

## ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА В ВАКУУМ

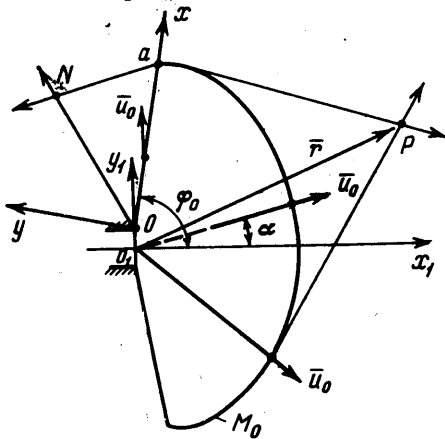
Г. А. ЛУКЬЯНОВ, В. А. СИЛАНТЬЕВ

(Ленинград, Новосибирск)

Рассмотрена приближенная схема расчета параметров газа в бесстолкновительной области при истечении в вакуум (плоский и осесимметричный случаи).

Свободное расширение газа в вакуум рассматривалось в значительном количестве работ. Однако большинство из них основано на применении газодинамики континуальной идеальной жидкости. Газодинамический анализ свободномолекулярного расширения в пустоту газового облака, а также потока от свободномолекулярного точечного источника проведен в работе [1]. В данной работе рассматривается стационарное истечение газа в пустоту. При достаточно большой начальной плотности в свободной струе, истекающей в вакуум, можно выделить области сплошного и бесстолкновительного течений, соединяющиеся одно с другим переходной областью. В области сплошного течения параметры газа могут быть определены либо методом характеристик [2], либо одним из приближенных методов [3].

1. За границу сплошного течения приближенно можно принять поверхность, начиная с которой частица, двигаясь до бесконечности, испытывает одно столкновение



Фиг. 1

$$v = \sqrt{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{nc\sigma}{u} dr = 1$$

Здесь  $n$  — концентрация,  $c$  — тепловая скорость,  $\sigma$  — сечение столкновения,  $u$  — средняя массовая скорость. После прекращения столкновений частиц температура, соответствующая разбросу по проекции скорости в направлении массового движения, остается практически постоянной [4]. По неизменности этого распределения атомов по скорости, определенного по доплеровскому уширению линий, в работе [5] сделан вывод о стремлении числа Маха  $M$  и температуры газа  $T$  к некоторым асимптотическим значениям.

Брук и Омэн [6] на основе численного решения модели уравнения Больцмана показал, что переход от сплошного течения к бесстолкновительному происходит весьма резко.

Последнее обстоятельство позволяет предложить приближенную схему расчета параметров струи в бесстолкновительной области. В качестве границы свободномолекулярной области принимается поверхность, на которой достигается предельное значение числа Маха  $M_0$ . Параметры газа однозначно определяются заданием на граничной поверхности функции распределения. В принципе начальное распределение определяется предисторией потока и может быть совершенно произвольным (за исключением некоторых ограничений, налагающихся на моменты функции распределения).

В зоне континуального течения функция распределения будет максвелловской. В переходной области, вообще говоря, происходит отклонение распределения частиц по скоростям от максвелловского, так как при подходе к граничной поверхности исчезают частицы, летящие из бесконечности к границе. Однако и при максвелловском распределении, если  $M_0 \gg 1$ , доля частиц, возвращающихся к границе, очень мала. Исключения составляют области струи, где направление массового движения близко к касательной к граничной поверхности.

Будем полагать, что функция распределения на границе будет максвелловской. При известной функции распределения среднее значение функции скорости

$$\psi(v) = \frac{1}{n} \iiint \psi(v) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dv \quad (1.1)$$

Параметры газа определяются формулами

$$n = \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dv$$

$$u = \frac{1}{n} \iiint v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dv, \quad T = \frac{1}{3kn} \iiint (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dv \quad (1.2)$$

2. Типичная картина истечения газа в вакуум из плоского сопла в сечении, перпендикулярном оси  $z$ , и схема расчета представлены на фиг. 1. Все параметры вдоль  $z$  считаются постоянными.

Спектр линий тока плоской струи таков, что на больших расстояниях от среза сопла с большой степенью точности линии тока могут считаться прямыми, исходящими из общего полюса, расположенного в выходном сечении сопла. Граничная функция распределения в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  записывается в виде (2.1)

$$f_0 = n_0 \left( \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \{ -\mu^2 [(v_{x1} - u_0 \cos \alpha)^2 + (v_{y1} - u_0 \sin \alpha)^2 + v_{z1}^2] \}, \mu = \left( \frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2}$$

Параметры газа в бесстолкновительной области однозначно определяются функцией распределения в данной точке пространства. В точку  $P(x_1, y_1, z_1)$  могут попасть только те частицы, вектор скорости  $\mathbf{v}$  которых принадлежит внутренности пространства  $\Omega[\mathbf{r}(x_1, y_1, z_1)]$ , образованного касательными из точки  $P(x_1, y_1, z_1)$  к граничной поверхности (фиг. 1). Поэтому функция распределения дается выражением

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \begin{cases} f_0, & \mathbf{v} \in \Omega(\mathbf{r}) \\ 0, & \mathbf{v} \notin \Omega(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.2)$$

В плоской струе можно выделить две области  $\varphi > \varphi_0$  и  $\varphi < \varphi_0$ . Для простоты будем считать, что плоскость  $y_1 = 0, x_1 < 0$  непроницаема для частиц из нижней полуплоскости. В области  $\varphi > \varphi_0, 0 < x < a$  параметры газа будут определяться лишь частицами, вылетающими из полосы  $0a$ . При  $\varphi_0 \approx 1/2\pi$  может быть сделано еще одно упрощающее предположение. Будем считать вектор скорости направленного движения  $u_0$  совпадающим с границей бесстолкновительной области  $u_0(u_0, 0, 0)$ . Граничная функция распределения (2.1) в системе координат  $x, y, z$  для области  $\varphi > \varphi_0, 0 < x < a$  принимает вид

$$f_0 = n_0 \left( \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \{ -\mu^2 [(v_x - u_0)^2 + v_y^2 + v_z^2] \}$$

Используя уравнение линий тока

$$v_z = \frac{z - z_0}{x - x_0} v_x, \quad v_x = \frac{x - x_0}{y - y_0} v_y \quad (2.3)$$

для среднего значения функции скорости получаем выражение

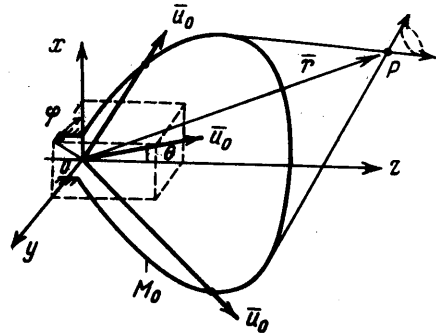
$$\Psi = n_0 \frac{\mu^2}{\pi} \int_0^a \int_0^\infty \psi \exp \left\{ -\mu^2 \left[ \left( \frac{x - x_0}{y} v_y - u_0 \right)^2 + v_y^2 \right] \frac{v_y}{y} \right\} dx_0 dv_y \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.4) на основании (1.2) могут быть определены  $n, u$  и  $T$ . Концентрация частиц  $n$ , в частности, равна ( $\Phi$  — интеграл вероятности)

$$n = n_0 \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty \exp(-\mu^2 v_y^2) \Phi \left[ \mu \left( u_0 + \frac{a - x}{y} v_y \right) \right] dv_y - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\mu^2 v_y^2) \times \right. \\ \left. \times \Phi \left[ \mu \left( u_0 - \frac{x}{y} v_y \right) \right] dv_y + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty \exp(\mu^2 v_y^2) \Phi \left[ \mu \left( v_y \frac{x}{y} - u_0 \right) \right] dv_y \right\} \quad (2.5)$$

Величина  $\mu u_0 = M_0^*$  представляет собой аналог числа Маха.

При  $x \ll a$  концентрация постоянна в плоскостях  $x/y = \text{const}$  аналогично континуальному течению Прандтля — Майера. Расчет показывает, что концентрация, вычисленная по формуле (2.5), при  $x \ll a$  очень близка к концентрации частиц для сплошного течения. Однако имеется принципиальное различие в результатах кинетического и континуального подходов. В первом случае концентрация частиц отлична от нуля в любой точке пространства. В случае сплошной модели граница струи разделяет области с конечной и нулевой концентрациями.



Фиг. 2

При расчете параметров в области  $\varphi > \varphi_0$ ,  $x > a$  необходимо учитывать частицы, вылетающие с цилиндрической части граничной поверхности. В области  $\varphi < \varphi_0$  течение близко к течению типа плоского источника. Для определения параметров в этой зоне следует воспользоваться функцией распределения (2.1).

3. Поверхности равных параметров в осесимметричной струе, истекающей в вакуум, имеют грушевидную форму (фиг. 2). Граничная функция распределения в сферической системе координат имеет вид

$$f_0 = n_0 \left( \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \{ -\mu^2 [(v_x - u_0 \sin \theta \cos \varphi)^2 + (v_y - u_0 \sin \theta \sin \varphi)^2 + (v_z - u_0 \cos \theta)^2] \} \quad (3.1)$$

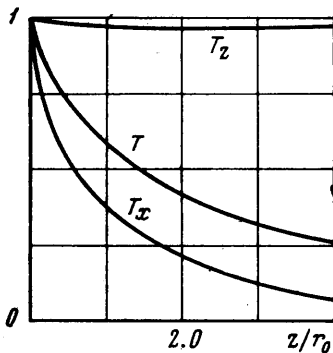
При известной граничной поверхности  $r_0 = r_0(\theta, \varphi)$  среднее значение  $\psi(v)$  определяется формулой (1.1). Интегрирование производится в объеме скоростей  $v \in \Omega(r)$ . Пространство  $\Omega(r)$  образуется касательными из точки  $P(x, y, z)$  к граничной поверхности. Определение параметров газа при произвольной форме поверхности возможно лишь приближенными методами. Для некоторых областей пространства могут быть сделаны различные упрощающие предположения, позволяющие выразить явно параметры газа через начальные данные и координаты.

Такой областью, в частности, будет течение вблизи оси струи. В этой области течение очень близко к течению в сферическом свободномолекулярном источнике. Выражение для  $\psi$  записывается в виде

$$\psi = \frac{n_0}{n} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi(v) \exp \left\{ -\mu^2 \left[ \left( -\frac{r_0 \sin \theta \cos \varphi}{z - r_0 \cos \theta} v_z - u_0 \sin \theta \cos \theta \right)^2 + \left( -\frac{r_0 \sin \theta \sin \varphi}{z - r_0 \cos \theta} v_z - u_0 \sin \theta \sin \varphi \right)^2 + (v_z - u_0 \cos \theta)^2 \right] \right\} \frac{(z \cos \theta - r_0) \sin \theta r_0^2 v_z}{(z - r_0 \cos \theta)^3} d\theta d\varphi dv_z, \quad \theta_0 = \arccos \frac{r_0}{z} \quad (3.2)$$

Здесь  $r_0$  — радиус граничной поверхности источника. Распределение концентрации вдоль оси  $z$  при  $M \gg 1$  определяется формулой

$$n = n_0 r_0^2 \int_0^\theta \exp \left\{ -\mu^2 u_0^2 \left[ 1 - \frac{u_0 (z \cos \theta - r_0)^2}{r_0^2 + z^2 - 2r_0 z \cos \theta} \right] \right\} \times \times (z \cos \theta - r_0) \left[ \frac{1}{(r_0^2 + z^2 - 2r_0 z \cos \theta)^{3/2}} + 2\mu^2 \frac{(z \cos \theta - r_0)^2}{(r_0^2 + z^2 - 2r_0 z \cos \theta)^{5/2}} \right] \sin \theta d\theta \quad (3.3)$$



Фиг. 3

Здесь  $c$ ,  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  — средние значения скорости и ее проекции.

В случае произвольной функции распределения выражение (3.5) можно принять за определение температуры газа. Для бесстолкновительного течения уравнения (3.5) имеют формальный смысл, характеризуя лишь разброс соответствующих проекций скоростей. Температуры, вычисленные по различным проекциям скоростей, могут оказаться различными.

При  $r_0/z \ll 1$  выражение (3.3) принимает вид

$$n = n_0 \left( \frac{r_0}{z} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{2M_0^2} \right) \quad (3.4)$$

Среднее значение кинетической энергии поступательного движения частиц для максвелловского распределения равно

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \bar{c}^2 = \frac{3}{2} kT$$

При этом на каждую координатную ось приходится энергия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m c_x^2 &= \frac{1}{2} kT_x, & \frac{1}{2} m c_y^2 &= \frac{1}{2} kT_y \\ \frac{1}{2} m c_z^2 &= \frac{1}{2} kT_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

На фиг. 3 приведено изменение температуры в сферическом источнике в случае континуального и бесстолкновительного течений при  $M_0^* = 5$ . Температуры  $T_x$  и  $T_z$  определены из соотношения (1.2) с учетом (3.2).

При  $M_0^* \gg 1$  и  $r_0/z \ll 1$  для  $T_x = T_y$  и  $T_z$  могут быть получены выражения

$$T_x = \frac{n_0}{n} T_0 \left( \frac{r_0}{z} \right)^4 \left( 1 - \frac{3}{M_0^{*2}} \right) \approx T_0 \left( \frac{r_0}{z} \right)^2 \left( 1 - \frac{5}{2M_0^{*2}} \right) T_z = T_0 \left( 1 - \frac{1}{2M_0^{*2}} \right)$$

Температура  $T_z$ , характеризующая разброс скоростей в направлении массового движения, оказывается практически постоянной и очень близкой к температуре на начальной поверхности. Температура  $T_x = T_y$ , характеризующая разброс скоростей в направлении, перпендикулярном к массовому движению, уменьшается заметно быстрее по сравнению со случаем сплошного течения. Зависимость для  $T_z$  качественно согласуется с работой, где [7] для температуры приводится решение типа

$$T = T_\infty \left[ 1 + a \frac{1}{z} + \dots \right] \quad (3.7)$$

справедливое для больших расстояний от полюса источника. Здесь  $a$  — коэффициент, зависящий от начальных параметров,  $T_\infty$  — предельное значение температуры.

Выражение (3.7) указывает на относительно плавное уменьшение температуры, что наблюдается и в предлагаемой схеме.

Таким образом, кинетический подход дает мало новых сведений о характере изменения концентрации и массовой скорости частиц в гиперзвуковом потоке. Данный результат будет естественным ввиду близости скорости к своему термодинамическому пределу. Изменение концентрации определяется уравнением неразрывности и не зависит от местной частоты столкновений.

Основное различие кинетического и континуального подходов проявляется в характере изменения температуры. Предлагаемая схема расчета не претендует на высокую точность и предназначена для приближенных инженерных оценок.

Поступило 9.X.1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нарасимха Р. Расширение газов в пустоту без столкновений. Сб. перев. Механика, 1963, 2, 78.
2. Элерс Ф. З. Метод характеристик для изоэнергетических сверхзвуковых течений, приспособленный к быстродействующим цифровым вычислительным машинам. Сб. перев. иностр. статей, 1960, № 1 (59).
3. Гинзбург И. П. Аэрогазодинамика. М., «Высшая школа», 1966.
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. Паттерсон Г. Н. Обзор состояния механики разреженных газов. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 4.
6. Brook I. W., Oman R. A. Rarefied gas dynamics. Forth. Symp., Acad. Press, 1965.
7. Edwards R. H., Cheng H. K. Steady expansion of a gas into a vacuum. AIAA J., 1966, vol. 4, No. 3.

#### ТРЕУГОЛЬНОЕ КРЫЛО С ПРИТУПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ ПОД МАЛЫМИ УГЛАМИ АТАКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

А. В. КРАСИЛЬНИКОВ (Москва)

Рассматривается задача обтекания треугольной пластины с постоянным вдоль кромки сопротивлением  $c_x d$  и углом  $2\theta$  при вершине под малыми углами атаки  $\alpha$ . Набегающий поток — совершенный с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$ , а число Маха  $M = \infty$ .

Задача решается в рамках простейшей двухслойной схемы течения, ранее использованной в работах [1, 2]. Выделяются две области на некотором удалении от носка. В области  $A$ , прилегающей к кромке, течение считается эквивалентным обтеканию бесконечной пластины со скольжением, а в области  $B$  учитываются условия плоскости симметрии. За границу высокоэнтропийного слоя условно принимается некоторая поверхность тока, характеризующаяся энтропией  $S_0$  и расходом  $\Psi_0$  в области  $A$  в направлении, перпендикулярном кромке. Течение в нем считается одномерным с осредненными по толщине параметрами (ниже помечены индексом  $c$ ) и эквивалентным расходом  $\varphi_c$ , определяемым в области  $A$  равенством

$$m(1 - w_c) = \varphi_c S_c^{1/\gamma}, \quad m = \rho_0 \delta, \quad \Psi = 1/2 c_x d \rho_\infty U_n \tau$$