ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПОТОКАМИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ ВИХРЕМ И ФУНКЦИЕЙ ТОКА

А. Г. ЯРМИЦКИЙ

(Днепропетровск)

Исследуется обтекание кругового цилиндра потоками несжимаемой жидкости с линейной связью между вихрем и функцией тока.

Обтекание профилей завихренными потоками рассматривалось в ряде работ [1–15], при этом во всех работах, за исключением [15], предполагалась постоянная завихренность [1].

Профиль скорости набегающего потока, близкий к рассматриваемому ниже, имеет место, например, в плоской струе (ламинарной или турбулентной), в следе за плохо обтекаемым телом, в пограничном слое вдоль бесконечной плоскости [4, 13], в турбулентных струйных течениях с обратными токами жидкости [16]. Близкая к рассматриваемой ситуация возникает также при обтекании решетки цилиндров с большим шагом, находящихся в следе за другой решеткой.

1. Постановка задачи и определение функции тока возмущенного течения. Предположим, что течение плоское. Начало координат поместим на оси цилиндра радиуса $r = c$, причем ось x направим по потоку в сторону течения.

Как известно [13], основное уравнение гидродинамики вихревых течений имеет вид

$$\nabla^2\psi = -\Omega(\psi) \tag{1.1}$$

Здесь ψ — функция тока, а $\Omega(\psi)$ — вихрь скорости рассматриваемого течения.

Решение поставленной задачи, прежде всего, сводится к интегрированию уравнения (1.1) при обычных граничных условиях. Положим в этом уравнении

$$\Omega(\psi) = \Omega_0 \pm k^2\psi \tag{1.2}$$

где Ω_0 и k — действительные постоянные величины. При $k = 0$ получаем хорошо изученные [1–14] равномерно завихренные течения.

Таким образом, имеем

$$(\nabla^2 \pm k^2)\psi = -\Omega_0 \tag{1.3}$$

Вследствие линейности уравнений (1.3) будем искать их решение в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \tag{1.4}$$

где ψ_0 — функция тока невозмущенного течения, а ψ_1 — функция тока возмущающего потока, обусловленного присутствием в потоке цилиндра.

В дальнейшем, ради краткости, поток, соответствующий верхнему знаку при втором слагаемом в (1.2), условимся называть потоком (I), а поток, соответствующий нижнему знаку,— потоком (II).

---

[1] В работе [15] приближенно решена задача об обтекании профиля Жуковского несжимаемой жидкостью с параболическим распределением скоростей в набегающем потоке.

Положим далее, что в случае потока (I)

$$\psi_0 = (-A / k) \cos ky + (B / k) \sin ky - \Omega_0 / k^2 \tag{1.5}$$

а в случае потока (II)

$$\psi_0 = (A / k) \operatorname{ch} ky + (B / k) \operatorname{sh} ky + \Omega_0 / k^2 \tag{1.6}$$

где A и B — заданные постоянные величины.

Если теперь подставить (1.4) в (1.3), то, учитывая при этом (1.5) и (1.6), сведем задачу к интегрированию метагармонических уравнений (уравнений Гельмгольца)

$$(\nabla^2 \pm k^2)\psi_1 = 0 \tag{1.7}$$

при следующих граничных условиях:

1) функция тока возмущающего движения ψ_1 должна стремиться к нулю на достаточном удалении от контура цилиндра,

2) на контуре должно выполняться условие непроницаемости, т. е. контур должен быть одной из линий тока.

Для того чтобы удовлетворить последнему условию, целесообразно перейти от декартовой системы координат x, y к полярной r, θ.

Решение первого уравнения (1.7), удовлетворяющее условию на бесконечности, может быть записано в виде

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) Y_n(kr) \tag{1.8}$$

а решение второго уравнения (1.7) — в виде

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) K_n(kr) \tag{1.9}$$

Здесь $Y_n(kr)$ и $K_n(kr)$ — соответственно функция Бесселя и модифицированная бесселева функция (функция Макдональда) второго рода n-го порядка.

Неопределенные коэффициенты A_n и B_n, входящие в выражения (1.8) и (1.9), сравнительно просто могут быть определены из условия непроницаемости цилиндра при $r = c$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 = 0 \tag{1.10}$$

Воспользуемся разложением Якоби — Ангера [17]

$$\exp(\pm iz \sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} [J_{2m}(z) \cos 2m\theta \pm iJ_{2m-1}(z) \sin(2m-1)\theta]$$

(Здесь $J_n(z)$ — бесселевы функции первого рода n-го порядка.)

Полагая последовательно $z = kr$ и $z = ikr$, а затем отделяя действительную и мнимую части, получим, соответственно

$$\begin{gathered}\cos(kr \sin\theta) = J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(kr) \cos 2m\theta \\ \sin(kr \sin\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(kr) \sin(2m-1)\theta\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(kr\sin\theta) &= I_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m I_{2m}(kr)\cos 2m\theta \\ \operatorname{sh}(kr\sin\theta) &= 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1} I_{2m-1}(kr)\sin(2m-1)\theta \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $I_n(kr)$ — модифицированная бесселева функция первого рода n-го порядка.

Принимая контур цилиндра за линию тока и учитывая соотношения (1.5), (1.6), (1.8) — (1.12) при $r = c$, для определения коэффициентов A_n и B_n получим следующие уравнения:

для потока (I)

$$\text{const} = (2/k)\left\{\sum_{m=1}^{\infty}[-AJ_{2m}(kc)\cos 2m\theta + \right.$$

$$\left. + BJ_{2m-1}(kc)\sin(2m-1)\theta]\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)Y_n(kc) \tag{1.13}$$

для потока (II)

$$\text{const} = (2/k)\left\{\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m[AI_{2m}(kc)\cos 2m\theta - \right.$$

$$\left. - BI_{2m-1}(kc)\sin(2m-1)\theta]\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)K_n(kc) \tag{1.14}$$

Если в уравнениях (1.13) и (1.14) приравнять коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами, найдем:

для потока (I)

$$A_n = \begin{cases} (2/k)AJ_n(kc)/Y_n(kc) & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m-1) \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-2/k)BJ_n(kc)/Y_n(kc) & (n = 2m-1) \end{cases}$$

для потока (II)

$$A_n = \begin{cases} (-1)^{1/2n-1}(2/k)AI_n(kc)/K_n(kc) & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m-1) \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^{(n+1)/2}(2/k)BI_n(kc)/K_n(kc) & (n = 2m-1) \end{cases}$$

Имея коэффициенты A_n и B_n, запишем выражения для функций тока возмущенного движения потоков (I) и (II). С точностью до постоянной получим, соответственно

для потока I

$$\psi = \frac{1}{k}(-A\cos ky + B\sin ky) + \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{\infty}\left[A\frac{J_{2m}(kc)}{Y_{2m}(kc)}Y_{2m}(kr)\cos 2m\theta - \right.$$

$$\left. - B\frac{J_{2m-1}(kc)}{Y_{2m-1}(kc)}Y_{2m-1}(kr)\sin(2m-1)\theta\right] \tag{1.15}$$

для потока II

$$\psi = \frac{1}{k}(A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky) +$$

$$+ \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[A\frac{I_{2m}(kc)}{K_{2m}(kc)}K_{2m}(kr)\cos 2m\theta - \right. \tag{1.16}$$

$$\left. - B\frac{I_{2m-1}(kc)}{K_{2m-1}(kc)}K_{2m-1}(kr)\sin(2m-1)\theta\right]$$

При $k \ll 1$, что соответствует уменьшению неоднородности набегающего потока, в обоих случаях с точностью до постоянной находим

$$\psi = B(1 - c^2 / r^2) r \sin\theta$$

Как и следовало ожидать, последнее соотношение совпадает с известным выражением для функции тока возмущенного потока при обтекании кругового цилиндра однородным потоком со скоростью B.

2. Распределение скоростей и давлений по контуру цилиндра. Имея выражения для функции тока возмущенного движения, нетрудно получить и соотношения для расчета распределения скоростей и давлений по контуру обтекаемого цилиндра. В самом деле, в силу условия непроницаемости цилиндра нормальная составляющая скорости в точках на контуре равна нулю, а касательная составляющая, если учесть (1.11), (1.12), (1.15) и (1.16), в зависимости от потока может быть записана в одном из следующих видов:

для потока (I)

$$v_\theta = \frac{2}{k}A\left[\frac{Z_0'(\lambda)}{2} + \sum_{m=1} Z_{2m}'(\lambda)\cos 2m\theta\right] - \frac{2}{k}B\sum_{m=1}^{\infty} Z_{2m-1}'(\lambda)\sin(2m-1)\theta \tag{2.1}$$

$$\lambda = kc, \qquad Z_n'(\lambda) = \begin{cases} -W(J_n, Y_n)/Y_n(\lambda) & (n \neq 0) \\ J_0'(\lambda) & (n = 0) \end{cases} \tag{2.2}$$

для потока (II)

$$v_\theta = -\frac{2}{k}A\left[\frac{M_0'(\lambda)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m M_{2m}'(\lambda)\cos 2m\theta\right] + $$

$$+ \frac{2}{k}B\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m M_{2m-1}'(\lambda)\sin(2m-1)\theta \tag{2.3}$$

$$\lambda = kc, \qquad M_n'(\lambda) = \begin{cases} -W(I_n, K_n)/K_n(\lambda) & (n \neq 0) \\ I_0'(\lambda) & (n = 0) \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $W(J_n, Y_n)$ и $W(I_n, K_n)$ — вронскианы бесселевых функций в точке λ; штрих над буквой означает дифференцирование по r.

Руководствуясь основными соотношениями теории бесселевых функций, упростим выражения (2.2) и (2.4)

$$Z_n'(\lambda) = \begin{cases} -2[\pi c Y_n(\lambda)]^{-1} & (n \neq 0) \\ -kJ_1(\lambda) & (n = 0) \end{cases} \tag{2.5}$$

$$M_n'(\lambda) = \begin{cases} [cK_n(\lambda)]^{-1} & (n \neq 0) \\ kI_1(\lambda) & (n = 0) \end{cases} \tag{2.6}$$

Выражениям (2.1) и (2.3) можно придать более простой вид:
для потока (I)

$$v_\theta = -AJ_1(\lambda) - \frac{4}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{A}{Y_{2m}(\lambda)}\cos 2m\theta - \frac{B}{Y_{2m-1}(\lambda)}\sin(2m-1)\theta\right) \tag{2.7}$$

для потока (II)

$$v_\theta = -AI_1(\lambda) -$$

$$-\frac{2}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{A}{K_{2m}(\lambda)}\cos 2m\theta - \frac{B}{K_{2m-1}(\lambda)}\sin(2m-1)\theta\right) \tag{2.8}$$

Ряды, стоящие в правых частях выражений (2.7) и (2.8), мажорируются соответственно рядами

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|A|}{|Y_{2m}(\lambda)|} + \frac{|B|}{|Y_{2m-1}(\lambda)|}\right), \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|A|}{K_{2m}(\lambda)} + \frac{|B|}{K_{2m-1}(\lambda)}\right) \tag{2.9}$$

В сходимости же последних нетрудно убедиться, если воспользоваться асимптотическими разложениями $Y_n(\lambda)$ и $K_n(\lambda)$ при больших значениях порядка и фиксированном аргументе [17, 18], а затем применить признак Даламбера или Коши. Следовательно, ряды в (2.7) и (2.8) тоже сходятся, причем абсолютно и равномерно.

Переходим к выводу соотношений, позволяющих рассчитать распределение давлений по контуру.

Нетрудно показать, что имеет место следующая лемма.

Лемма. В любом невозмущенном вихревом прямолинейно-параллельном потоке давление постоянно.

Обозначим параметры невозмущенного потока через p_∞, U_∞, ψ_0. Из уравнения Бернулли в дифференциальной форме [13] имеем

$$\frac{dp_\infty}{\rho} + d\frac{U_\infty^2}{2} + \Omega(\psi_0)\,d\psi_0 = 0 \tag{2.10}$$

Для невозмущенного вихревого прямолинейно-параллельного потока

$$\Omega(\psi_0) = -dU_\infty / dy$$

Подставив это выражение в уравнение (2.10), получим $p_\infty = \text{const}$.

Из этой леммы вытекают следующие следствия:

1. Если произвольный контур обтекается вихревым прямолинейно-параллельным потоком, то на большом расстоянии от этого контура давление будет постоянной величиной.

2. В интегральной форме уравнение Бернулли для любого завихренного потока может быть записано в виде

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int\Omega(\psi)\,d\psi = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_0^2}{2}$$

где U_0 —скорость потока на нулевой линии тока ($\psi = 0$) в бесконечной дали от контура.

Для равномерно завихренных прямолинейно-параллельных потоков указанные выводы были получены Жуковским [1] и Чаплыгиным [2].

По аналогии с обтеканием контура потенциальным потоком будем характеризовать распределение давления по контуру цилиндра безразмерной величиной

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{{}^1/_2\rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{v_\theta}{U_0}\right)^2 \tag{2.11}$$

и называть ее коэффициентом давления.

Таким образом, коэффициент давления в какой-либо точке контура, обтекаемого вихревым плоско-параллельным потоком, полностью определяется отношением скорости в этой точке к скорости на нулевой линии тока в бесконечной дали от контура.

В случае, когда $U_0 = 0$

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{{}^1/_2\rho v_1^2} = 1 - \left(\frac{v_\theta}{v_1}\right)^2$$

Здесь через v_1 и p_1 обозначены скорость и давление в какой-либо точке на контуре.

Положение критических точек на контуре цилиндра в потоках (I) и (II) определяется соответственно корнями выражений (2.7) и (2.8).

Анализ этих выражений для значений $\lambda = kc \ll 1$ показывает[1], что в данном случае (как и следовало ожидать) положение критических точек и точек с максимальной скоростью совпадает с их положением в равномерно завихренном плоско-параллельном потоке. Значения максимальных скоростей также совпадают с их значениями в этом потоке.

3. Подъемная сила цилиндра. Контур обтекаемого цилиндра будет линией тока, а вдоль линии тока и в случае вихревого движения уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C$$

Отсюда на контуре

$$p = C - {}^1/_2\rho v_\theta^2$$

Подъемная сила, действующая на цилиндр радиуса c

$$P = -2c \int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} p \sin\theta \, d\theta = \rho c \int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} v_\theta^2 \sin\theta \, d\theta \tag{3.1}$$

Допустим, что поле скоростей возмущенного потока может быть получено путем наложения двух полей, из которых одно $v^{(1)}$ симметрично относительно оси x, а другое $v^{(2)}$ кососимметрично или обладает центральной симметрией относительно центра контура цилиндра. Пусть на контуре поле скоростей

$$v^{(1)}(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \sin(2m-1)\theta, \qquad v^{(2)}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \cos 2m\theta \tag{3.2}$$

Согласно сказанному выше, подъемная сила, обусловленная интерференцией накладываемых полей

$$P = 2\rho c \int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} v^{(1)}(\theta) v^{(2)}(\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{3.3}$$

В результате перемножения рядов (3.2) получим ряд Фурье

$$v^{(1)}(\theta) v^{(2)}(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

---

[1] Параметр k обратно пропорционален некоторому характерному размеру потока (например, толщине пограничного слоя).

коэффициенты которого вполне определенным образом [12] выражаются через коэффициенты рядов-сомножителей. Подставляя этот ряд в выражение (3.3) и производя интегрирование, находим

$$P = -4\rho c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} \beta_n \cos\frac{\pi n}{2} \tag{3.4}$$

Путем несложных преобразований последнему выражению можно придать вид

$$P = \pi\rho c\beta_1 - 8\rho c \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4n^2-1} \beta_{2n} \tag{3.5}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}(a_{2m-2} - a_{2m}), \qquad \beta_{2n} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}(a_{2(m-n)-1} - a_{2(m+n)-1}) \tag{3.6}$$

Так как коэффициенты с нечетными индексами во втором из разложений (3.2) отсутствуют, то $\beta_{2n} = 0$.

Таким образом, формула (3.5) принимает вид

$$P = \pi\rho c\beta_1 \tag{3.7}$$

где β_1 определяется по формуле (3.6). Полагая на контуре

$$v^{(1)}(\theta) = -2U_\infty \sin\theta, \qquad v^{(2)}(\theta) = -{}^1\!/_2\Gamma / \pi c$$

при помощи (3.6) и (3.7) получим формулу Жуковского для подъемной силы цилиндра в безвихревом плоско-параллельном потоке.

Рассмотрим еще в качестве примера обтекание цилиндра круговым равномерно завихренным потоком [12] с угловой скоростью ω. Выберем систему координат так, чтобы центр вращения потока находился в точке $(0, a)$, а центр обтекаемой окружности радиуса c — в начале координат. Тогда набегающий на цилиндр поток можно представить как результат суперпозиции двух потоков — однородного со скоростью $U_\infty = \omega a$, параллельной оси x, и кругового с центром вращения в начале координат. Наложив еще на цилиндр циркуляцию Γ, получим на контуре

$$v_\theta = -2\omega a \sin\theta + \omega c + {}^1\!/_2\Gamma / \pi c$$

Выделим в последнем выражении слагаемые, соответствующие обтеканию цилиндра, потоком с осевой симметрией и потоком с центральной симметрией

$$v^{(1)}(\theta) = -2\omega a \sin\theta, \qquad v^{(2)}(\theta) = \omega c + {}^1\!/_2\Gamma / \pi c$$

С привлечением формул (3.6) и (3.7) найдем

$$P = -\rho U_\infty(\Gamma + \Gamma') \qquad (\Gamma' = 2\omega\pi c^2)$$

Этот результат соответствует [12]. Справедлива следующая лемма.

Лемма. Любой плоско-параллельный поток с линейной зависимостью между вихрем и функцией тока, обтекающий круговой цилиндр, может быть получен в результате суперпозиции двух потоков, из которых один симметричен относительно оси x, а другой кососимметричен.

В самом деле, как это следует из (1.5) и (1.6), скорость невозмущенного течения в случае потока (I)

$$U_\infty = A \sin ky + B \cos ky \tag{3.8}$$

в случае потока (II)

$$U_\infty = A \operatorname{sh} ky + B \operatorname{ch} ky \tag{3.9}$$

В частном случае плоско-параллельного потока с постоянным поперечным градиентом скорости — Ω_0 (равномерно завихренный поток)

$$U_\infty = -\Omega_0 y + U_0 \tag{3.10}$$

Таким образом, эпюра скоростей невозмущенного потока может быть получена путем наложения двух эпюр, из которых одна симметрична относительно оси x, а другая кососимметрична. Следовательно, возмущенный поток действительно обладает свойством, указанным в лемме, и для определения подъемной силы цилиндра в таком потоке, может быть использован метод, рассмотренный выше.

Найдем для примера подъемную силу, действующую на цилиндр в потоке с линейным профилем скорости (3.10). Известно распределение скоростей по контуру цилиндра в таком потоке [1, 11]

$$v_\theta = -2U_0 \sin\theta - \Omega_0 c\,(^1/_2 - \cos 2\theta)$$

Отделяя в этом выражении слагаемые, соответствующие симметричному и кососимметричному обтеканию цилиндра, получим

$$v^{(1)}(\theta) = -2U_0 \sin\theta, \qquad v^{(2)}(\theta) = -{}^1/_2\Omega_0 c + \Omega_0 c \cos 2\theta$$

По формуле (3.6) найдем $\beta_1 = 2\Omega_0 U_0 c$ и, следовательно,

$$P = 2\rho U_0 \Gamma' \qquad (\Gamma' = \Omega\pi c^2)$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в ряде работ [2, 4, 14].

Надо заметить еще следующее. Зная распределение скоростей по контурам решетки кругов, обтекаемой потоком с пилообразным профилем скорости вдали от нее [11], по формулам (3.6) и (3.7) можно также найти аэродинамическую силу, действующую на каждый контур.

Применяя формулы (3.6) и (3.7) для подъемной силы цилиндра в силу (2.7) и (2.8) получим

в случае потока (I)

$$v^{(1)}(\theta) = \frac{4B}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\theta}{Y_{2m-1}(\lambda)}, \qquad v^{(2)}(\theta) = -2A\left(\frac{J_1(\lambda)}{2} + \frac{2}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\theta}{Y_{2m}(\lambda)}\right)$$

в случае потока (II)

$$v^{(1)}(\theta) = \frac{2B}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin(2m-1)\theta}{K_{2m-1}(\lambda)},$$

$$v^{(2)}(\theta) = -2A\left(\frac{I_1(\lambda)}{2} + \frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos 2m\theta}{K_{2m}(\lambda)}\right)$$

Согласно (3.6), получим

$$\beta_1 = \frac{8AB}{(\pi\lambda)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{Y_{2m-1}(\lambda)}\left(\frac{\pi c}{2}Z'_{2m-2}(\lambda) + \frac{1}{Y_{2m}(\lambda)}\right) \qquad \text{(I)}$$

$$\beta_1 = \frac{2AB}{\lambda^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{K_{2m-1}(\lambda)}\left(cM'_{2m-2}(\lambda) + \frac{1}{K_{2m}(\lambda)}\right) \qquad \text{(II)}$$

Здесь $Z'_{2m-2}(\lambda)$ и $M'_{2m-2}(\lambda)$ определяются из (2.5) и (2.6). Привлекая соотношение (3.7), найдем подъемную силу

(3.11)

$$P = \frac{8\rho AB}{\pi k\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{Y_{2m-1}(\lambda)}\left(\frac{\pi c}{2}Z'_{2m-2}(\lambda) + \frac{1}{Y_{2m}(\lambda)}\right) \qquad \text{(I)}$$

$$P = \frac{2\pi\rho AB}{k\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{K_{2m-1}(\lambda)}\left(cM'_{2m-2}(\lambda) + \frac{1}{K_{2m}(\lambda)}\right) \qquad \text{(II)}$$

Ограничиваясь при малых λ первыми членами рядов в (3.11), запишем соответственно

$$P = \frac{8\rho AB}{\pi k\lambda Y_1(\lambda)}\left(\frac{1}{Y_2(\lambda)} - \frac{\pi\lambda}{2}J_1(\lambda)\right) + O(\lambda^4) \tag{3.12}$$

$$P = \frac{2\pi\rho AB}{k\lambda K_1(\lambda)}\left(\frac{1}{K_2(\lambda)} + \lambda I_1(\lambda)\right) + O(\lambda^4) \tag{3.13}$$

При $\lambda \to 0$, что соответствует приближению цилиндра к условиям обтекания потоком с линейным профилем скорости, оба выражения (как и следовало ожидать) принимают вид

$$P = 2\rho ABk\pi c^2 \tag{3.14}$$

За постановку задачи и руководство ее решением автор признателен В. Е. Давидсону.

Поступило 29 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О снежных заносах. Сочинения, т. III. ОНТИ НКТП СССР, 1936, стр. 439.
2. Чаплыгин С. А. Вихревой поток, переваливающий через препятствие в форме круглого цилиндра. Сочинения, т. II. ОГИЗ, 1948, стр. 537.
3. Чаплыгин С. А. К теории метелей. Сочинения, т. II. ОГИЗ, 1948, стр. 567.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
5. Овчинников О. Н., Постников В. И. Симметричный профиль Жуковского в потоке с постоянной завихренностью. Сб. научн. работ студентов Ленингр. политехн. ин-та, 1959, вып. 3, стр. 106.
6. Sanden H. Über den Auftrieb in natürlichen Winde. Zeitschr., Math. Phys., 1912. vol. 61, No. 1—2, s. 225.
7. Tsien H. S. Symmetrical Joukowski airfoil in shear flow. Quart. appl. math., 1943. vol. 1, No. 2, p. 130.
8. Cooms Q. Notes on the forces acting on a two-dimensional airfoil in shear flow in the presence of a plane boundary. Proc. Cambr. Phyl. Soc., 1949, vol. 45, No. 4, p. 612.
9. James D. Two-dimensional airfoils in shear flow. Quart. journ. appl. math., 1951, vol. 4, No. 4, p. 407.
10. Овчинников О. Н. Профиль Жуковского в равномерно завихренном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Техническая механика. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 217, Машгиз, 1961, стр. 37.
11. Овчинников О. Н. Решетка цилиндров в простом вихревом потоке. Техническая механика. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 217, Машгиз, 1961, стр. 51.
12. Микута В. И., Новиков Б. Г. Обтекание профилей круговым потоком. ПМТФ, 1960, № 3, стр. 97.
13. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964, стр. 117, 182, 563.
14. Друкер И. Г. Подъемная сила, действующая на контур в плоском однородно завихренном потоке несжимаемой идеальной жидкости. ПМТФ, 1966, № 2, стр. 109.
15. Rodica Chirilă. Profil Jukovski într-un curent fluid cu distributie parabolică de viteze. «Studii si cercetări mat. Acad. RSR», 1965, vol. 17, No. 9, p. 1443—1448.
16. Гиневский А. С. Турбулентные струйные течения с обратными токами жидкости. Промышленная аэродинамика, вып. 23, Оборонгиз, 1962, стр. 80.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966, стр. 15, 100.
18. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. Изд-во иностр. лит., 1949.
19. Толстов Г. П. Ряды Фурье. Физматгиз, 1951, стр. 157.