 - 2\delta_{\infty}^{**} / d)$$

Здесь c_{x_2f} — коэффициент волнового сопротивления жидкого контура срывной зоны, отнесенного к высоте жидкого уступа $d - 2\delta_{\infty}^{**}$.

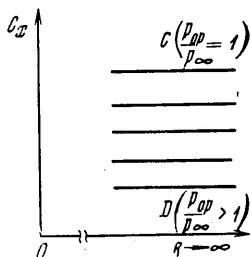
Как видно, волновая часть донного сопротивления зависит от формы жидкого контура срывной зоны и толщины вытеснения следа. Появление волнового сопротивления, зависящего от формы контура срывной зоны, а также зависимость контура срывной зоны от интенсивности циркуляционного течения внутри зоны значительно усложняют задачу нахождения возможных стационарных течений в плоскости $c_x R$ в широком диапазоне изменения свойств диссипатора. Однако в случае вырожденного течения внутри зоны, т. е. при наличии идеального диссипатора, задача существенно упрощается и возможные стационарные течения могут быть найдены. Ограничимся здесь рассмотрением случая вырожденного течения внутри зоны при $R \rightarrow \infty$ и $(\delta^{**})_0 = 0$. Из автомодельного точного решения для ламинарного слоя смешения на границе раздела струи сжимаемого газа с покоящимся газом при $\mu_0 = \text{const}$ из [2], [14] имеем

$$U = \frac{u_p / a_*}{u_k / a_*} = \frac{\lambda_p}{\lambda_k} \approx 0.587 \quad (5.1)$$

Полное давление на разделяющей линии тока в области невязкого присоединения определяется из соотношения

$$\frac{p_{0p}}{p_{\infty}} = \frac{p(\lambda_k)}{p(\lambda_p)p(\lambda_{\infty})}, \quad p(\lambda) = \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (5.2)$$

Статическое давление внутри срывной зоны, имеющей прямолинейную границу, постоянно во всей зоне, $\delta_{\infty}^{**}/d \rightarrow 0$ и $\delta_{\infty}^*/d \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, а $c_x \rightarrow c_{x2f}$. Величина статического давления в зоне, определяющая донное сопротивление, в рассматриваемом случае получается из соотношения



Фиг. 11

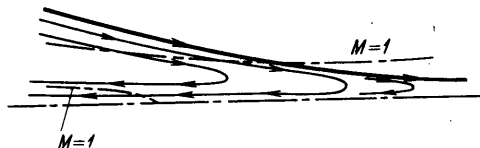
$$\frac{p_k}{p_{\infty}} = \frac{p(\lambda_k)}{p(\lambda_{\infty})} \quad (5.3)$$

Из (5.1)–(5.3) при заданном λ_{∞} можно определить значения p_k/p_{∞} , отвечающие возможным стационарным течениям при $R \rightarrow \infty$ в плоскости $c_x R$ (фиг. 11). Точке D соответствует $p_{0p}/p_{\infty} > 1$, точке C соответствует предельное течение со срывной зоной $p_{0p}/p_{\infty} = 1$ и предельные значения $(p_k/p_{\infty})_{\text{lim}}$ с $c_{x \text{ lim}}$.

Можно показать, что только предельному течению $p_{0p}/p_{\infty} = 1$, так же как предельному течению $\bar{p}_{0p} = 0$ при $M \rightarrow 0$, соответствует конфигурация течения в области невязкого вихревого присоединения с бесконечно-протяженным усом возвратного течения. Все остальные стационарные течения с $p_{0p}/p_{\infty} > 1$ содержат критическую точку в конечной области невязкого вихревого присоединения.

Применяя теорему о монотонности изменения угла наклона вектора скорости вдоль линии постоянного давления, расположенной в дозвуковой области течения, примыкающей к плоскости симметрии, т. е. предполагая, что всегда можно выбрать линию постоянного давления, столь близкую к предполагаемому минимуму давления, что эта линия окажется внутри дозвуковой области течения, устанавливаем невозможность такого минимума давления, т. е. невозможность режима *3a* (фиг. 9).

Предположение о возможности существования режима *3б* приводит к тому, что во всей области дозвукового течения, расположенной вниз по потоку от линии постоянного давления, проведенной из точки предполагаемого максимума давления, давление должно быть постоянно. Но это требует в свою очередь, чтобы и в сверхзвуковой области течения как величина давления, так и величина угла наклона вектора скорости были постоянны. При обтекании плоского тела конечной протяженности с криволинейными ударными волнами, расположенными вверх по течению, такое требование, вообще говоря, невыполнимо. Конфигурация течения в области невязкого вихревого присоединения, отвечающая предельному течению с $p_{0p}/p_{\infty} = 1$, представлена на фиг. 12.



Фиг. 12

6. О существовании связи между конфигурацией течения в области невязкого присоединения и устойчивостью течения. Как известно, исследование устойчивости заданного стационарного течения по отношению к малым возмущениям скорости и давления, зависящим от времени и координат, представляет собой трудную гидродинамическую проблему, которая в рамках линейной теории разрешена лишь для отдельных простых конфигураций вязких стационарных течений. Исследование устойчивости вязкого стационарного течения со срывной зоной, имеющего сложную конфигурацию, связано с трудностями, которые еще не преодолены. Однако исследование гидродинамической устойчивости невязких стационарных течений жидкости связано с меньшими математическими трудностями. Поэтому имеются некоторые результаты, полученные в рамках теории гидродинамической устойчивости для ряда невязких течений несжимаемой жидкости сложной конфигурации с частично свободными, частично жесткими границами, в которых содержится область присоединения или смыкания струй [9, 10].

Среди рассмотренных в этих работах потенциальных течений несжимаемой жидкости, имеющих как свободные ($p = \text{const}$, $\rho' = 0$, где p — статическое давление на границе, ρ — плотность среды, граничащей с рассматриваемым течением), так и прямолинейные жесткие границы, имеются:

а) устойчивые или нейтральные к малым возмущениям во всем диапазоне изменения волнового числа наложенного возмущающего течения, за исключением одного изолированного значения волнового числа, для которого течение неустойчиво. Характерной особенностью конфигурации этих течений является то, что критическая точка отсутствует в конечной области основного течения;

б) устойчивое или нейтральное к малым возмущениям, критическая точка в этом течении находится на жесткой границе конечной длины;

в) неустойчивое к малым возмущениям в широком диапазоне изменения волнового числа течение с критической точкой, расположенной внутри конечной области основного течения;

г) неустойчивое к малым возмущениям в широком диапазоне изменения волнового числа течение с критической точкой, расположенной на жесткой границе бесконечной длины, в конечной области основного течения.

Таким образом, для рассмотренных в этих работах потенциальных течений несжимаемой жидкости с частично свободными, частично жесткими границами неустойчивость получается, если критическая точка содержится в конечной области основного течения и не находится на жесткой границе конечной длины. С другой стороны, течения с критической точкой, не содержащейся в конечной области основного течения, практически устойчивы.

Этот результат линейной теории гидродинамической устойчивости представляется важным для анализа причин неустойчивости течений со срывными зонами, наблюдаемой в опытах в определенных диапазонах R и M и при определенных граничных условиях внутри срывной зоны. Поскольку рассматриваемое нами невязкое течение в области присоединения потока за срывной зоной близко по конфигурации к исследованному в теории гидродинамической устойчивости классу течений с частично свободными, частично жесткими границами, то приведенные выше условия, определяющие устойчивость или неустойчивость потенциальных течений, необходимо иметь в виду при анализе рассматриваемого течения.

Предполагаемое положение критической точки в области невязкого присоединения за срывной зоной на конечном расстоянии от срывной зоны в плоскости симметрии (или на жесткой границе бесконечной протяженности при присоединении за несимметричной срывной зоной к плоской поверхности протяженного тела) создает ситуацию, при которой потенциальные аналоги рассматриваемого течения неустойчивы. С другой стороны, если невязкое вихревое течение в области присоединения за срывной зоной не содержит критическую точку в конечной области, а имеет место конфигурация течения с бесконечно-протяженным усом возвратного течения, то необходимо иметь в виду, что потенциальные аналоги рассматриваемого течения устойчивы.

Если принять в качестве гипотезы, что неустойчивость невязкого течения в области присоединения (связанная, как это следует из приведенных примеров течений, исследованных в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости, с конфигурацией течений в области присоединения) является главной причиной, определяющей неустойчивость всего вязкого течения со срывной зоной, то правилом отбора устойчивых стационарных течений со срывными зонами будет служить не обращение в нуль скорости в конечной области невязкого вихревого присоединения.

Справедливость этой гипотезы может быть выяснена (по крайней мере, в настоящее время) только путем сопоставления предсказанных на основании правила отбора диапазонов существования устойчивых срывных течений с диапазонами существования устойчивых стационарных течений, наблюдаемых в опытах в широкой области изменения чисел R и M . Проведем это сопоставление.

1. *Несжимаемая жидкость.* Согласно расчетным оценкам (п. 1—4) для случая обтекания плоской пластины со срывной зоной, область стационарных течений, удовлетворяющих правилу отбора, ограничена по числу R

сверху величиной $R_{lim} \approx 1.2 \cdot 10^2$. Это число R соответствует сильному диссипатору в срывной зоне; при уменьшении эффективности диссипатора число R разрушения стационарного течения со срывной зоной уменьшается.

Известно, что экспериментальные значения числа R разрушения стационарного течения (называемого в литературе критическим числом R_*), измеряемые в аэродинамических или гидродинамических трубах зависят от отношения поперечного размера d цилиндрического тела к высоте H сечения рабочей части трубы.

Так, согласно работе [11], стационарное обтекание цилиндра круглого сечения со срывной зоной сохраняется до $R_* = 30$ при $d/H = 0.025$ и до $R_* = 62$ при $d/H = 0.10$. Поэтому расчетные значения R_* , определенные для неограниченного потока, необходимо сопоставлять с опытными данными, полученными при малых значениях d/H . С учетом этого обстоятельства, из опытных данных для случая обтекания круглого цилиндра со слабым диссипатором — трением на тыльной стороне цилиндра — следует, что $R_* \approx 30$. При расположении внутри зоны в плоскости симметрии течения разделяющей пластины, длина которой сопоставима с протяженностью срывной зоны, стационарное течение затягивается на большие числа R .

Аквивосу с сотрудниками [12] удалось таким путем увеличить R_* у круглого цилиндра в несколько раз, доведя его до $R_* \approx 170$ при $d/H = 0.05$ (последние опыты Аквивоса², проведенные при меньших значениях d/H , дают $R_* \approx 100$). Оценка величины силы трения, приложенной к разделяющей пластине со стороны возвратной струи в условиях опытов Аквивоса, показывает, что величина силы тяги превышает половину импульса возвратной струи, параметры которой определены для случая вырожденного течения.

Таким образом, разделяющая пластина является сильным диссипатором и полученная в опытах Аквивоса величина $R_* \approx 100$ сопоставима с предсказанной оценкой $R_* \approx 120$ для случая обтекания пластины с предельно сильным диссипатором. Сопоставимы и значения коэффициентов донного давления при $R \approx R_*$: расчетное $\bar{p}_h = -0.52$, экспериментальное $\bar{p}_h = -0.45$.

Конечно, при таком сопоставлении необходимо иметь в виду и различие в форме тел. Однако полученное соответствие представляется весьма обнадеживающим для первой попытки, поскольку возможность получения теоретической оценки числа R_* , при котором возникает вихревая дорожка Кармана, не была, насколько известно, реализована в течение времени, прошедшего с момента обнаружения этой формы течения.

К рассматриваемым срывным течениям по своей конфигурации близки кавитационные течения. То, что кавитационные течения с замкнутыми кавернами при положительных числах кавитации $Q = (p_\infty - p_h) / \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$ являются нестационарными течениями, в настоящее время хорошо известно [13]. Однако применение правила отбора к кавитационным течениям позволяет предсказать существование обширной области устойчивых стационарных кавитационных течений при выпуске газа в каверну и обеспечении отрицательных значений числа кавитации. В этом случае, при невязком смыкании струй с разными значениями постоянной Бернулли, за каверной вообще отсутствует критическая точка, ибо при отрицательном числе кавитации на всех линиях тока, вышедших из каверны, $p_0 > p_\infty$.

2. *Сверхзвуковые скорости.* В п. 5 было показано, что при $R \rightarrow \infty$ и наличии в срывной зоне предельно сильного диссипатора существует множество возможных стационарных течений, удовлетворяющих уравнениям газовой динамики вязкой жидкости, которым соответствуют разные значения величины донного давления p_h / p_∞ . Однако устойчивым стационарным течением следует считать только одно, соответствующее точке C (фиг. 11), поскольку конфигурация течения в области невязкого вихревого присоединения, соответствующая точке C , удовлетворяет правилу отбора.

¹ Расчетные значения R_* для случая обтекания тела, расположенного между параллельными стенками повышаются с ростом d/H .

² Об этом любезно сообщил автору В. В. Сычев.

Чепмен с сотрудниками [14] в тщательных опытах по исследованию срывного течения за обратным уступом на поверхности тела при $1.3 < M < 2.0$ в диапазоне чисел R $0.6 \cdot 10^4 \div 1.4 \cdot 10^4$, как известно, обнаружили существование ламинарного течения внутри срывной зоны при этих больших числах R , донное давление в котором меняется в зависимости от числа M в весьма близком количественном соответствии с рассчитанным для точки C ($p_{0p} / p_{\infty} = 1$). Так же как и в опытах Акривоса, поверхность тела за уступом, граничащая со срывной зоной, в опытах Чепмена является сильным диссипатором, что и дает основания для сопоставления этих экспериментальных данных с расчетными оценками, полученными для случая предельно сильного диссипатора¹. Подытожив изложенное, можно заключить, что гипотеза об определяющем влиянии конфигурации течения в области невязкого вихревого присоединения на устойчивость стационарных течений со срывными зонами подтверждается существующими экспериментальными данными по ламинарным срывным зонам в большом диапазоне изменения чисел R и M . Это позволяет применить ее при теоретическом анализе срывных течений.

7. О применении правила отбора при исследовании срывных течений.

1. *Турбулентное течение в срывной зоне.* Как известно, незамкнутость системы уравнений Рейнольдса, описывающих турбулентное движение жидкости, не позволяет провести теоретическим путем без использования эмпирических количественных данных исследование даже простейших случаев турбулентного течения. Вместе с тем использование эмпирических данных дает возможность расчетным путем определить параметры осредненного турбулентного течения для простых конфигураций течения (пристеночный турбулентный пограничный слой, турбулентный слой смешения на границе струи, вытекающей в затопленное пространство, основной участок турбулентной струи).

Можно ожидать, что удовлетворительные с инженерной точки зрения результаты могут быть получены расчетным путем и при исследовании сложных конфигураций турбулентного течения, если они содержат в «чистом» виде в качестве элементов просты, детально изученные конфигурации турбулентного течения.

Если же в турбулентном течении, имеющем сложную конфигурацию, нельзя выделить в чистом виде такие элементы, то расчетному анализу должно предшествовать накопление эмпирических количественных данных для рассматриваемой сложной конфигурации турбулентного течения. Турбулентное течение в срывной зоне имеет сложную конфигурацию, а эмпирических количественных данных для нее накоплено еще очень мало. Поэтому ограничимся рассмотрением вырожденного течения, в котором турбулентный слой смешения отделяет внешнее течение от покоящейся жидкости внутри срывной зоны с постоянным давлением, так как при рассмотрении турбулентного течения с циркуляционным ядром нельзя уже пренебрегать турбулентными напряжениями трения и диссипацией энергии внутри ядра, для определения которых пока нет эмпирических количественных данных при произвольной форме контура циркуляционного ядра.

Для полностью турбулентного течения в срывной зоне от числа R зависят только характер течения в пограничном слое на поверхности тела до точки отрыва и толщина пограничного слоя в начале турбулентного слоя смешения, определяющие положение точки отрыва на поверхности тела и косвенно влияющие на величины U и τ_p . В самих же уравнениях движения, описывающих течение в турбулентном слое смешения, молекулярная вязкость μ , а следовательно, и число R не содержатся.

Рассмотрим обтекание пластины при $(\delta^{**})_0 \neq 0$ и $M \ll 1$ с вырожденным течением внутри срывной зоны, которое обеспечивается предельно сильным диссипатором.

¹ Следует заметить, что перенесение Чепменом корреляции между p_{0p} / p_{∞} и величиной донного давления, замеченной в опытах при сверхзвуковых скоростях (когда течение имело стационарный характер) и использованной в расчетном методе Чепмена — Корста (подробнее об этом методе будет сказано в следующем пункте) для истолкования опытных данных Рошко [15] по величине донного давления за круглым цилиндром с разделяющей пластиной при $R \approx 10^4$, представляется в свете изложенного выше лишенным оснований, так как при этих числах R в опытах Рошко течение за круглым цилиндром с разделяющей пластиной имело ярко выраженный нестационарный (периодический) характер.

Определяющие параметры турбулентного слоя смешения (U, τ_p) , зависят от $(\delta^{**})_0$ и эмпирической константы σ (величина, пропорциональная углу расширения турбулентного слоя смешения). Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в п. 1 при построении зависимости $c_x = f(R)$ для случая ламинарного слоя смешения, можно при заданном значении $(\delta^{**})_0$ найти возможные стационарные течения для турбулентного вырожденного течения, лежащие на кривой BC в плоскости $c_x, 1/\sigma$ (фиг. 13). Точка B , как и прежде, отвечает предельному стационарному течению $(\bar{p}_{0p})_B = 0$.

Очевидно, только одной из точек этой кривой может соответствовать реальное течение, поскольку величина σ_{exp} — экспериментальная константа турбулентного слоя смешения, не зависящая от формы тела и срывной зоны.

Возможны три случая.

1 случай: $1/\sigma_{\text{exp}} < (1/\sigma)_B$ — предположенное стационарное течение с покоящейся жидкостью внутри срывной зоны не существует. Может существовать течение с циркуляционным ядром, которое, однако, не может быть рассчитано без учета турбулентных напряжений трения и диссипации энергии внутри ядра.

2 случай: $1/\sigma_{\text{exp}} > (1/\sigma)_B$ — предположенное стационарное течение с покоящейся жидкостью внутри срывной зоны не удовлетворяет правилу отбора и не может быть реализовано в действительности как стационарное.

3 случай: $1/\sigma_{\text{exp}} = (1/\sigma)_B$ — предположенное стационарное течение с покоящейся жидкостью внутри срывной зоны существует и, поскольку оно удовлетворяет правилу отбора, может быть реализовано в действительности.

Поскольку величина $(1/\sigma)_B$ зависит от формы тела, а $1/\sigma_{\text{exp}}$ — константа, то вероятность наблюдения в опытах с произвольной формой тела предположенной картины стационарного течения со срывной зоной весьма мала.

Таким образом, расчетный анализ турбулентной срывной зоны с использованием чистого элемента — турбулентного слоя смешения — корректен в тех особых случаях, когда одновременно выполняются два условия:

$$\bar{u}_r \approx 0^1, \quad (1/\sigma)_B \approx 1/\sigma_{\text{exp}} \quad (7.1)$$

При невыполнении условий (7.1) течение в срывной зоне будет нестационарным (т. е. будет обладать повышенным уровнем амплитуды пульсаций скорости в турбулентном слое смешения и иной частотной характеристикой по сравнению с уровнем и частотной характеристикой изолированного (чистого) турбулентного слоя смешения) или сохранит стационарный характер, но будет содержать циркуляционное ядро. И в том и в другом случае расчет, основанный на концепции чистого слоя смешения, не применим.

В свете изложенного очевидной становится некорректность расчетного метода, предложенного Корстом [16] для описания реальных турбулентных течений со срывными зонами. В этом расчетном методе использована концепция чистого турбулентного слоя смешения, но из трех уравнений гидродинамики, описывающих течение, удовлетворяется только одно — уравнение сохранения массы.

Поэтому остается незамеченной необходимость выполнения условий типа (7.1) для реализации предположенной картины течения, вытекающей из рассмотрения полной системы уравнений гидродинамики. Представляется, что общеизвестное расхождение расчетных данных, полученных при помощи метода Корста, с данными систематических французских [17] и английских [18] опытов, в первую очередь связано с тем, что предположенная в расчетном методе картина течения не реализуется в действительности из-за невыполнения в опытах условий типа (7.1). Следует заме-

¹ Т. е. характеристика диссипатора близка к характеристике идеального диссипатора.

тить еще, что неудовлетворение уравнению количества движения в методе Корста приводит к парадоксальному, но, как видно, лишенному оснований выводу о том, что для определения донного давления при наличии турбулентного течения в срывной зоне и отсутствии массообмена между срывной зоной и телом не требуется знания величины экспериментальной константы $C_{\text{срв}}$.

2. *Ламинарное течение в срывной зоне с нефиксированной точкой отрыва.* Экспериментальные исследования этого важного класса показывают, что в широком диапазоне чисел R вплоть до $R \sim 10^6$ при $M > 1$ течение в ламинарной срывной зоне имеет стационарный характер и содержит циркуляционное ядро.

В таком течении имеются две области, расчетный анализ которых существенно различен: область I течения перед срывной зоной вплоть до точки отрыва может быть рассчитана (как это делается во многих работах, использующих различные варианты метода интегральных соотношений) независимо от величины давления внутри срывной зоны или величины угла клина; область II течения между точкой отрыва и присоединением, содержащая циркуляционное ядро, параметры которого зависят от интенсивности падающего скачка или угла клина. Расчет вязкого течения в области II при больших числах R представляет собой трудную задачу, для решения которой, по-видимому, еще не найдено эффективных методов, достаточно точно учитывающих все особенности сложного течения. Следует ожидать, что по мере преодоления трудностей численного расчета стационарного течения возникнет проблема отбора единственного, реализующегося в действительности решения, которое должно быть устойчивым.

В свете изложенного представляется, что отбор должен производиться здесь также по конфигурации течения в области невязкого вихревого присоединения. Для применения правила отбора в этом случае течение в некоторой конечной области присоединения должно рассчитываться как вихревое невязкое.

Поступило 12 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Lessen M. On the stability of the free laminar boundary layer between parallel stream. NASA. Rep., 979, 1949.
2. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, No. 1, pp. 42.
3. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоскопараллельных кавитационных течений. Докл. АН СССР, 1946, т. 51, № 4.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
5. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid. Mech., 1956, vol. 1, pt. 2.
6. Batchelor G. K. A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. J. Fluid. Mech., 1956, vol. 1, pt. 4, p. 388.
7. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
8. Никольский А. А. О плоских вихревых движениях газа. В кн.: Некоторые точные решения уравнений пространственных течений газа. Тр. ЦАГИ, 1949.
9. Ablow S. M., Hayes W. D. Perturbation of free surface flows. Technical Report, No. 1, Office of Naval Research, No. 7 onr-35807, Graduate Division of Applied Mathematics. Brown Univ., 1951.
10. Fox J. L., Morgan G. M. On the stability of some flows of an ideal fluid with free surfaces, Quart. Appl. Math., 1954, vol. 11, No. 4, p. 439—456.
11. Thom A. The flow past circular cylinders at low speeds. Proc. Roy. Soc., 1933, A 141.
12. Grove A. S., Shair F. H., Petersen E. E., Acrivos A. An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder. J. Fluid. Mech 1964, vol. 19, pt. 1, p. 60.
13. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
14. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA. Rep. 1356, 1958.
15. Roshko A. On the wake and drag of bluff bodies, J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 2, p. 124.
16. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4, p. 593—600.
17. Carriere P. Recherches Resentes Effectuels a l'ONERA sur les Problèmes De Re-collement, 7th Fluid Dinamik Symposium, Jurata, Pologne, 1965.
18. Nash J. F. An analysis of two-dimensional turbulent base flow including the effect of the approaching boundary layer. ARC RM, 1963, No. 3344.