

ДИСКРЕТНЫЕ ВИХРИ В СЛЕДЕ ЗА РАЗЛИЧНЫМИ ПРОФИЛЯМИ В ДОЗВУКОВОМ И СВЕРХЗВУКОВОМ ПЛОСКОМ ПОТОКЕ ГАЗА

О. М. КУЗНЕЦОВ, С. Г. ПОПОВ

(Москва)

Определены зависимости чисел Струхала, а также частоты дискретных вихрей, скорости их движения и другие параметры в следе за клиньями и пластинками при малых углах атаки — в зависимости от величины чисел Маха. Исследования проведены способом высокочастотной киносъемки течений через шпирную систему и при помощи фотоумножителя. Результаты представлены в таблицах и на фигурах.

Обозначения

h — поперечное расстояние,
 l — продольное расстояние между вихрями,
 V_∞ — скорость невозмущенного потока в м/сек,
 n_v — частота вихрей для одного ряда вихревой дорожки в сек,
 M_∞ — число Маха для невозмущенного потока,
 S_1 — число Струхала, вычисленное по проекции модели на плоскость, перпендикулярную к направле-

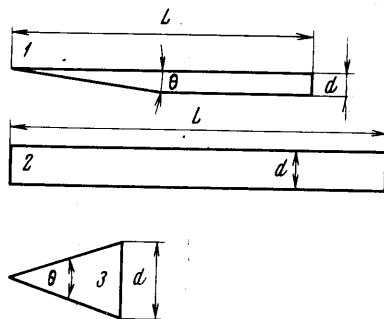
нию невозмущенного потока,
 S_2 — число Струхала, вычисленное по ширине d_2 горловины в следе за телом при $M_\infty > 1$,
 R — число Рейнольдса, вычисленное по d ,
 R_* — критическое число Рейнольдса,
 θ — угол раствора модели,
 α — угол атаки,
 L — длина пластины по направлению потока в мм.

1. Установка модели и способ измерений. Дискретные вихри в плоском потоке за круговыми цилиндрами при $M_\infty < 1$ и $M_\infty > 1$ экспериментально изучались и описаны в работе [1]. Здесь приводятся результаты изучения в тех же условиях обтекания других профилей, предпринятого с целью установить, появляются ли периодические дискретные вихри в условиях, отличных от [1], когда изменена форма профиля, угол атаки или другие параметры.

Исследования проводились на той же газодинамической трубе, применялись прежние способы измерения и вычисления параметров потока [1]. Моделями служили пластины 1 и 2, два клина 3 с углами раствора $\theta = 10^\circ, 30^\circ$ (фиг. 1), которые удерживались в потоке упором торцов в противоположные стенки рабочей части трубы, под и потолок которой перфорированы. Визуализация потока у профиля и в следе за ним осуществлялась также [1] высокочастотной киносъемкой при помощи камер ККС-1 и СФР-1 через установку Теплера ИАБ-451 с осью световых лучей, ориентированный без шпир параллельно образующей профиля (фиг. 2—9). Кроме того, для составления представлений о пространственном строении вихрей в следе, производилась киносъемка также при повернутой на 90° модели и плоском обтекании, когда световые лучи оптической системы без возмущений были перпендикулярны образующим профилю.

В нескольких случаях для контроля периодичности явлений вихрей в следе был применен фотоумножитель ФЭУ-35, с направлением потока световых лучей вдоль образующей профиля. Все опыты проводились при числах Рейнольдса $R < R_*$, вычисленных по толщине профиля, и при определенных числах Маха $M_\infty < 1$ и $M_\infty > 1$.

§ 1. Дискретные вихри в следе за клиньями и пластинками при $M_\infty < 1$. Проведенные киносъемки обтекания газом всех названных профилей последовательно при числах $M_\infty = 0.2, 0.3 \dots 0.9, 0.95$ на углах атаки $\alpha = 0^\circ$, а также при $\alpha = 10^\circ$ для клина с углом раствора $\theta = 30^\circ$, показали во всех случаях явные дискретные вихри в следе за профилем в виде двухрядной шахматной дорожки из нескольких пар вихрей. Эти вихри отчетливо видны на кадрах в виде малых облачков (темных либо светлых) и образуют расходящуюся дорожку, в которой отношение h_0 поперечного расстояния между вихрями h к продольному расстоянию l возрастает главным образом за счет увеличения h по мере удаления от профиля. Типичные кадры из полученных киноплёнок для случая клина и пластинки при нулевом угле атаки и $M_\infty = 0.6$ и 0.9 приведены на фиг. 2 и 4. Такие плёнки просматривались на кинопроекторе и затем обрабатывались для получения вспомогательных величин v_v, n_v



Фиг. 1

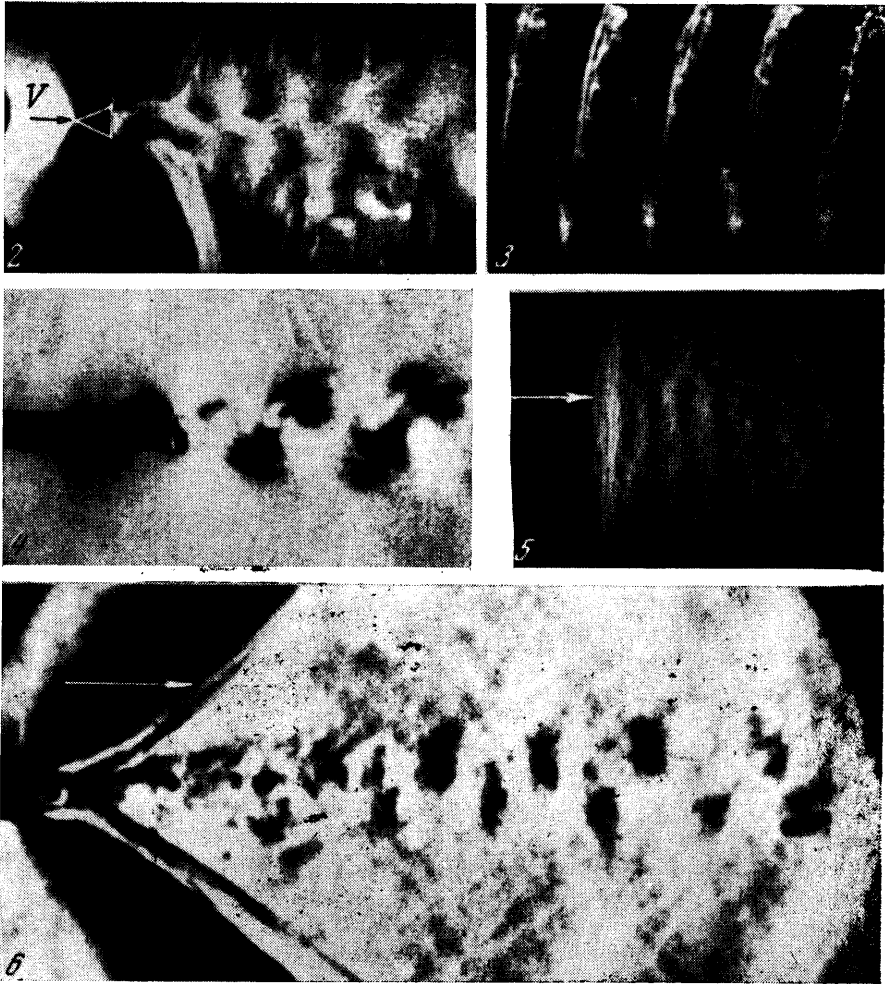
и др. Некоторая недостаточность в определении точной величины и формы вихря, положения его центра и перемещения, как они представлены на фотоснимках (фиг. 2, 4), общая сложность опытов и др. допускали только приближенное определение ряда из названных величин. Поэтому величины некоторых из остальных параметров вычислены также приближенно; но так как обрабатывалось большое число, по существу, однотипных данных опытов, то точность результатов можно считать приемлемой. Величины параметров невозмущенного потока и течения в следе для всех профилей при указанных числах M_∞ , числах Рейнольдса R и углах атаки приведены в табл. 1.

Таблица 1

M_∞	V_∞	v_B	l	h_0	n_B	S_1	$R \cdot 10^{-5}$
Острая пластина, $L = 80$ мм, $\theta = 10^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $d = 5$ мм							
0.4	130	107	17.5	0.298	6100	0.23	0.48
0.6	191	157	17.5	0.330	9000	0.24	0.73
0.8	248	210	17.5	0.330	12000	0.24	1.07
0.9	276	236	17.5	0.340	13500	0.24	1.24
0.95	284	249	17.5	0.310	14250	0.25	1.32
Тупая пластина, $L = 100$ мм, $\alpha = 0^\circ$, $d = 10$ мм							
0.3	98	88	37	0.280	2400	0.25	0.63
0.4	129	114	37	0.280	3100	0.24	0.96
0.9	270	237	37	0.300	6400	0.24	2.48
Клин, $\theta = 10^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $d = 10$ мм							
0.1	33	28	35	0.300	800	0.24	0.25
0.3	99	84	35	0.320	2400	0.24	0.63
0.5	161	133	35	0.290	3800	0.23	1.220
0.6	191	160	35	0.300	4600	0.24	1.46
0.7	227	193	35	0.300	5500	0.25	1.73
0.8	255	217	35	0.320	6200	0.25	2.15
0.9	276	228	32.5	0.320	7000	0.25	2.48
Клин, $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $d = 10$ мм							
0.1	33	29.5	37	0.330	800	0.24	0.25
0.2	65.6	51.4	37	0.300	1400	0.22	0.52
0.3	98	81.4	37	0.330	2200	0.22	0.63
0.4	130	107	37	0.310	2900	0.22	0.96
0.5	161	133	37	0.330	3600	0.22	1.22
0.6	191	163	37	0.310	4400	0.23	1.46
0.7	219	185	37	0.350	5000	0.23	1.73
0.8	248	215	37	0.280	5800	0.23	2.15
0.9	276	228	37	0.330	6500	0.23	2.48
Клин, $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $d = 10$ мм							
0.4	130	114	37	0.320	3100	0.24	0.96
0.6	191	163	37	0.330	4400	0.23	1.46
0.8	248	204	37	0.340	5500	0.22	2.15

Из этой таблицы видно почти постоянство чисел Струхала при различных числах M_∞ и R , что дает, следовательно, линейную зависимость частот образующихся вихрей от величины скорости невозмущенного потока. Из таблицы видно также сохранение почти постоянной величины отношения h_0 , вычисленной для первой пары вихрей в следе за различными профилями и при различных величинах чисел M_∞ и $R < R_*$. Величины относительных скоростей вихрей $v_{B0} = v_B / V_\infty$ также близки к постоянной величине, немного отличающейся от значения ее в случае течения несжимаемой жидкости. В общем в условиях газодинамического обтекания пластинок и клиньев при $M_\infty < 1$ и $R < R_*$ получены явные дискретные вихри в двухрядной дорожке почти с шахматным распределением и почти несжимаемой с такими же характерными параметрами, как и в несжимаемой жидкости за соответствующими профилями.

При пробных киносъемках на углах атаки $\alpha > 5^\circ$ у клина с углом раствора $\theta = 10^\circ$ и на углах $\alpha > 15^\circ$ у клина с углом раствора $\theta = 30^\circ$ на большей части кадров не получилось типичной несколько расходящейся двухрядной дорожки вихрей: в следе той поверхности профиля, где отрыв потока происходит вблизи задней кром-

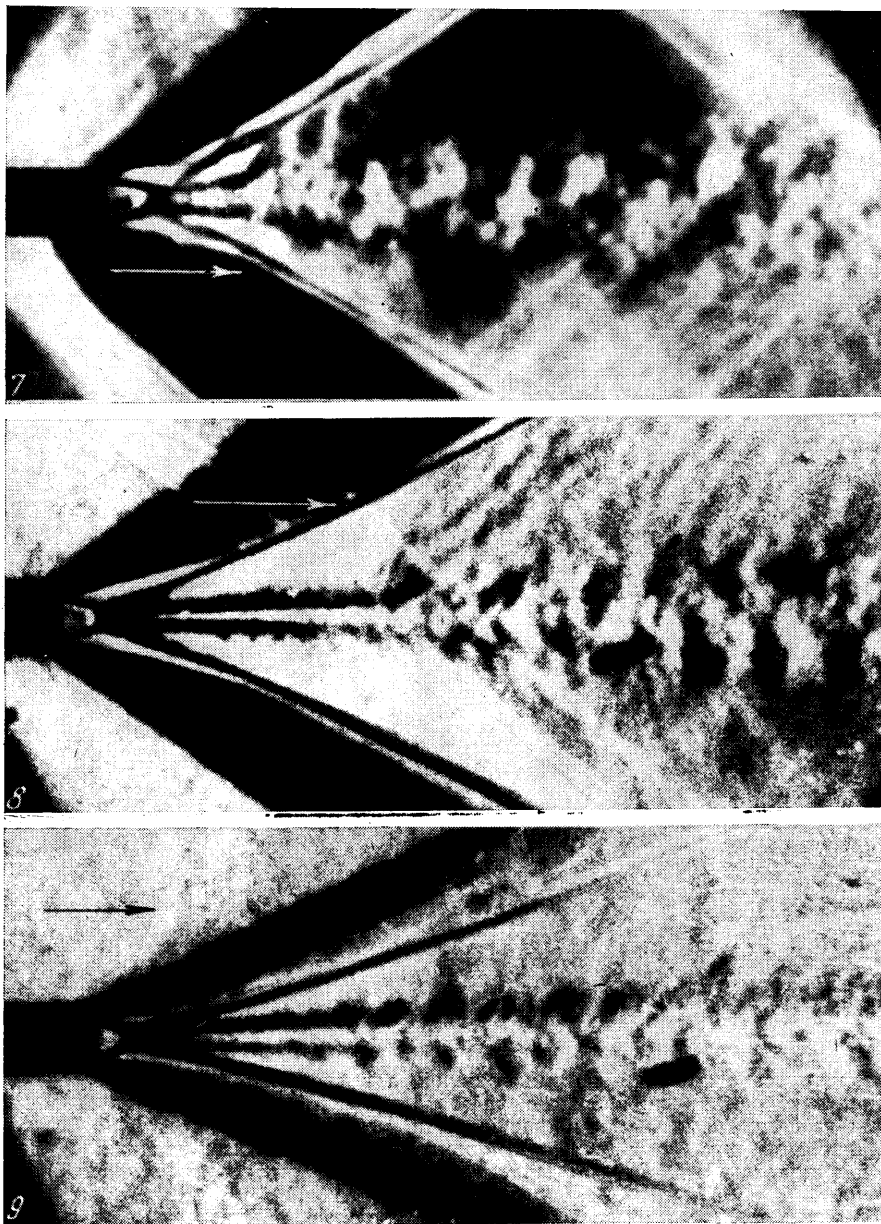


Фиг. 2—6

ки, получилась однорядная дорожка вихрей, а в следе той поверхности, где срыв получался вблизи передней кромки, часто получалась срывная зона, простирающаяся над всей щекой клина; в меньшей части случаев за этой стороной получалась однорядная дорожка, соответствующе смещенная относительно дорожки за другой щекой клина так, что они обе давали двухрядную типичную схему расположения вихрей.

По-видимому, из-за срыва у передней кромки и неустойчивости на этой стороне не мог всегда получаться пограничный слой с достаточным по величине градиентом вихревой интенсивности для последующего формирования дискретных вихрей в следе после срыва. Все же получавшаяся всегда на одной стороне однорядная дорожка дискретных вихрей и иногда — однорядная дорожка на другой стороне клина имеют приблизительно те же параметры, которые были бы при типичной двухрядной почти шахматной дорожке у клина с углом атаки $\alpha < \frac{1}{2}\theta$ (при этом условии приблизительно будет выполняться теорема Томсона о сохранении циркуляции).

Периодичность схода вихрей в следе профиля была показана также применением электронного фотоумножителя (ФЭУ-35), световой поток на который подавался параллельно оптической оси шпирной системы при обтекании клина с углом раствора $\theta = 30^\circ$ и пластинки толщиной 5 мм под углом атаки $\alpha = 0^\circ$ при $M_\infty = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ и 0.9 . Световой луч проходил в следе клина и пластинки через фиксированную точку относительно клина или пластинки, выбранную там, где проходили вихри следа. Полученные кривые на катодном осциллографе представляют несколько раздутые, но довольно регулярные периодические формы, частоты которых не отли-



Фиг. 7—9

чаются от частот вихрей по киносъемкам (фиг. 3). Киносъемка продольного расположения вихрей в следе за круговым цилиндром вдоль размаха (в плане) проводилась при $M_\infty = 0.4, 0.6, 0.8$ и 0.9 . Один такой киноснимок, относящийся к круговому цилиндру $M_\infty = 0.9$, приводится на фиг. 5. Здесь видны в следе довольно прямые формы периодических вихревых шнуров, расположенных приблизительно параллельно размаху цилиндра. В иных случаях такие деформации вихревых шнуров получались несколько больше или меньше. Но в целом всюду видны первые жгуты прямой формы и всегда видно дискретное расположение других, почти прямых четырех-пяти жгутов в следе.

Это доказывает синфазность схода вихрей с цилиндра по размаху и объясняет мощность их воздействия на цилиндрические тела при колебаниях и в других явлениях.

2. Дискретные вихри в плоском следе за пластинками при $M_\infty > 1$. Эксперименты проведены при числах $M_\infty = 1.2, 1.5, 1.75$ и 2.5 и числах R в интервале $1.0 \cdot 10^5 < R < 6 \cdot 10^5$, вычисленных по толщине пластинок $d = 5$ мм при угле атаки $\alpha = 0^\circ$.

При всех этих числах M_∞ в следе за пластинками установлены более или менее определенные регулярные расходящиеся дорожки, образованные несколькими парами вихрей. Однако эти дорожки не всегда имеют однообразную шахматную структуру, как это наблюдалось почти всегда при $M_\infty < 1$ и в течениях несжимаемых жид-

Таблица 2

M_∞	l	ΔS	v_B	$n_B \cdot 10^{-3}$	V_∞	S_1	d_2	S_2	v_{B0}	$R \cdot 10^{-5}$
------------	-----	------------	-------	---------------------	------------	-------	-------	-------	----------	-------------------

Пластина, $\theta = 10^\circ$, $d = 5$ мм, $\alpha = 0^\circ$, с острой передней кромкой, $L = 90$ мм

1.2	13.5	1.9	300	22.3	360	0.31	4	0.248	0.83	1.0
1.5	12	2	312	26	402	0.325	3.5	0.226	0.78	1.25
1.75	6	2.2	343	58	450	0.64	2.7	0.35	0.76	1.5
2.5	5	2.5	390	78	543	0.70	2.5	0.35	0.72	6

Пластина, $d = 5$ мм, с плоской передней кромкой, $\alpha = 0^\circ$, $L = 60$ мм

1.2	14	1.9	300	22.3	360	0.31	4	0.248	0.83	1.0
1.5	12.5	2	312	25	400	0.31	3.25	0.2	0.78	1.25
1.75	6.6	2.2	343	56	448	0.63	2.8	0.35	0.76	1.5
2.5	5	2.5	390	78	543	0.7	2.5	0.35	0.72	6

костей и газов. И все-таки во всех случаях по фотоснимкам можно приблизительно определить взаимное расположение вихрей таких конфигураций, проследить их перемещение при переходе от одного кадра к другому, определить частоту n_B вихрей и другие параметры. Такие данные представлены в табл. 2, где: ΔS — пройденное вихрем расстояние в мм за время $\Delta t = 1/156 \cdot 10^3$ сек; d_2 — ширина горловины в следе в мм; S_1 и S_2 — числа Струхала, отнесенные к величинам d и d_2

$$S_1 = \frac{n_B d}{V_\infty} \quad S_2 = \frac{n_B d_2}{V_\infty}$$

Несколько новых фактов обнаруживается в явлении дискретных вихрей при значениях $M_\infty > 1$.

Прежде всего, скорость v_{B0} вихрей в следе оказывается меньшей, чем она была при $M_\infty < 1$ и при течениях несжимаемых жидкостей и газов, где приблизительно v_{B0} — почти постоянная и по величине $v_{B0} \approx 0.85$ (табл. 2).

Наличие двух хвостовых скачков уплотнения за телом при $M_\infty > 1$ с большим или меньшим углом раствора и более или менее узкой горловины в зависимости от величины числа M_∞ изменяет схему движения пограничного слоя, сходящего с боковых сторон тела при плоском его обтекании. Пограничный слой с каждой боковой стороны тела срывается в придонную область, затем проходит горловину и за ней окончательно формируется в дискретный вихрь верхнего или нижнего ряда. На фиг. 6 приводится фотоснимок следа за пластинкой с плоской передней кромкой при $M_\infty = 1.2$, на котором отчетливо видна медленно расходящаяся двухрядная вихревая дорожка с шахматным расположением. При числе $M_\infty = 1.2$, близком к единице, горловина широкая, движение пограничного слоя мало стесняется горловиной, и при большом угле раствора хвостовых скачков вязкое течение мало отличается от дозвукового; структура дискретных вихрей регулярна и вихри сформировываются вблизи горловины на расстоянии нескольких единиц ее ширины. Такой же вид фотоснимков для пластинки с острой передней кромкой при $M_\infty = 1.2$ и для обеих пластинок при $M_\infty = 1.5$ (фиг. 7). Различие получается только в несколько менее отчетливой структуре дискретных вихрей дорожек; но все они имеют строение, близкое изображенному на фиг. 6. Скорость движения вихрей v_B относительно тела при этом немного более 300 м/сек (табл. 2).

При $M_\infty = 1.75$ и $M_\infty = 2.5$ структура вязкого следа резко изменяется. На фиг. 8 приводится фотоснимок следа за пластинкой с острой передней кромкой при $M_\infty = 1.75$, как типичный для этих чисел M_∞ у обеих пластинок. Здесь за суженной горловиной между хвостовыми скачками с небольшим углом раствора видна как бы слабо расширяющаяся струя вязкого газа, вытекающая из донной области через горловину. Фактически это — область почти постоянной плотности на оси, но с резким изменением ее наружу, где виден сужающийся прилегающий слой, сверху и снизу, от осевой области, типа скачка в поперечном направлении. В этом слое заметны иногда регулярные всплески, частота которых приблизительно вдвое больше

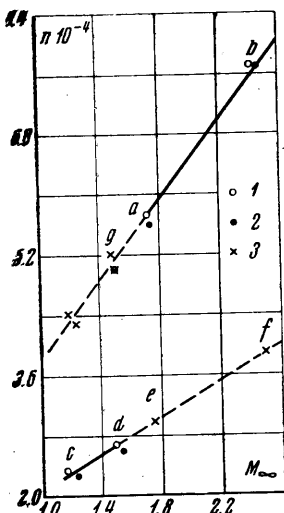
частоты основных дискретных вихрей дорожки. Только на расстоянии около 20 ширины горловины здесь начинается заметное формирование дискретных вихрей расходящейся двухрядной дорожки с шахматным (антисимметричным) расположением их.

При $M_\infty = 2.5$ формирование дискретных вихрей в вязком следе за горловиной происходит несколько иначе, чем при $M_\infty = 1.75$, вследствие роста тех всплесков, о которых говорилось при описании фиг. 8. Эти всплески концентрируются на более близком расстоянии от горловины, чем при $M_\infty = 1.75$, и далее образуют двухрядную расходящуюся дорожку дискретных вихрей (фиг. 9). Однако эти вихри образуют симметричную двухрядную дорожку, а не обычную антисимметричную. Насколько известно, дорожки такого вида экспериментально не наблюдались ни в газодинамических плоских течениях, ни в несжимаемых. Но в работе [2] был получен «неожиданный» результат: вихри двухрядной симметричной дорожки могут быть устойчивыми (при возмущениях одного вихря).

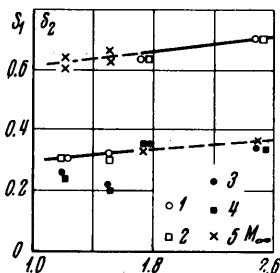
В тесной связи со структурой двухрядных дорожек дискретных вихрей стоят частоты вихрей $n_v(M_\infty)$, показанные в табл. 2. Зависимости $n_v = n_v(M_\infty)$ для обеих пластинок представлены на фиг. 10, где получаются две прямые вида $n_v = m M_\infty$ с экспериментальными точками вблизи ab и cd (цифрами 1 и 2 обозначены острая и тупая пластины).

Замечательно при этом, что если частоты, соответствующие точкам около a и b при $M_\infty = 1.75$ и $M_\infty = 2.5$, уменьшить вдвое, то получатся точки вблизи e и f на прямой cd ; а если экспериментальные частоты около точки d при $M_\infty = 1.5$ увеличить вдвое, то получится точка g прямой ab . Удвоенные частоты при $M_\infty = 2.5$ можно объяснить перестройкой вихревой двухрядной дорожки на симметричную структуру (фиг. 9), но удвоенные частоты при $M_\infty = 1.75$ непонятно, если иметь в виду достаточно отчетливую антисимметричную структуру двухрядных дорожек (фиг. 8). Соответственно раздвоению частот вих-

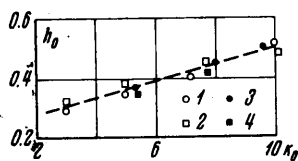
рей $n_v(M_\infty)$ (фиг. 10) получаются также две линейные зависимости $S_1(M_\infty)$; обе они также получены добавлением точек S_1 , увеличенных либо уменьшенных вдвое при соответствующих величинах M_∞ (фиг. 11, где 1, 2 — величины S_1 для пластинок с острой и тупой передними кромками, а 3 и 4 — величины S_2 для тех же пластинок соответственно). Но числа $S_2(M_\infty)$ расположены в более узкой области, чем $S_1(M_\infty)$, и дают точки, раз-



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

бросанные в полосу $S_2 = 0.2$ и $S_2 = 0.4$, т. е. в среднем около $S_2 = 0.3$ (фиг. 11).

Наконец, для представления о зависимости ширины дорожки h следа от расстояний K соответствующих вихрей до задней кромки профиля были определены и построены $h_0(K_0)$, где $K_0 = K/d$. Так получилась довольно точно прямая линия из данных для обеих пластинок при $M_\infty = 1.2$ и 1.5 (фиг. 12, где цифрами 1 и 2 обозначены величины h_0 при $M_\infty = 1.5$; а цифрами 3 и 4 — при $M_\infty = 1.2$ — соответственно для пластинок с острой и тупой передними кромками), проходящая через точку ($h_0 = 0.3$, $K_0 = 3$) и точку ($h_0 = 0.44$, $K_0 = 10$). Таким образом, при $M_\infty > 1$ дорожка дискретных вихрей расходитсся более медленно, чем это получалось для газодинамических условий при $M_\infty < 1$ и для несжимаемых течений жидкостей и газов [3].

В общем полученное здесь и в работе [4] постоянство чисел S_1 и других параметров при числах $M_\infty < 1$ и $R < R_*$ имеет много общего с течениями несжимаемой жидкости. Но величины S_1 и другие параметры в [4] и здесь получаются несколько большими, чем в соответствующих течениях несжимаемой жидкости. Сходство вихревой структуры в следах сжимаемого и несжимаемого течений, очевидно, обеспечивается сохранением, по существу, общей структуры обтекания профилей при

$M_\infty < 1$ в той форме, которая свойственна несжимаемым течениям, несмотря на появление при $M_\infty < 1$ локальных зон, где $M > 1$.

При $M_\infty > 1$ изменяется общая структура внешнего обтекания профиля: в следе существует горловина и два хвостовых скачка. Свободный пограничный слой располагается в узкой осевой области следа и здесь появляются дискретные вихри, расположенные либо в шахматную, либо в симметричную расходящуюся дорожку.

По-видимому, явление дискретных вихрей в следе за профилями в плоских несжимаемых и сжимаемых течениях при $M_\infty < 1$, а также при определенных величинах $M_\infty > 1$ в обоих случаях при $R < R_*$ нужно рассматривать как одну из общих форм потери устойчивости стационарным течением при переходе в нестационарное [4, 5].

Авторы благодарят Г. И. Петрова за внимание к работе и советы.

Поступило 21 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов О. М., Попов С. Г. Вихри в плоском газодинамическом следе за цилиндром. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
2. Dom m U. Ein Beitrag zur Stabilitätstheorie der Wirbelstrassen unter Berücksichtigung endlicher und Zeitlicher Wirbelkerndurchmesser. Ingt-Arch., 1954, 22, No. 6.
3. Wille R. Strömungserscheinungen in Übergangsgebiet von georgneter zu ungeorgneter Bewegung. In: Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gessellschaft, 1952, No. 6.
4. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
5. Брушлинская Н. Н. О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 4.

О ФОРМЕ ДИФРАГИРОВАННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Г. М. АРУТЮНЯН (Москва)

В данной статье приводятся аналитические выражения для формы скачка при дифракции ударной волны произвольной интенсивности около малого угла, полученные на основании метода работы [1].

Воспользовавшись обозначениями работы [1], можно показать, что для $\varphi(x_1) = f(y(x_1))$ ($1 \leq x_1 < \infty$) справедливы соотношения¹

$$\begin{aligned} q(x_1) = \lambda_1 & \left[\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{1/2} \arctg \left(\frac{x_1 - 1}{1 - x_0} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - x_0}{1 + x_0} \right)^{1/2} \ln \frac{\sqrt{1 + x_1} - \sqrt{1 + x_0}}{\sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_0}} \right] + \\ & + \lambda_2 \left[\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{1/2} \arctg \frac{\sqrt{x_1 - 1}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 2}} \arctg \left(\frac{x_1 + 1}{\alpha^2 - 2} \right)^{1/2} \right] + \\ & + \lambda_3 \left[\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{1/2} \arctg \frac{\sqrt{x_1 - 1}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 2}} \arctg \left(\frac{x_1 + 1}{\beta^2 - 2} \right)^{1/2} \right] + \Phi(x_1, C_1, C_2) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Phi(x_1, C_1, C_2) = C_1 \sqrt{\frac{(1 - k^2)(x_1 - 1)}{x_1 + 1}} + C_2$$

если поток за набегающим скачком дозвуковой;

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) = \lambda_1 & \left[\left(\frac{2}{x_1 + 1} \right)^{1/2} + \left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{1/2} \arctg \left(\frac{x_1 - 1}{2} \right)^{1/2} \right] + \\ & + \lambda_2 \left[\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{1/2} \arctg \frac{\sqrt{x_1 - 1}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 2}} \arctg \left(\frac{x_1 + 1}{\alpha^2 - 2} \right)^{1/2} \right] + \\ & + \lambda_3 \left[\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{1/2} \arctg \frac{\sqrt{x_1 - 1}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 2}} \arctg \left(\frac{x_1 + 1}{\beta^2 - 2} \right)^{1/2} \right] + \Phi(x_1, C_1, C_2) \end{aligned} \quad (2)$$

¹ В переменных x, y работы [1] уравнение скачка есть $x = k + f(y)$, при этом $0 \leq y \leq \sqrt{1 - k^2}$, а $f(y)$ нужно определить.