

ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ, ВОЗБУЖДЕННОЕ ВИБРАЦИЯМИ КРЫЛА, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

(Москва)

Исследуется поле скоростей, возбужденное вибрациями крыла, распространяющимися по упругой поверхности крыла с конечной скоростью.

Задача газовой динамики сведена к смешанной краевой задаче с подвижной границей для трехмерного волнового уравнения. Решение задачи получено в замкнутом виде, когда крыло движется со сверхзвуковой скоростью по произвольному закону, фронт распространения вибраций представляет собой произвольную кривую, перемещающуюся по поверхности крыла, а кромки крыла являются сверхзвуковыми.

1. Рассмотрим прямолинейное поступательное движение крыла по произвольному закону со сверхзвуковой скоростью $u(t)$ внутри безграничного объема идеальной сжимаемой среды. Начиная с некоторого момента времени t_0 , по упругой поверхности крыла распространяются малые колебания со скоростью $v(t)$.

Нормальная составляющая скорости, обусловленная основным движением, задана на обеих сторонах крыла в виде

$$V_{0n} = -u(t) \alpha \tag{1.1}$$

Здесь α — угол атаки элементов обтекаемой поверхности. Нормальная составляющая скорости, обусловленная вибрациями, задана в виде

$$V_{\Delta n} = A_{\Delta} \tag{1.2}$$

Здесь A_{Δ} — функция времени и точек обтекаемой поверхности. Функции α и A_{Δ} малы и могут быть произвольными интегрируемыми функциями своих аргументов.

Считая, что среда слабо возмущена, рассмотрим задачу об определении поля скоростей в линеаризованной постановке [1].

Будем предполагать движение среды безвихревым и происходящим при отсутствии внешних сил.

Возьмем неподвижную систему осей координат $O_1x_1y_1z_1$. Ось O_1x_1 направим по направлению движения крыла, а плоскость $x_1O_1y_1$ расположим в плоскости движения крыла (фиг. 1).

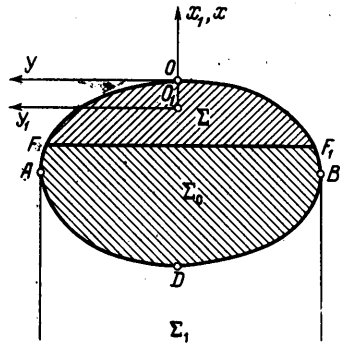
Закон движения крыла задан в виде

$$x_1 = F(t) \tag{1.3}$$

Функция F — произвольная непрерывная функция времени, причем $F'(t) = u(t) > a$, где a — скорость звука в невозмущенной среде.

Потенциал скорости Φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Phi_{x_1x_1} + \Phi_{y_1y_1} + \Phi_{z_1z_1} - 1/a^2\Phi_{tt} = 0 \tag{1.4}$$



Фиг. 1

В области Σ_0 — проекции крыла на плоскость $x_1O_1y_1$ перед фронтом распространения вибраций (линия FF_1 на фиг. 1) производная

$$\Phi_{z_1} = -u(t)\alpha(x_1, y_1, t) = A_0(x_1, y_1, t) \quad (1.5)$$

В области Σ — проекции крыла на плоскость $x_1O_1y_1$ за фронтом распространения вибраций производная

$$\Phi_{z_1} = A_0 + A_\Delta = A(x_1, y_1, t) \quad (1.6)$$

В области Σ_1 — проекции вихревой пелены на плоскость $x_1O_1y_1$

$$\Phi_t = 0 \quad (1.7)$$

Всюду в плоскости $x_1O_1y_1$ вне области $\Sigma_0 + \Sigma + \Sigma_1$ потенциал

$$\Phi = 0 \quad (1.8)$$

Кроме того, в каждый момент времени на задней кромке крыла должен соблюдаться принцип Чаплыгина — Жуковского.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти в полупространстве $z_1 \geq 0$ функцию, которая удовлетворяет уравнению (1.4) и крайевым условиям (1.5) — (1.8).

Решение задачи для $z_1 < 0$ найдется из условия

$$\Phi(x_1, y_1, -z_1, t) = -\Phi(x_1, y_1, z_1, t)$$

2. К решению задачи применим метод, развитый в работе [2]. Обратимся к пространству переменных x_1, y_1 и t и рассмотрим в

нем трехмерную область V (фиг. 2). Область V ограничена поверхностью Σ^* . Поверхность Σ^* представляет собой геометрическое место кривых, изображающих законы движения точек контура крыла $AOBD$ (фиг. 1). Кривая $AOBD$ задана уравнением $y = \psi(x)$ в подвижной системе осей координат $Oxyz$, где

$$x = x_1 - F(t), \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

Поверхность Σ^* определена уравнением

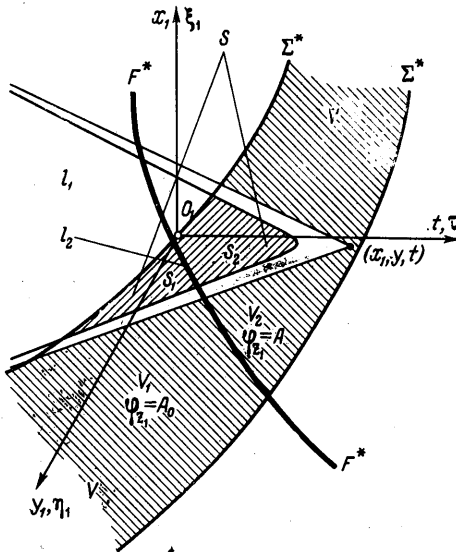
$$\eta_1 = \psi[\xi_1 - F(\tau)] \quad (2.1)$$

Область V замечательна тем, что внутри и на границе ее задана производная Φ_{z_1} .

Пусть кривая FF_1 — фронт распространения вибраций по поверхности крыла — задана уравнением $y = f(x, t)$, в котором время t рассматривается, как параметр. Поверхность F^* , определенная в пространстве x_1y_1t уравнением

$$\eta_1 = f[\xi_1 - F(\tau), \tau] \quad (2.2)$$

разделяет область V на две части V_1 и V_2 с различными значениями производной Φ_{z_1} , согласно условиям обтекания (1.5) и (1.6). Слева от поверхности F^* в области V_1 производная $\Phi_{z_1} = A_0$, справа — в области V_2 производная $\Phi_{z_1} = A$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Решение волнового уравнения возьмем в виде [2]

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, t) = -\frac{a}{2\pi} \iint_{S(x_1, y_1, z_1, t)} \frac{\Phi_{z_1}(\xi_1, \eta_1, 0, \tau)}{R} dS \quad (2.3)$$

$$\tau = t - a^{-1} \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + z_1^2}$$

$$R = \sqrt{(1 + a^2)[(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2] + a^2 z_1^2}$$

Область интегрирования S есть поверхность гиперboloида, определенного уравнением

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + z_1^2 - a^2(t - \tau)^2 = 0 \quad (2.4)$$

и неравенством $\tau < t$.

3. Будем предполагать, что функция ψ на контуре $AOBD$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\psi'(x)F'(t)}{\sqrt{\psi'^2(x) + 1}} \right| \geq a \quad (3.1)$$

Это условие означает, что в каждый момент времени кромки крыла являются сверхзвуковыми. Если выполняется условие (3.1), то для любой точки на крыле или над ним в формуле (2.3) область интегрирования S пересекается только с областью V или с областью, соответствующей невозмущенному состоянию среды впереди волны Маха. Следовательно, производная Φ_{z_1} в области интегрирования является всюду известной.

Имея в виду условие (3.1), представим решение (2.3) в виде

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, t) = -\frac{a}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{A_0(\xi_1, \eta_1, \tau)}{R} dS - \frac{a}{2\pi} \iint_{S_2} \frac{A(\xi_1, \eta_1, \tau)}{R} dS \quad (3.2)$$

Области S_1 и S_2 являются частями поверхности S , которые ограничены кривыми l_1 и l_2 (фиг. 2). Причем область $S_1 \subset V_1$, а область $S_2 \subset V_2$. Кривая l_1 определена уравнениями (2.1) и (2.4); кривая l_2 — уравнениями (2.2) и (2.4).

Имея в виду представление (1.6), перепишем решение (3.2)

$$\Phi = \Phi_0(x_1, y_1, z_1, t) - \frac{a}{2\pi} \iint_{S_2} \frac{A_\Delta(\xi_1, \eta_1, \tau)}{R} dS \quad (3.3)$$

Потенциал Φ_0 есть решение известной задачи об обтекании рассматриваемого крыла неустановившимся потоком, когда крыло движется как твердое тело по закону (1.3) [2]. Второй член в правой части (3.3) — добавочный потенциал, обусловленный вибрациями.

Формула (3.3) дает решение задачи в замкнутом виде, когда крыло движется по закону (1.3), кромки крыла являются сверхзвуковыми, а фронт распространения вибраций представляет собой произвольную кривую, перемещающуюся по поверхности крыла.

4. С точки зрения техники вычисления квадратур удобно от поверхностных интегралов перейти к двойным интегралам с плоской областью интегрирования.

Рассмотрим движение крыла с постоянной скоростью u . В этом случае закон движения (1.3) есть $x_1 = ut$. Введем подвижную систему осей координат $Oxyz$, где $x = x_1 - ut$, $y = y_1$, $z = z_1$ (фиг. 1). Решение (2.3) представим в координатах x , y , z и t , а затем перейдем от поверхностного интеграла к двойным интегралам с плоской

областью интегрирования в плоскости xOy , пользуясь соотношением

$$dS = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta$$

Здесь E, G, F — коэффициенты при дифференциальных элементах в первой основной квадратичной форме. В данной задаче элемент dS выражается как

$$dS = \frac{\sqrt{(u^2 - a^2)^2 r^2 + [a(x - \xi) - ur]^2 + a^2 k^4 (y - \eta)^2}}{(a^2 - u^2)r} d\xi d\eta$$

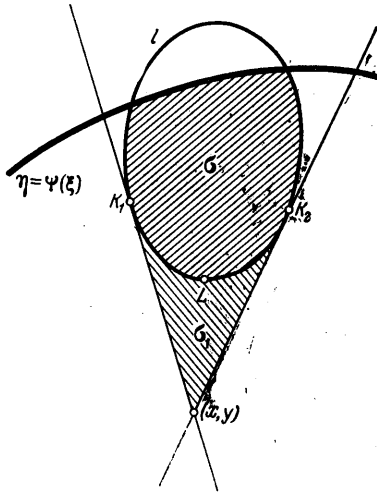
Решение (2.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & \\ = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S^*(x, y, z)} \frac{\varphi_z(\xi, \eta, 0, \tau_1)}{r} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \iint_{S^*(x, y, z)} \frac{\varphi_z(\xi, \eta, 0, \tau_2)}{r} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь для краткости положено

$$\begin{aligned} \tau_1 = t + \frac{u(x - \xi) + ar}{u^2 - a^2}, \quad \tau_2 = t + \frac{u(x - \xi) - ar}{u^2 - a^2} \\ r = \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2(y - \eta)^2 - k^2 z^2}, \quad k = \sqrt{u^2/a^2 - 1} \end{aligned}$$

Область S^* — часть плоскости xOy , ограниченная волной Маха и гиперболой Маха или при $z = 0$ линиями Маха. Через Φ обозначен потенциал скорости Φ в новых переменных.



Фиг. 3

При построении решения существенную роль играет линия пересечения поверхностей S и F^* — кривая l_2 (фиг. 2). Проекцию кривой l_2 на плоскость xOy обозначим через l . Кривая l разделяет плоскую область S^* на части с различными значениями производной φ_z . Заметим, что кривая l всегда имеет точки касания K_1 и K_2 с гиперболой Маха или при $z = 0$ с линиями Маха. Причем точки касания могут быть расположены как на границе области S^* , так и вне ее (фиг. 3).

В соответствии с условиями (3.1), (1.5) и (1.6) решение (4.1) представим в виде формулы

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & \varphi_0(x, y, z) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma(x, y, z, t) + \sigma_1(x, y, z, t)} \frac{A_\Delta(\xi, \eta, \tau_1)}{r} d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma_1(x, y, z, t)} \frac{A_\Delta(\xi, \eta, \tau_2)}{r} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.2)$$

непосредственно по которой может быть вычислен потенциал скорости. В формуле (4.2) область σ — часть области S^* , которая расположена в момент времени t внутри кривой l , а область σ_1 —

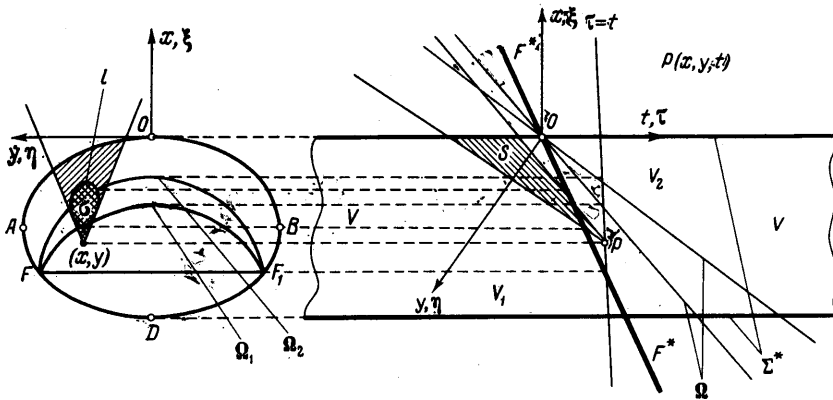
часть области S^* , которая расположена вне кривой l ниже дуги $K_1 L K_2$ (фиг. 3). Функция φ_0 является решением известной задачи об обтекании рассматриваемого крыла установившимся сверхзвуковым потоком [3].

5. Как пример рассмотрим случай, когда фронт распространения вибраций по поверхности крыла представляет собой прямую линию FF_1 , перпендикулярную направлению движения крыла и перемещающуюся противоположно движению крыла с постоянной скоростью v . Если скорость v удовлетворяет неравенству $v > u + a$, то поверхность F^* является плоскостью, определенной уравнением $\xi + vt = 0$, а кривая l — эллипсом, определенным уравнением

$$v^2(x - \xi)^2 + v^2(y - \eta)^2 + v^2 z^2 + 2uv(x - \xi)(vt + \xi) + (u^2 - a^2)(vt + \xi)^2 = 0 \quad (5.1)$$

Аналитический вид решения задачи зависит от взаиморасположения эллипса l и контура крыла $A O B D$, что определяет области интегрирования σ и σ_1 в (4.2).

Рассмотрим момент времени t , принадлежащий интервалу $t_0 = 0 \leq t \leq t_1 = d/u$, где d — длина отрезка OD . В пространстве xyt проведем плоскость $\tau = t$ (Фиг. 4).

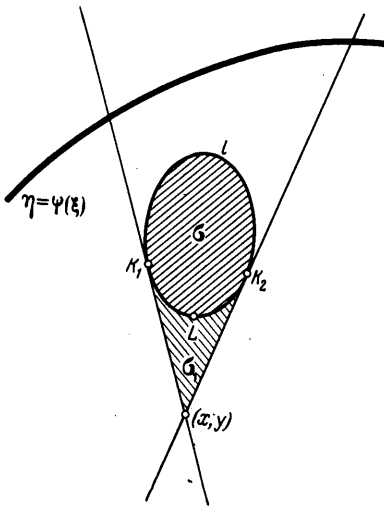


Фиг. 4

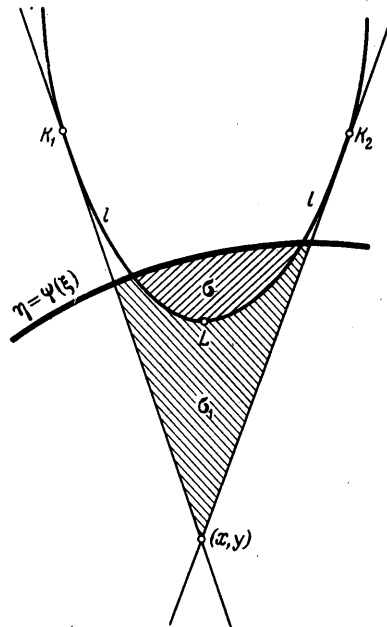
Проекция линии пересечения плоскости $\tau = t$ с плоскостью F^* на плоскость xOy есть прямая FF_1 . Рассмотрим в пространстве xyt семейство конусов, определенных уравнением

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + 2u(X - \xi)(T - \tau) + (u^2 - a^2)(T - \tau)^2 = 0$$

и неравенством $\tau > T$ с вершинами на линии пересечения плоскости F^* и поверхности Σ^* . Обозначим огибающую поверхность этого семейства конусов через Ω . Проекция линии пересечения плоскости $\tau = t$ с огибающей Ω на плоскость xOy



Фиг. 5



Фиг. 6

обозначим через Ω_1 и Ω_2 . Найдем уравнения кривых Ω_1 и Ω_2 в параметрическом виде

$$\begin{aligned} v^2(x^* - \xi)^2 + v^2[\psi(x^*) - \eta]^2 - 2uv(x^* - \xi)(vt + x^*) + (u^2 - a^2)(v^* + vt)^2 &= 0 \quad (5.2) \\ v^2(x^* - \xi) + v^2[\psi(x^*) - \eta]\psi'(x^*) - uv(x^* - \xi) - uv(x + vt) + & \\ + (u^2 - a^2)(x^* + vt) &= 0 \end{aligned}$$

где x^* — параметр.

Линии FF_1 , Ω_1 , Ω_2 разделяют области с различным аналитическим характером решения задачи. Области, заключенной между прямой FF_1 и кривой Ω_1 , отвечает решение (4.2), в котором область σ есть часть S^* , ограниченная эллипсом l , целиком находящимся внутри S^* (фиг. 5). Области, заключенной между кривыми Ω_1 и Ω_2 , отвечает решение (4.2), в котором σ есть часть S^* , отсекаемая эллипсом l , пересекающим контур крыла. При этом точки касания K_1 и K_2 могут находиться как внутри крыла (фиг. 3), так и вне его (фиг. 6). Области, заключенной между кривой Ω_2 и волной Маха, отвечает решение (4.2), когда в обоих интегралах интегрирование распространяется по всей области S^* , т. е. область σ_1 совпадает с областью S^* , а область σ отсутствует.

Если скорость распространения вибраций по поверхности крыла удовлетворяет неравенству $v < u + a$, то кривая l , определенная уравнением (5.1), является гиперболой. Если скорость $v = u + a$, то кривая l является параболой.

6. В частности, когда по упругой поверхности крыла распространяются гармонические колебания с частотой ω , функция

$$A_{\Delta}(x, y, t) = A_1(x, y) \operatorname{Re} \exp i[\omega t + \alpha(x, y)] = \operatorname{Re} A_2(x, y) \exp i\omega t$$

Пользуясь соотношением

$$\exp \left[\frac{i\omega a}{u^2 - a^2} r \right] + \exp \left[-\frac{i\omega a}{u^2 - a^2} r \right] = 2 \cos \left[\frac{\omega a}{u^2 - a^2} r \right]$$

решение (4.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} e^{i\omega t} \iint_{\sigma} A_2(\xi, \eta) e^{i\omega u/u^2 - a^2(x-\xi)} e^{\frac{i\omega a}{u^2 - a^2} r} \frac{d\xi d\eta}{r} - \\ - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} e^{i\omega t} \iint_{\sigma_1} A_2(\xi, \eta) e^{\frac{i\omega u}{u^2 - a^2}(x-\xi)} \cos \frac{\omega a}{u^2 - a^2} r \frac{d\xi d\eta}{r} \end{aligned} \quad (6.1)$$

где заданная функция A_2 определяет амплитуду и начальную фазу колебаний в каждой колеблющейся точке на поверхности крыла.

Поступило 20 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Красилицкова Е. А. Неустановившиеся движения крыла конечного размаха в сжимаемой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
3. Красилицкова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л. Гостехиздат, 1952